REFERENCES.

1. G. JAFFÉ, Ann. der Physik, **42**, 303 (1913).
2. H. ZANSTRA, Physica, **2**, 817 (1935).
3. J. CLAY, Physica, **2**, 111 (1935).
J. CLAY and V. TIJN, Physica, **2**, 825 (1935).
J. CLAY, STAMMER and V. TIJN, Physica, **4**, 216 (1937).
4. J. CLAY and H. F. JONGEN, Physica, **4**, 245 (1937).
J. CLAY and K. OOSTHUIZEN, Physica, **4**, 527 (1937).
5. J. CLAY, Physica, **4**, 645 (1937).
6. J. CLAY and G. V. KLEEF, Physica, **4**, 651 (1937).
7. J. CLAY and G. V. KLEEF, Proc. Royal Acad. Amsterdam, **40**, 663 (1937).
8. J. JUILFS und V. MASUCH, Z. f. Physik, **140**, 458 (1936).

Mathematics. — *Sur la méthode de* WEYL *dans la théorie des nombres.* Par J. G. VAN DER CORPUT. (Troisième communication).

(Communicated at the meeting of November 27, 1937.)

§ 4. *Sommes de* WEYL *généralisées, de premier degré.*

J'entends par sommes de WEYL généralisées des sommes de la forme

$$S = \sum_{x=P+1}^{P+X} e^{2\pi i f(x)}\,;\; S' = \sum_{x=P+1}^{P+X} \cos 2\pi f(x)\,;\; S'' = \sum_{x=P+1}^{P+X} \sin 2\pi f(x),$$

où P est un nombre entier, X un nombre naturel, $f(x)$ une fonction réelle telle qu'il existe un nombre entier non négatif $k \leqq X-2$, pour lequel

$$\triangle^{k+1} f(x) = f(x+k+1) - \binom{k+1}{1} f(x+k) + \\ + \binom{k+1}{2} f(x+k-1) - \ldots \pm f(x)$$

a une valeur proche de zéro lorsque x prend les valeurs $P+1, P+2, \ldots, P+X-k-1$; j'appelle le nombre k le degré de la somme de WEYL généralisée considérée. La notion „proche de zéro" est vague, ce qui rend vague aussi la notion de somme de WEYL généralisée. Une somme de la forme S, ou S', ou S'', pourra être appelée somme de WEYL généralisée, ou non, selon que l'on sera plus ou moins strict en ce qui concerne le sens attaché à la notion „proche de zéro". Le degré d'une somme généralisée n'est pas, non plus, défini avec beaucoup de précision. La question qui se pose est, ici encore, de chercher une borne supérieure pour la valeur absolue des sommes de WEYL généralisées. Si l'on divise l'intervalle $(P+1,\ P+X)$ en intervalles partiels assez petits, alors, dans chacun de ceux-ci, $\triangle^{k+1} f(x)$ est proche de zéro, ce qui revient à dire que la fonction $f(x)$ est par approximation égale à un polynôme du k^e degré en x. Une somme de WEYL généralisée peut donc, si $k \geqq 1$, être décomposée en un certain nombre de sommes partielles, toutes égales par approximation à des sommes de WEYL non généralisées, du même degré. Il est donc possible de tirer de la théorie des sommes de WEYL, des résultats concernant les sommes de WEYL généralisées. C'est ce qui fut fait dans la méthode de PILTZ, qui traite les sommes de WEYL généralisées, du premier degré, par approximation au moyen de sommes de WEYL du même degré, non généralisées. Il y a pourtant avantage, le plus souvent, à traiter les sommes de WEYL généralisées d'une manière directe. C'est ce que je ferai dans ce paragraphe, pour les sommes de WEYL généralisées du premier degré. Les théorèmes de ce paragraphe sont dûs à différents mathématiciens, LANDAU [1]), VINOGRADOW, VAN DER CORPUT. La démonstration géométrique, très simple, du premier théorème est de KUSMIN [2]).

Si n nombres réels $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ et un nombre positif $\theta \leqq \frac{1}{2}$ sont tels que $n \geqq 1$ et que la différence $\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu$ est monotone-croissante et toujours $\geqq \theta$ et $\leqq 1 - \theta$ pour $\nu = 1, 2, \ldots, n-1$, alors

$$\left| \sum_{\nu=1}^{n} e^{2\pi i \alpha_\nu} \right| \leqq \cot g \frac{\pi\theta}{2}.$$

POPKEN [3]) a encore amélioré ce résultat, dans le cas où existent certaines conditions supplémentaires.

Le théorème est évident quand $n = 1$, le membre de gauche étant alors $= 1$, celui de droite $\geqq \cot g \frac{\pi}{4} = 1$.

Pour $n = 2$ le membre de gauche est égale à

$$\begin{aligned} \left| e^{\pi i(\alpha_2-\alpha_1)} + e^{-\pi i(\alpha_2-\alpha_1)} \right| &= 2 \left| \cos \pi (\alpha_2 - \alpha_1) \right| \\ &\leqq \cos \pi\theta + \cos \pi\theta \leqq \cot g\, \pi\theta + \operatorname{cosec} \pi\theta \\ &= \cot g \frac{\pi\theta}{2}. \end{aligned}$$

Pour la démonstration on peut donc admettre $n \geqq 3$. Je marque dans le plan complexe les points $s_0 = 0$ et

$$s_h = \sum_{\nu=1}^{h} e^{2\pi i \alpha_\nu} \qquad (h = 1, 2, \ldots, n).$$

La distance entre s_{h-1} et s_h est égale à 1. Soit m_h le milieu du segment rectiligne ayant pour extrémités les points s_{h-1} et s_h; soit c_h le centre de la circonférence passant par les points s_{h-1}, s_h et s_{h+1}. Si je pose $\eta_h = 2\pi(\alpha_{h+1} - \alpha_h)$, la distance de m_{h+1} à c_h est $\left| \frac{1}{2} \cot g \frac{1}{2} \eta_h \right|$, celle de m_{h+1} à c_{h+1} est $\left| \frac{1}{2} \cot g \frac{1}{2} \eta_{h+1} \right|$, et ceci de telle façon que la distance

[1]) E. LANDAU, Ueber einige trigonometrische Summen, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, 21—24 (1928).

[2]) R. O. KUSMIN, Ueber einige trigonometrische Ungleichungen, J. Soc. Math. Phys., Leningrad, **1**, 233—239 (1927).

[3]) J. POPKEN, Ueber eine trigonometrische Summe, Proc. Royal Acad. Amsterdam, **35**, 668—680 (1932).

entre c_h et c_{h+1} est égale à $\frac{1}{2} cotg \frac{1}{2} \eta_h - \frac{1}{2} cotg \frac{1}{2} \eta_{h+1}$. La distance entre c_1 et c_{n-1} est donc inférieure ou égale à $\frac{1}{2}(cotg \frac{1}{2} \eta_1 - cotg \frac{1}{2} \eta_{n-1})$. Quant à la distance de c_h à s_{h-1} (et donc aussi à s_h), elle est égale à $\frac{1}{2} cosec \frac{1}{2} \eta_h$. Celle de c_1 à s_0 est égale à $\frac{1}{2} cosec \frac{1}{2} \eta_1$ et celle entre c_{n-1} et s_n à $\frac{1}{2} cosec \frac{1}{2} \eta_{n-1}$. De ceci suit que la distance séparant s_0 et s_n est tout au plus égale à

$$\frac{1}{2}(cotg \tfrac{1}{2} \eta_1 - cotg \tfrac{1}{2} \eta_{n-1}) + \tfrac{1}{2} cosec \tfrac{1}{2} \eta_1 + \tfrac{1}{2} cosec \tfrac{1}{2} \eta_{n-1}$$
$$= \tfrac{1}{2} cotg \tfrac{1}{4} \eta_1 + \tfrac{1}{2} tg \tfrac{1}{4} \eta_{n-1} \leqq cotg \frac{\pi\theta}{2},$$

puisqu'en effet

$$\frac{\pi\theta}{2} \leqq \tfrac{1}{4} \eta_1 \leqq \tfrac{1}{4} \eta_{n-1} \leqq \frac{\pi}{2}(1-\theta).$$

Le théorème est donc démontré.

Nous allons l'employer pour démontrer le théorème suivant, qui est d'importance pour la théorie des sommes de WEYL généralisées.

Si P est entier, $X \geqq 3$, $r > 0$ et

$$\Delta^2 f(x) \geqq r \qquad (x = P+1, P+2, \ldots, P+X-2),$$

alors

$$\left| \sum_{x=P+1}^{P+X} e^{2\pi i f(x)} \right| < 3 r^{-\frac{1}{2}} (2 + \Delta f(P+X-1) - \Delta f(P+1)).$$

Ce théorème donne une borne supérieure non triviale pour les sommes de WEYL généralisées du premier degré; le membre de droite divisé par X peut en effet prendre des valeurs très petites. Comme M. H. WESTPHAL m'a communiqué par lettre, l'inégalité reste encore valable, si l'on remplace le coefficient 3 par 2,637.

La démonstration du théorème est très simple. Je pose

$$S = \sum_{x=P+1}^{P+X} e^{2\pi i f(x)} \quad \text{et} \quad \Delta f(X+P-1) - \Delta f(P+1) = \Delta,$$

donc $\Delta \geqq (X-2) r \geqq r$.

Si $r > \frac{1}{9}$, j'emploie les inégalités

$$\frac{|S|}{2+\Delta} \leqq \frac{X}{2+\Delta} \leqq \frac{2 + \frac{\Delta}{r}}{2+\Delta},$$

la dernière fraction désignant une fonction monotone de Δ, qui prend pour $\Delta = r$ et pour $\Delta = \infty$ les valeurs respectives

$$\frac{3}{2+r} < \frac{6}{1+r} \leqq \frac{3}{\sqrt{r}} \quad \text{et} \quad \frac{1}{r} < \frac{3}{\sqrt{r}},$$

de sorte que

$$|S| < \frac{3}{\sqrt{r}}(2+\Delta).$$

Si $r \leqq \frac{1}{9}$, je décompose la somme S en moins de $2 + \Delta$ sommes partielles

$$\sum_{x=Q+1}^{Q+Y} e^{2\pi i f(x)},$$

un nombre entier g pouvant être associé à chacune de ces sommes tel que l'inégalité

$$g \leqq \Delta f(x) \leqq g + 1$$

est valable pour $x = Q+1,\ Q+2, \ldots,\ Q+Y-1$; la dernière somme partielle contient le dernier terme $e^{2\pi i f(P+X)}$. Je considère d'abord les valeurs entières de x telles que

$$Q+1 \leqq x \leqq Q+Y-1 \quad \text{et} \quad \Delta f(x) \leqq g + \sqrt{\frac{r}{\pi}}.$$

Il est certain, à cause des inégalités

$$\Delta f(Q+1) \geqq g \quad \text{et} \quad \Delta^2 f(x) \geqq r,$$

que le nombre de ces valeurs de x est tout au plus $1 + \frac{1}{\sqrt{\pi r}}$ et que la contribution qu'elles apportent à la somme partielle considérée est donc aussi tout au plus $1 + \frac{1}{\sqrt{\pi r}}$. On trouve, de la même manière, le résultat analogue pour les valeurs entières de x telles que $\Delta f(x) \geqq g + 1 - \sqrt{\frac{r}{\pi}}$. Les valeurs de x non encore considérées sont telles que

$$g + \sqrt{\frac{r}{\pi}} \leqq \Delta f(x) \leqq g + 1 - \sqrt{\frac{r}{\pi}},$$

donc que

$$\sqrt{\frac{r}{\pi}} \leqq \Delta \psi(x) \leqq 1 - \sqrt{\frac{r}{\pi}}, \quad \text{où} \quad \psi(x) = f(x) - gx.$$

La contribution de ces x à la somme partielle est, en vertu du théorème précédent, en valeur absolue, $\leqq \cot g\, \frac{1}{2}\sqrt{\pi r} < \frac{2}{\sqrt{\pi r}}$. Par conséquent la somme partielle est en valeur absolue inférieure à

$$2 + \frac{4}{\sqrt{\pi r}} < \frac{2}{3\sqrt{r}} + \frac{7}{3\sqrt{r}} = \frac{3}{\sqrt{r}}.$$

Le théorème est donc démontré.

§ 5. *Sommes de* WEYL *généralisées, de degré* $\geqq 1$.

Je ferai d'abord deux remarques.

1. *Si M, N, Z, α et β sont positifs, il existe un nombre positif $U \leqq Z$ tel que*

$$Max\,(U^{-\alpha},\, MU^{-\beta},\, NU^{\beta}) \leqq Max\left(Z^{-\alpha},\, MZ^{-\beta},\, M^{\frac{1}{2}} N^{\frac{1}{2}},\, N^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}\right).$$

Si la plus petite valeur du membre de gauche dans l'intervalle $0 < U \leqq Z$ est atteinte au point $U = Z$, alors cette valeur minimum est égale à $U^{-\alpha}$ ou $MU^{-\beta}$, car sinon elle pourrait être rendue plus petite encore en diminuant U; dans ce cas, le membre de gauche de l'inégalité à démontrer est égal à $Max\,(Z^{-\alpha},\, MZ^{-\beta})$. Si la plus petite valeur du membre de gauche dans l'intervalle $0 < U \leqq Z$ est atteinte en un point $U < Z$, alors cette valeur minimum est égale à $U^{-\alpha} = NU^{\beta}$ ou à $MU^{-\beta} = NU^{\beta}$, car sinon, elle pourrait être rendue plus petite encore, en modifiant un peu la valeur de U. Si le membre de gauche est égal à $U^{-\alpha} = NU^{\beta}$, il est égal à $N^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}$; sinon, il vaut $MU^{-\beta} = NU^{\beta} = M^{\frac{1}{2}} N^{\frac{1}{2}}$. La remarque est donc démontrée.

2. *Si l est un nombre naturel, si U et Y sont positifs et tels que $1 \leqq U \leqq Y^{l}$, alors il est possible de trouver l nombres positifs $u_1, u_2, \ldots, u_l$, tels que le produit de ces nombres soit égal à U et que*

$$Min\left(U^{\frac{2^{\lambda}}{2^{l+1}-2}},\, Y^{\frac{1}{2^{l-\lambda}}}\right) \leqq u_{\lambda} \leqq Y \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, l).$$

Deux cas sont à considérer:

α. Soit

$$U^{2^{l}} \leqq Y^{2^{l+1}-2}.$$

Je pose

$$u_{\lambda} = U^{\frac{2^{\lambda}}{2^{l+1}-2}},\ \text{donc} \leqq U^{\frac{2^{l}}{2^{l+1}-2}} \leqq Y \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, l).$$

Le produit $u_1 u_2 \ldots u_l$ est égal à U en vertu de ce que

$$\sum_{\lambda=1}^{l} 2^{\lambda} = 2^{l+1} - 2.$$

β. Soit

$$U^{2^{l}} > Y^{2^{l+1}} - 2.$$

J'appelle Λ le plus petit nombre entier $\geqq 0$ tel que

$$U^{2^{\Lambda+1}} > Y^{(l-\Lambda+1)2^{\Lambda+1}-2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (8)$$

Cette inégalité est verifiée si l'on remplace Λ par $l-1$, mais pas si l'on remplace Λ per zéro, car $U^2 \leqq Y^{2l}$. Donc $1 \leqq \Lambda \leqq l-1$ et

$$U^{2^\Lambda} \leqq Y^{(l-\Lambda+2)2^\Lambda-2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Si je pose

$$u_\lambda = (U\,Y^{\Lambda-l})^{\frac{2^\lambda}{2^{\Lambda+1}-2}} \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, \Lambda); \qquad u_\lambda = Y\,(\lambda = \Lambda+1, \ldots, l),$$

j'obtiens

$$u_1\,u_2\ldots u_l = (u_1\ldots u_\Lambda)\,(u_{\Lambda+1}\ldots u_l) = U\,Y^{\Lambda-l}\,.\,Y^{l-\Lambda} = U.$$

En vertu de (8),

$$U\,Y^{\Lambda-l} \geqq Y^{1-2^{-\Lambda}} \geqq 1,$$

de telle sorte que pour $\lambda = 1, 2, \ldots, \Lambda$, d'une part, en vertu de (9)

$$u_\lambda \leqq (U\,Y^{\Lambda-l})^{\frac{2^\Lambda}{2^{\Lambda+1}-2}} \leqq Y,$$

d'autre part

$$u_\lambda \geqq Y^{\frac{2^\lambda}{2^{\Lambda+1}}} \geqq Y^{\frac{1}{2^{l-\lambda}}}.$$

Enfin, pour $\lambda = \Lambda+1, \ldots, l$,

$$u_\lambda = Y \geqq Y^{\frac{1}{2^{l-\lambda}}}.$$

La seconde remarque est donc démontrée.

Après ces remarques préliminaires, énonçons le théorème suivant:

Si P est entier, k entier $\geqq 2$, X entier $> k$, $\varkappa = 2^k$, $r > 0$ et

$$\Delta^k f(x) \geqq r \qquad (x = P+1,\ P+2, \ldots,\ P+X-k),$$

alors, si

$$\varrho = \frac{\Delta^{k-1} f(P+X-k+1) - \Delta^{k-1} f(P+1)}{X-k},$$

on a

$$\left|\sum_{x=P+1}^{P+X} e^{2\pi i f(x)}\right| < 25\,X\,Max\left\{(\varrho^{-2}\,r)^{-\frac{1}{\varkappa-2}},\ (r\,X^k)^{-\frac{2}{\varkappa}},\ (\varrho^{-1}\,r\,X)^{-\frac{2}{\varkappa}}\right\}.$$

Ce théorème a été publié en 1929, mais la démonstration donnée ici est beaucoup plus simple que la première [1]). En 1931, M. TITCHMARSH [2]) a démontré, d'une manière simple, un théorème analogue, donnant, dans certains cas la même approximation, dans d'autres une moins bonne. Je reviendrai sur ce résultat de M. TITCHMARSH à la fin de ce paragraphe. La signification du théorème a été sensiblement diminuée par les recherches de M. VINOGRADOW [3]), qui a trouvé pour de grandes valeurs de k un résultat beaucoup plus serré, mais le théorème est encore important dans plusieurs domaines de la théorie analytique des nombres.

Il est vrai que la démonstration de 1929 fournit le théorème avec un autre coefficient au lieu de 25, mais comme on l'aura déjà remarqué, je n'attache pas beaucoup importance à ce que les facteurs constants entrant dans nos théorèmes puissent être rendus plus petits.

Pour démontrer le théorème, nous remarquons d'abord que pour $k=2$, il suit immédiatement du paragraphe précédent, qui nous apprend que le membre de gauche est inférieur à

$$9\, Max\left(r^{-\frac{1}{2}}, X\varrho\, r^{-\frac{1}{2}}\right) = 9\, X\, Max\left((r X^2)^{-\frac{2}{4}}, (\varrho^{-2} r)^{-\frac{1}{4-2}}\right).$$

Je peux donc supposer $k \geqq 3$. En vertu de l'inégalité fondamentale généralisée à une fonction d'une seule variable, appliquée avec $l=k-2$, pour tout système de nombres naturels $A_1, \ldots, A_l$ tels que $A_1 + \ldots + A_l \leqq X$,

$$X^{-1} \left| \sum_{x=P+1}^{P+X} e^{2\pi i f(x)} \right| < 5\, Max \left\{ A_1^{-\frac{1}{2}}, \ldots, A_l^{-\frac{1}{2^l}}, T^{\frac{1}{2^l}} \right\},$$

où

$$T = X^{-1} A_1^{-1} \ldots A_l^{-1} \sum_{a_1=1}^{A_1-1} \ldots \sum_{a_l=1}^{A_l-1} \left| \sum_{x=P+1}^{P+X-a_1-\ldots-a_l} e^{2\pi i f_{(a)}(x)} \right|.$$

Dans cette formule on a

$$\Delta^2 f_{(a)}(x) = \sum_{\alpha_1=0}^{a_1-1} \ldots \sum_{\alpha_l=0}^{a_l-1} \Delta^k f(x+\alpha_1+\ldots+\alpha_l) \geqq a_1\, a_2 \ldots a_l\, r$$

---

[1]) J. G. VAN DER CORPUT, Neue zahlentheoretische Abschätzungen II, Mathematische Zeitschrift, **29**, 397—426 (1929).

[2]) E. C. TITCHMARSH, On VAN DER CORPUT's method and the zeta-function of RIEMANN, Quart. J. Math. Oxford Ser., **2**, 161—173; 313—320 (1931); **3**, 133—141 (1932); **5**, 98—105 (1934); **6**, 106—112 (1935).

[3]) Voir les articles de M. VINOGRADOW depuis juillet 1935.

et

$$\triangle f_{(a)}(P+X-a_1-\ldots-a_l-1)-\triangle f_{(a)}(P+1)$$

$$=\sum_{\alpha_1=0}^{a_1-1}\ldots\sum_{\alpha_l=0}^{a_l-1}\{\Delta^{k-1}f(P+X-a_1-\ldots-a_l-1+\alpha_1+\ldots+\alpha_l)-$$

$$-\Delta^{k-1}f(P+1+\alpha_1+\ldots+\alpha_l)\}$$

$$\leqq\sum_{\alpha_1=0}^{a_1-1}\ldots\sum_{\alpha_l=0}^{a_l-1}\{\Delta^{k-1}f(P+X-k+1)-\Delta^{k-1}f(P+1)\}$$

(en vertu de ce que $\Delta^k f(x)>0$)

$$<a_1\,a_2\ldots a_l\,\varrho\,X.$$

Le paragraphe précédent nous apprend donc que

$$\left|\sum_{x=P+1}^{P+X-a_1-\ldots-a_l} e^{2\pi i f_{(a)}(x)}\right|<\frac{3}{\sqrt{r}}\left(\frac{2}{\sqrt{a_1a_2\ldots a_l}}+\varrho\,X\sqrt{a_1a_2\ldots a_l}\right),$$

de telle sorte que de

$$\sum_{a=1}^{A-1}\frac{1}{\sqrt{a}}\leqq\int_0^{A-1}\frac{du}{\sqrt{u}}=2\sqrt{A-1}<\frac{2A}{\sqrt{A+1}}$$

et de

$$\sum_{a=1}^{A-1}\sqrt{a}<A^{\frac{3}{2}}$$

suit

$$T<\frac{3}{\sqrt{r}}\left(\frac{2^{l+1}X^{-1}}{\sqrt{(A_1+1)\ldots(A_l+1)}}+\varrho\sqrt{A_1\ldots A_l}\right)$$

$$<\frac{6}{\sqrt{r}}\,Max\left(\frac{2^{l+1}X^{-1}}{\sqrt{(A_1+1)\ldots(A_l+1)}},\ \varrho\sqrt{A_1\ldots A_l}\right).$$

Donc

$$X^{-1}\left|\sum_{x=P+1}^{P+X}e^{2\pi i f(x)}\right|<$$

$$5\sqrt{2}\,Max\left\{(A_1+1)^{-\frac{1}{2}},\ldots,(A_l+1)^{-\frac{1}{2^l}},M((A_1+1)\ldots(A_l+1))^{-\frac{2}{\varkappa}},N(A_1\ldots A_l)^{\frac{2}{\varkappa}}\right\},$$

où

$$M\sqrt{2}=(6^2\,2^{2l+2}X^{-2}r^{-1})^{\frac{2}{\varkappa}}\quad\text{et}\quad N\sqrt{2}=(6^2\,\varrho^2\,r^{-1})^{\frac{2}{\varkappa}};$$

l'inégalité vaut pour tout système de nombres naturels $A_1,\ldots,A_l$ tels que $A_1+\ldots+A_l\leqq X$.

Je dis que pour tout système de nombres positifs $u_1, \ldots, u_l$ tels que $u_1 + \ldots + u_l \leqq X$,

$$X^{-1} \left| \sum_{x=P+1}^{P+X} e^{2\pi i f(x)} \right|$$

$$< 5\sqrt{2}\, Max\left(u_1^{-\frac{1}{2}}, \ldots, u_l^{-\frac{1}{2^l}}, M(u_1 \ldots u_l)^{-\frac{2}{\varkappa}}, N(u_1 \ldots u_l)^{\frac{2}{\varkappa}}\right).$$

Si un au moins des nombres $u_1, \ldots, u_l$ est $\leqq 1$, alors, le membre de droite est $\geqq 5\sqrt{2}$ et l'inégalité est évidente; si tous les nombres $u_1, \ldots, u_l$ sont supérieurs à 1, alors l'inégalité considérée suit immédiatement de la précédente en choisissant pour valeur de A_λ le plus grand nombre entier $\leqq u_\lambda$ $(\lambda = 1, 2, \ldots, l)$.

Posons $u_1 u_2 \ldots u_l = U$ et choisissons U tel que $1 \leqq U \leqq \left(\frac{X}{l}\right)^l$. En vertu de la seconde remarque, nous pouvons choisir, si U est donné, les nombres $u_1, \ldots, u_l$, de telle façon que pour $\lambda = 1, 2, \ldots, l$

$$Min\left(U^{\frac{2^\lambda}{2^{l+1}-2}}, \left(\frac{X}{l}\right)^{\frac{1}{2^{l-\lambda}}}\right) \leqq u_\lambda \leqq \frac{X}{l},$$

d'où il suit aussi que $u_1 + u_2 + \ldots + u_l \leqq X$. Nous obtenons ainsi l'inégalité

$$u_\lambda^{-\frac{1}{2^\lambda}} \leqq Max\left(U^{-\frac{2}{\varkappa-4}}, \left(\frac{X}{l}\right)^{-\frac{4}{\varkappa}}\right).$$

Donc

$$X^{-1} \left| \sum_{x=P+1}^{P+X} e^{2\pi i f(x)} \right| < 5\sqrt{2}\, Max\left(\left(\frac{X}{l}\right)^{-\frac{4}{\varkappa}}, U^{-\frac{2}{\varkappa-4}}, MU^{-\frac{2}{\varkappa}}, NU^{\frac{2}{\varkappa}}\right),$$

cette inégalité valant pour tout nombre U tel que $1 \leqq U \leqq \left(\frac{X}{l}\right)^l$. Mais cette inégalité est évidente si $0 < U < 1$; elle est donc valable, quelque soit le nombre positif $U \leqq \left(\frac{X}{l}\right)^l$.

La première remarque de ce paragraphe nous apprend alors que nous pouvons choisir le nombre positif $U \leqq \left(\frac{X}{l}\right)^l$ de telle façon que

$$X^{-1} \left| \sum_{x=P+1}^{P+X} e^{2\pi i f(x)} \right|$$

$$< 5\sqrt{2}\, Max\left\{\left(\frac{X}{l}\right)^{-\frac{4}{\varkappa}}, \left(\frac{X}{l}\right)^{-\frac{2l}{\varkappa-4}}, M\left(\frac{X}{l}\right)^{-\frac{2l}{\varkappa}}, M^{\frac{1}{2}} N^{\frac{1}{2}}, N^{\frac{\varkappa}{2\varkappa-4}}\right\}.$$

De la définition des nombres r et ϱ il suit que ϱ est $\geqq r$. On a

$$5\sqrt{2}\left(\frac{X}{l}\right)^{-\frac{2l}{\varkappa-4}} \leqq 5\sqrt{2}\left(\frac{X}{l}\right)^{-\frac{4}{\varkappa}} \leqq 5\sqrt{2}\left(\frac{X}{l}\right)^{-\frac{2}{\varkappa}} < 25\, X^{-\frac{2}{\varkappa}} \leqq 25\,(\varrho^{-1}\, r\, X)^{-\frac{2}{\varkappa}},$$

$$5\sqrt{2}\, M\left(\frac{X}{l}\right)^{-\frac{2\,l}{\varkappa}} = 5\,(6^2\, 2^{2l+2}\, l^l)^{\frac{2}{\varkappa}}\, (X^{-k}\, r^{-1})^{\frac{2}{\varkappa}} < 25\,(X^k\, r^{\cdot})^{-\frac{2}{\varkappa}},$$

$$5\sqrt{2}\, M^{\frac{1}{2}}\, N^{\frac{1}{2}} = 5\,(6^4\, 2^{2l+2})^{\frac{1}{\varkappa}}\, (X^{-2}\, r^{-2}\, \varrho^2)^{\frac{1}{\varkappa}} < 25\,(\varrho^{-1}\, r\, X)^{-\frac{2}{\varkappa}}$$

et finalement

$$5\sqrt{2}\, N^{\frac{\varkappa}{2\varkappa-4}} < 5\sqrt{2}\,.\, 6^{\frac{4}{2\varkappa-4}}\, (\varrho^2\, r^{-1})^{\frac{2}{2\varkappa-4}} < 25\,(\varrho^{-2}\, r)^{-\frac{1}{\varkappa-2}},$$

ce qui achève de démontrer l'inégalité annoncée.

Je reviens maintenant au théorème de TITCHMARSH, dont j'ai déjà parlé plus haut. M. TITCHMARSH démontre, sous les conditions déjà citées (le fait qu'il travaille avec les dérivées plutôt qu'avec les fonctions-differences n'a pas grande importance), qu'il existe deux nombres c_{14} et α $(0 < \alpha < 1)$, dépendant uniquement de k, tels que

$$\left|\sum_{x=P+1}^{P+X} e^{2\pi i f(x)}\right| < c_{14}\, X\, Max \left\{ (\varrho^{-2}\, r)^{-\frac{1}{\varkappa-2}},\, X^{-\frac{4}{\varkappa}}\, \varrho^{\alpha}\, r^{-\alpha-\frac{1}{\varkappa-2}} \right\}.$$

Il ajoute: "We do not give the actuel value of α because it cannot be expressed in a very simple form, and because, in the applications, $\varrho = O(r)$ and the terms involving α cancel". Il veut dire par là que si $\varrho \leqq p\, r$, il suit de l'inégalité écrite plus haut, que

$$\left|\sum_{x=P+1}^{P+X} e^{2\pi i f(x)}\right| < c_{15}\, X\, Max \left(r^{\frac{1}{\varkappa-2}},\, X^{-\frac{4}{\varkappa}}\, r^{-\frac{1}{\varkappa-2}} \right), \quad . \; . \; . \quad (10)$$

où c_{15} désigne un nombre dépendant uniquement de k et de p.

Le théorème démontré dans ce paragraphe donne, sous la condition supplémentaire $\varrho \leqq p\, r$

$$\left|\sum_{x=P+1}^{P+X} e^{2\pi i f(x)}\right| < c_{16}\, X\, Max \left(r^{\frac{1}{\varkappa-2}},\, (r\, X^k)^{-\frac{2}{\varkappa}},\, X^{-\frac{2}{\varkappa}} \right), \quad . \; . \; . \quad (11)$$

où c_{16} dépend seulement de p.

Je vais démontrer maintenant que cette dernière inégalité contient le résultat donné par M. TITCHMARSH.

De

$$\left\{ r^{\frac{1}{\varkappa-2}}\,.\, X^{-\frac{4}{\varkappa}}\, r^{-\frac{1}{\varkappa-2}} \right\}^{\frac{1}{2}} = X^{-\frac{2}{\varkappa}},$$

suit que

$$Max \left\{ r^{\frac{1}{\varkappa-2}},\, X^{-\frac{4}{\varkappa}}\, r^{-\frac{1}{\varkappa-2}} \right\} \geqq X^{-\frac{2}{\varkappa}} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (12)$$

De plus

$$\left\{ r^{\frac{k\varkappa-4\varkappa+8}{\varkappa-2}} \left(X^{-\frac{4}{\varkappa}} r^{-\frac{1}{\varkappa-2}} \right)^{k\varkappa} \right\}^{\frac{1}{(k\varkappa-4\varkappa+8)+k\varkappa}} = (r\,X^k)^{-\frac{4}{2k\varkappa-4\varkappa+8}} \quad . \quad (13)$$

Si l'inégalité (10) trouvée par M. TITCHMARSH n'est pas triviale, $r^{\frac{1}{\varkappa-2}}$ et $X^{-\frac{4}{\varkappa}} r^{-\frac{1}{\varkappa-2}}$ ont des valeurs < 1, de telle sorte que de (13) suit qui $r X^k > 1$, et que le membre de droite de (13) est certainement supérieur à $(r X^k)^{-\frac{2}{\varkappa}}$. La formule (13) donne donc

$$\left.\begin{aligned} Max \left\{ r^{\frac{1}{\varkappa-2}}, X^{-\frac{4}{\varkappa}} r^{-\frac{1}{\varkappa-2}} \right\} &\geqq (r\,X^k)^{-\frac{4}{2k\varkappa-4\varkappa+8}} \\ &> (r\,X^k)^{-\frac{2}{\varkappa}} . \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

Les formules (12) et (14) nous apprennent que l'inégalité (11), démontrée dans ce paragraphe, contient la formule (10) de M. TITCHMARSH. La formule de TITCHMARSH ne peut donc jamais donner de résultats meilleurs que ceux que nous avons trouvés. Les deux formules considérées donnent la même approximation dans les problèmes où le terme $r^{\frac{1}{\varkappa-2}}$ l'emporte, mais il y a des problèmes où notre formule donne un résultat meilleur que celui donné par M. TITCHMARSH. Aussi n'est-il pas possible alors de déduire directement la formule (11) de la formule (10).

Mathematics. — *Sur deux, trois ou quatre nombres premiers.* Par J. G. VAN DER CORPUT. (Première communication.)

(Communicated at the meeting of November 27, 1937.)

Considérons les huit expressions

$$f_1 = p_1 + p_2; \quad f_2 = p_1 + p_2^2 + p_3^2; \quad f_3 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2; \quad f_4 = p_1 - p_2;$$

$$f_5 = p_1 - p_2^2 - p_3^2; \quad f_6 = p_1 + p_2^2 - p_3^2; \quad f_7 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 - p_4^2; \quad f_8 = p_1^2 + p_2^2 - p_3^2 - p_4^2,$$

où p_1, p_2, p_3 et p_4 désignent des nombres premiers > 3. A chacune de ces expressions correspond une congruence, que j'appellerai la congruence correspondante, notamment

$$\begin{array}{lll} t \equiv 0 & (mod.\ 2) & \text{pour } f_1 \text{ et } f_4; \\ \equiv 1 \text{ ou } 3 & (mod.\ 6) & \text{pour } f_2; \\ \equiv 4 & (mod.\ 24) & \text{pour } f_3; \\ \equiv 3 \text{ ou } 5 & (mod.\ 6) & \text{pour } f_5; \\ \equiv 1 \text{ ou } 5 & (mod.\ 6) & \text{pour } f_6; \\ \equiv 2 & (mod.\ 24) & \text{pour } f_7; \\ \equiv 0 & (mod.\ 24) & \text{pour } f_8. \end{array}$$