hohe und von mir unmeritirte Genade versichert hat nebst Vermelden, dass E^re Excellence Zu wissen verlangte Zu was vor einem Dienste ich incliniren möchte. Ich bedancke mich demnach in aller Submission vor Solche hohe Affection und wünschte dass ein solcher Dienst ware beij welchen durch vieles Schreiben oder andern vielen Affairen nicht sonderlich von meiner neu Begierigen Arbeit abgehalten würde. Solte es aber auch geschehen können, dass Sonsten mit einer gewissen jahrlichen Pension Begnadiget konte werden, ohne andere Affairen dabeij zu verstalten, würde mir Solches wol etwass angenehmer seijn, weile ich dadurch freije hande haben würde Zu allen Zeiten meine Arbeit fortzusetzen, jedoch stelle alles E^rer Excellence Hohes Guts Befinden und Genade anheim, ja wan ich gleich nichts Bekäme, so wünschte ich doch an Solchen Ort Zu leben wo ein so vortrefflicher Man Seinen Sitz hat. Schliesslich bitte dass E^re Excellence nicht ungnadig nehmen wolle, dass alhier so freij meine Gedancken eroffnet habe, oder dass E^re Excellence mit einem so gar weitlaufigen Briefe molestire. Der sich ubrigens mit aller Veneration alleseit verharren werde".

LEIBNIZ' Tod (16. Nov. 1716), nur wenige Monate nachdem derselbe diesen Brief erhalten hatte, entzog FAHRENHEITs Hoffnung auf Hilfe von dieser Seite den Boden. Anfang des Jahres 1717 befindet er sich wieder in Amsterdam, wo er sich, (vergl. unsere erste Mitteilung) ständig niederliess.

Seine „Sturm- und Drangperiode" nimmt damit ihr Ende, sein Geist, sein Leben, bewegt sich von nun an in einer ruhigeren Bahn.

Utrecht, August 1937. *van 't Hoff-Laboratorium.*

---

welcher Mathematik, Philosophie, Chemie und Anatomie kultivierte und sich abwechselnd in Leipzig (wo er 1710—1711 Vorlesungen hielt), Dresden, Prag, Wien, Frankfurt a/M u. a. O. aufhielt". Er gab u. A. einen Teil von KEPLERs Werken heraus.

Mathematics. — *Ueber die* CARSON*sche Integralgleichung.* Von H. BREMEKAMP. (Communicated by Prof. W. VAN DER WOUDE.)

(Communicated at the meeting of September 25, 1937.)

1. Die Integralgleichung

$$f(z) = \int_0^\infty e^{-uz}\, h(u)\, du \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

spielt eine wichtige Rolle in CARSONs Theorie der HEAVISIDE*schen* Operatorenrechnung [1]). Ich behandle hier einige Sätze über genügende Bedingungen, unter welchen die Funktion $h(u)$ durch (1) eindeutig bestimmt ist, und unter welchen eine Lösung von (1) überhaupt möglich ist. Diese Fragen, obwohl für die Theorie von fundamenteller Bedeutung, sind von CARSON völlig unerörtert gelassen worden. Die Gleichung (1) scheint für den CARSONschen Zweck mehr geeignet als die Gleichung

$$f(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-uz} h(u)\, du, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

die unter Umständen leichter zu hantieren ist [2]) und auch wohl eingehender untersucht worden ist. Die Existenz- und Eindeutigkeitssätze und die Beweise derselben sind für beide Gleichungen etwas verschieden.

Man muss bei jedem Satze angeben, für welche Werte von z die betreffende Lösung der Gleichung genügen soll. Die Eindeutigkeitssätze sind interessanter, je nachdem die Menge dieser Werte kleiner ist, die Existenzsätze, je nachdem sie umfassender ist.

2. Ich zeige zuerst, dass es unter der Bedingung, dass $h(u)$ stetig ist, nicht zwei verschiedene Lösungen geben kann, die der Gleichung (1) für jedes positive ganzzahlige z genügen.

Gäbe es zwei stetige Funktionen $h_1(u)$ und $h_2(u)$, welche beide (1) genügten, so gälte mit $h_1(u) - h_2(u) = g(u)$

$$\int_0^{\infty} e^{-uz} g(u)\, du = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Wäre $g(u)$ nicht überall Null, so gäbe es sicherlich entweder ein Intervall, wo diese Funktion überall positiv oder ein solches, wo sie überall negativ ist. Beides führt zu einem Widerspruch. Sei $g(u)$ positiv für $a < u < b$. Aus (3) folgt

$$\int_0^1 t^{z-1} \varphi(t)\, dt = 0, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

wo $\varphi(t) = g\left(lg \frac{1}{t}\right)$ eine im Intervalle 0—1 stetige Funktion darstellt, welche in einem Teilintervalle α—β positiv ist.

---

1) Siehe z.B. B. VAN DER POL. On the operational solution of linear differential equations and an investigation of the properties of these solutions. Phil. Mag. VIII (1929).

2) Siehe G. DOETSCH. Ein allgemeines Prinzip der asymptotischen Entwicklung. Journal für die reine und angewandte Mathematik Bd. **167** (1932) insbesondere das Kapitel: Exkurs über die LAPLACE-Transformation.

Nun ist $1+\frac{(\beta-t)(t-\alpha)}{M}>1$ für $\alpha<t<\beta$,

$$0<1+\frac{(\beta-t)(t-\alpha)}{M}<1 \text{ für } 0<t<\alpha \text{ und für } \beta<t<1,$$

wenn M die grössere der beiden Zahlen $\alpha\,\beta$ und $(1-\alpha)(1-\beta)$ bezeichnet. Im erstgenannten Teilintervalle wächst also

$$\left\{1+\frac{(\beta-t)(t-\alpha)}{M}\right\}^m$$

mit m über alle Grenzen, im übrigen Teile des Intervalles 0—1 konvergiert dieser Ausdruck gegen Null. Man kann daher die ganze Zahl m so wählen, dass

$$\int_0^1 \left\{1+\frac{(\beta-t)(t-\alpha)}{M}\right\}^m \varphi(t)\,dt$$

positiv ist, im Widerspruch damit, dass wegen (3) $\int_0^1 t^{z-1}\varphi(t)\,dt$ für jedes ganzzahlige positive z Null ist [1]. Man sieht leicht ein, dass man im Vorstehenden die Bedingung $h(u)$ *ist stetig* durch $h(u)$ *genügt den* DIRICHLET*schen Bedingungen* ersetzen kann.

Dieser Satz gilt nicht für die Gleichung (2). Dabei würde man statt der Gleichung (4) finden

$$\int_0^\infty t^{z-1}\varphi(t)\,dt=0. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

Und man sieht leicht ein, dass die weiteren Schlüsse für diese Gleichung nicht zutreffen. Das von STIELTJES gegebene Beispiel

$$\varphi(t)=\sin\sqrt[4]{t}\;e^{-\sqrt[4]{t}}$$

zeigt, dass es wohl Funktionen gibt, die der Gleichung (5) für jedes ganze positive z genügen.

3. Unter anderen Bedingungen kann man die Eindeutigkeit der Lösung von (1) mit Hilfe des bekannten BROMWICH*integrals* beweisen. Es sei $f(z)$ eine in der komplexen Halbebene $x>c$ analytische Funktion, derart, dass das Integral

$$\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{vz} f(z)\,dz \quad \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

[1]) Diese einfache Beweismethode ist auch geeignet, um einen etwas allgemeineren Satz von LERCH (Acta Math. **27**, 1903) zu beweisen.

für jedes positive v konvergiert. Von der Funktion $h(u)$ wird verlangt, dass sie der Gleichung (1) für jedes z in der genannten Halbebene genügt.

Wenn es eine solche Funktion $h(u)$ gibt, kann man (1) in (6) einsetzen und erhält

$$\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{vz} f(z)\, dz = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{vz}\, dz \int_0^\infty e^{-uz} h(u)\, du.$$

Setzen wir hierin $z = c + iy$, $e^{-cu} h(u) = g(u)$ so geht die rechte Seite über in

$$i e^{cv} \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_0^\infty e^{iy(v-u)} g(u)\, du,$$

d.i., wegen des FOURIER-Satzes $2\pi i e^{cv} g(v) = 2\pi i h(v)$. Wenn es eine Funktion $h(u)$ gibt, welche (1) genügt, so ist sie also durch

$$h(v) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{vz} f(z)\, dz \qquad (7)$$

gegeben. Man bemerke, dass wegen des CAUCHYschen Satzes der Wert des Integrals (6) sich nicht ändert, wenn man c durch eine grössere Zahl ersetzt. Ganz ähnlich zeigt man, dass dieser Satz auch für die Gleichung (2) gilt.

4. Zu Unrecht wird diese Rechnung in der Literatur oft als Existenzbeweis für die Funktion $h(v)$ betrachtet [1]). Der Existenzbeweis wird erst erbracht sein, wenn gezeigt ist, dass (7) tatsächlich der Gleichung (1) genügt. Wir führen den Beweis unter folgenden Voraussetzungen.

1. Die Gleichung (1) gilt für $R(z) > c$, wo c so zu wählen ist, dass alle Singularitäten der gegebenen Funktion $f(z)$ links von der Geraden $x = c$ liegen,
2. $f(z) \to 0$ für $z \to \infty$ mit positiven Realteil,
3. es konvergiere $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} | f(c+iy) |\, dy.$

Es ist also zu beweisen

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty e^{-uz}\, du \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{uv} f(v)\, dv \qquad (8)$$

[1]) Siehe z.B. March Bulletin of the Am. Math. Soc. **33** (1927).

Wir vertauschen die Integrationsfolge. Das ist gestattet, weil wegen der gemachten Voraussetzungen die beiden Integrale

$$\int_0^{\infty} e^{-u(z-v)}\,du \quad \text{und} \quad \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{uv} f(v)\,dv$$

absolut konvergent sind, das erste weil der Realteil von $z-v$ positiv ist, das zweite wegen

$$\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} |e^{uv} f(v)|\,|dv| = e^{cu} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(c+iy)|\,dy.$$

Also

$$\frac{1}{2\pi i}\int_0^{\infty} e^{-zu}\,du \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{uv} f(v)\,dv = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} f(v)\,dv \int_0^{\infty} e^{-u(z-v)}\,du = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{f(v)}{z-v}\,dv.$$

Das letzte Integral ergänzen wir zu einem Konturintegral, indem wir den Integrationsweg durch einen in die rechte Halbebene fallenden unendlich grossen Halbkreis abschliessen. Weil das Integral längs des Halbkreises den Wert Null hat, und im Innern des so geformten Konturs keine Singularität des Integranden liegt, ausser $z = v$, so gilt nach dem CAUCHYschen Satze

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{f(v)}{z-v}\,dv = f(z),$$

was nach (8) zu beweisen war.

Das BROMWICHintegral genügt auch der Gleichung (2). Das kommt ja auf den MELLINschen Umkehrsatz [1]) hinaus.

5. Wir sind jetzt imstande, wenn $f(z)$ den Bedingungen des letzten Satzes genügt, die Eindeutigkeit der Lösung von (1) (und ebenso von (2)) zu beweisen, wenn von der Funktion $h(u)$ nur verlangt wird, dass

---

[1]) HJ. MELLIN. Ueber den Zusammenhang zwischen den linearen Differential- und Differenzengleichungen. Acta Math. Bd. **25** (1902). Vgl. auch H. HAMBURGER, Ueber die RIEMANNsche Funktionalgleichung der ξ-Funktion. Math. Zeitschrift Bd. **10** (1921).

Die Formeln (1) und (7) kommen mit etwas anderen Bezeichnungen auch vor in einer Arbeit von H. HAMBURGER, Ueber eine RIEMANNsche Formel aus der Theorie der DIRICHLETschen Reihen. Math. Zeitschrift Bd. **6** (1920), wo einerseits den Funktionen weniger schwere Bedingungen auferlegt werden als im Obenstehenden, anderseits aber, entsprechend dem Zweck der Arbeit, die Existenz der Funktion $h(u)$ von vornherein postuliert wird.

sie der Gleichung genügt auf irgend eine Strecke $\alpha\beta$ der Halbebene $x > c$ und ausserdem dass, wenn a_1 der Realteil des meist links gelegenen der Punkte α und β ist, das Integral $\int\limits_0^\infty e^{-a_1 u} \, |h(u)| \, du$ konvergiert.

Die durch (5) definierte Funktion h genügt diesen Bedingungen. Gäbe es noch eine zweite derartige Funktion $h_1(u)$, so gälte mit $g(u) = h(u) - h_1(u)$:

$$\int\limits_0^\infty e^{-uz} g(u) \, du = 0$$

für jedes z auf der Strecke $\alpha\beta$, und

$$\int\limits_0^\infty e^{-a_1 u} \, | g(u) | \, du$$

konvergiert. Nun ist für jedes z in der Halbebene $x > a_1$

$$\left| \int\limits_0^\infty e^{-uz} g(u) \, du \right| < \int\limits_0^\infty e^{-ua_1} \, | g(u) | \, du,$$

also das Integral $\int\limits_0^\infty e^{-uz} g(u) du$ in der ganzen Halbebene uniform konvergent. Es stellt daher in dieser Halbebene eine analytische Funktion dar; dieselbe ist aber gleich Null auf der Strecke $\alpha\beta$, somit in der ganzen Halbebene gleich Null. Hieraus folgt unter Anwendung des in 3 bewiesenen, dass in der ganzen Halbebene $g(u) = 0$, also auch auf der Strecke $\alpha\beta$, $h_1(u) = h(u)$.

Die Sätze der §§ 2—4 sind kurz vorgetragen worden auf dem Osloer Kongresse 1936, und ohne die Beweise in die Comptes Rendus dieses Kongresses aufgenommen worden.