De plus

$$\left\{ r^{\frac{k\varkappa-4\varkappa+8}{\varkappa-2}} \left(X^{-\frac{4}{\varkappa}}\, r^{-\frac{1}{\varkappa-2}}\right)^{k\varkappa} \right\}^{\frac{1}{(k\varkappa-4\varkappa+8)+k\varkappa}} = (r\,X^k)^{-\frac{4}{2k\varkappa-4\varkappa+8}} \quad . \tag{13}$$

Si l'inégalité (10) trouvée par M. TITCHMARSH n'est pas triviale, $r^{\frac{1}{\varkappa-2}}$ et $X^{-\frac{4}{\varkappa}}\, r^{-\frac{1}{\varkappa-2}}$ ont des valeurs < 1, de telle sorte que de (13) suit qui $r X^k > 1$, et que le membre de droite de (13) est certainement supérieur à $(r X^k)^{-\frac{2}{\varkappa}}$. La formule (13) donne donc

$$\left.\begin{aligned} Max \left\{ r^{\frac{1}{\varkappa-2}}, X^{-\frac{4}{\varkappa}}\, r^{-\frac{1}{\varkappa-2}} \right\} &\geqq (r\,X^k)^{-\frac{4}{2k\varkappa-4\varkappa+8}} \\ &> (r\,X^k)^{-\frac{2}{\varkappa}} . \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \tag{14}$$

Les formules (12) et (14) nous apprennent que l'inégalité (11), démontrée dans ce paragraphe, contient la formule (10) de M. TITCHMARSH. La formule de TITCHMARSH ne peut donc jamais donner de résultats meilleurs que ceux que nous avons trouvés. Les deux formules considérées donnent la même approximation dans les problèmes où le terme $r^{\frac{1}{\varkappa-2}}$ l'emporte, mais il y a des problèmes où notre formule donne un résultat meilleur que celui donné par M. TITCHMARSH. Aussi n'est-il pas possible alors de déduire directement la formule (11) de la formule (10).

Mathematics. — *Sur deux, trois ou quatre nombres premiers.* Par J. G. VAN DER CORPUT. (Première communication.)

(Communicated at the meeting of November 27, 1937.)

Considérons les huit expressions

$$f_1 = p_1 + p_2;\quad f_2 = p_1 + p_2^2 + p_3^2;\quad f_3 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2;\quad f_4 = p_1 - p_2;$$

$$f_5 = p_1 - p_2^2 - p_3^2;\quad f_6 = p_1 + p_2^2 - p_3^2;\quad f_7 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 - p_4^2;\quad f_8 = p_1^2 + p_2^2 - p_3^2 - p_4^2,$$

où p_1, p_2, p_3 et p_4 désignent des nombres premiers > 3. A chacune de ces expressions correspond une congruence, que j'appellerai la congruence correspondante, notamment

$$\begin{aligned} t &\equiv 0 && (mod.\ 2) && \text{pour } f_1 \text{ et } f_4; \\ &\equiv 1 \text{ ou } 3 && (mod.\ 6) && \text{pour } f_2; \\ &\equiv 4 && (mod.\ 24) && \text{pour } f_3; \\ &\equiv 3 \text{ ou } 5 && (mod.\ 6) && \text{pour } f_5; \\ &\equiv 1 \text{ ou } 5 && (mod.\ 6) && \text{pour } f_6; \\ &\equiv 2 && (mod.\ 24) && \text{pour } f_7; \\ &\equiv 0 && (mod.\ 24) && \text{pour } f_8. \end{aligned}$$

En effet, tout nombre t qui peut être mis sous la forme f_λ, satisfait à la congruence correspondante.

Chacune des expressions f_1, f_2 et f_3 possède, comme je démontrerai, la propriété suivante: presque tout nombre naturel qui satisfait à la congruence correspondante, peut être mis sous la forme f_λ, c'est-à-dire: ε désignant un nombre positif quelconque et Z un nombre suffisamment grand, le nombre des exceptions $\leqq Z$ est inférieur à εZ.

Chacune des cinq expressions $f_4, \ldots, f_8$ possède la propriété suivante: presque tout nombre qui satisfait à la congruance correspondante, peut être mis sous la forme f_λ, c'est-à-dire: ε étant positif et Z suffisamment grand, le nombre des exceptions qui sont en valeur absolue $\leqq Z$, est inférieur à εZ.

Je démontrerai même qu'à tout nombre naturel m correspond une constante c_1, dépendant uniquement de m, telle que chacune des expressions f_1, f_2 et f_3 possède la propriété suivante: pour tout nombre $Z > 3$ le nombre des nombres naturels $\leqq Z$ qui satisfont à la congruence correspondante et qui ne peuvent pas être mis sous la forme f_λ, est inférieur à $c_1 Z z^{-m}$; partout dans cet article $z = \log Z$. A tout nombre naturel m correspond une constante c_2, dépendant uniquement de m, telle que chacune des expressions f_4, f_5, f_6, f_7 et f_8 possède la propriété suivante: pour tout nombre $Z > 3$ le nombre des nombres entiers qui sont en valeur absolue $\leqq Z$, qui remplissent la congruence correspondante et qui ne peuvent pas être mis sous la forme f_λ, est inférieur à $c_2 Z z^{-m}$.

Le but principal de cet article est de démontrer le théorème qui suit:

Proposition 1: *Soit $\gamma > 0$; m entier > 0; soit $\psi(x)$ un polynôme du degré précis $g \geqq 1$, qui prend des valeurs entières pour toute valeur entière de x; soit $Z > 3$ et s entier, tels que $|s| \leqq \gamma Z^g z^\gamma$.*

Sous ces conditions il existe une constante c_3, dépendant uniquement de γ, m et du choix du polynôme $\psi(x)$, telle que les expressions f_1, f_2 et f_3 jouissent de la propriété suivante: Si $\psi(x) + s$ est positif pour tout nombre naturel $x \leqq Z$, et si $\psi(x) + s$ remplit la congruence correspondante pour toute valeur entière de x, alors le nombre des nombres naturels $z \leqq Z$ pour lesquels $\psi(x) + s$ ne peut pas être mis sous la forme f_λ, est inférieur à $c_3 Z z^{-m}$.

En outre sous les conditions de la proposition il existe une constante c_4, dépendant uniquement de γ, m et du choix du polynôme $\psi(x)$, telle que les expressions f_4, f_5, f_6, f_7 et f_8 jouissent de la propriété suivante: Si $\psi(x) + s$ remplit la congruence correspondante pour toute valeur entière de x, alors le nombre des nombres entiers qui sont en valeur absolue $\leqq Z$ et pour lesquels $\psi(x) + s$ ne peut pas être mis sous la forme f_λ, est inférieur à $c_4 Z z^{-m}$.

Cette proposition contient la suivante, dans laquelle $\Psi(x)$ désigne un polynôme non-constant du degré g à coefficients rationnels, et u un nombre entier qui est premier avec $g!$ et avec $24\,U$, où U est un nombre naturel donné.

Chacune des expressions $f_4, \ldots, f_8$ et en outre, si le terme du degré le plus élevé dans $\Psi(x)$ a un coefficient négatif, chacune des expressions f_1, f_2 et f_3, possède la propriété suivante: tout nombre s, tel que $s - \Psi(u)$ satisfait à la congruence correspondante, peut être mis, même d'une infinité de manières différentes, sous la forme $f_\lambda + \Psi(p_5)$, où p_5 désigne un nombre premier > 3, qui est congru à u pour le module U.

Si le terme du degré le plus élevé dans $\Psi(x)$ a un coefficient positif, chacune des expressions f_1, f_2 et f_3 possède la propriété suivante: tout nombre naturel s, suffisamment grand, tel que $s - \Psi(u)$ satisfait à la congruence correspondante, peut être mis sous la forme $f_\lambda + \Psi(p_5)$, où le nombre premier $p_5 > 3$ est congru à u pour le module U.

En effet, soit V le plus petit commun multiple de U et $g!\,24$. Le nombre u étant premier avec $24\,U$ et $g!$, est premier avec V. Puisque V est divisible par $g!\,24$, le nombre

$$s - \Psi(u + x\,V) \equiv s - \Psi(u) \qquad (mod.\ 24)$$

remplit pour tout nombre entier x la congruence correspondante.

Considérons d'abord les expressions $f_4, \ldots, f_8$ et posons

$$\psi(x) = \Psi(u + x\,V).$$

Le nombre des nombres naturels $x \leqq Z$ tels que $u + x\,V$ est un nombre premier $p_5 > 3$, a l'ordre de grandeur $\frac{Z}{z}$. La première proposition nous apprend donc, que le nombre des nombres naturels $x \leqq Z$ tels que $u + x\,V$ est un nombre premier $p_5 > 3$ et que $s + \psi(x)$ peut être mis sous la forme f_λ, croît indéfiniment avec Z, et chacun de ces x nous fournit une représentation $s = f_\lambda + \Psi(p_5)$, ou $p_5 - u$ est divisible par V, donc par U.

Traitons ensuite les expressions f_1, f_2 et f_3, en supposant d'abord que le terme du degré le plus élevé dans $\Psi(x)$ ait un coefficient négatif. Nous pouvons trouver un nombre entier x_0 tel que $s - \Psi(u + x_0\,V + x\,V)$ soit positif pour tout nombre naturel x. En posant $\psi(x) = -\Psi(u + x_0\,V + x\,V)$, nous trouvons de la même manière que le nombre des nombres naturels $x \leqq Z$ tels que $u + x_0\,V + x\,V$ soit un nombre premiers $p_5 > 3$ et que $s + \psi(x)$ peut être mis sous la forme f_λ, croît avec Z au delà de toute limite.

Traitons finalement les expressions f_1, f_2 et f_3 en supposant que le terme du degré le plus élevé dans $\Psi(x)$ soit positif. Posons $\psi(x)$ égal à $-\Psi(u + x\,V)$, et Z égal au plus petit nombre entier $\geqq 0$, tel que $s + \psi(x)$ soit positif pour tout nombre naturel $x \leqq Z$; par conséquent Z dépend de s et croît indéfiniment avec s. Le nombre des nombres naturels $x \leqq Z$ tels que $u + x\,V$ soit un nombre premier $p_5 > 3$, a l'ordre de grandeur $\frac{Z}{z}$. Par conséquent, lorsque s est suffisamment grand, parmi ces nombres x figure au moins un pour lequel $s + \psi(x)$ peut être mis sous la forme f_λ, de telle sorte que $s = f_\lambda + \Psi(p_5)$.

Il est superflu de faire remarquer que la dernière proposition contient comme cas spéciaux les résultats dûs à M. I. M. VINOGRADOFF [1]), que tout nombre impair suffisamment grand, est la somme de trois nombres premiers, et que tout nombre suffisamment grand, qui est congru à 5 pour le module 24, est la somme des carrés de cinq nombres premiers.

Dans la dernière de ces communications je déduirai une formule approximative, valable pour presque tout entier t, indiquant de combien de manières différentes t peut être mis sous chacune des formes f_λ, les nombres premiers $p_1, p_2, \ldots$ étant situés dans des intervalles donnés.

Je ferai usage de deux propositions auxiliaires, dont les démonstrations paraîtront bientôt, respectivement dans les Acta Arithmetica [2]) (Sur le théoreme de GOLDBACH pour presque tous les nombres pairs) et les Mathematische Annalen (Ueber Summen von Primzahlen).

Lemme 1: *Je considère une suite de nombres positifs*

$$(\gamma) \ldots . \gamma_1, \gamma_2, \ldots$$

et une suite de nombres naturels

$$(\eta) \ldots . \eta_1, \eta_2, \ldots$$

Soient V, V' et X trois intervalles, dont chacun contient au moins un nombre entier. Les sommes $\sum\limits_v$, $\sum\limits_{v'}$ et $\sum\limits_x$ sont étendues à tous les nombres entiers situés respectivement dans V, V' et X; la somme $\sum\limits_{v+v'+t}$ est étendue à toutes les paires de nombres entiers v et v', telles que v appartienne à V, que v' appartienne à V' et que la somme $v + v'$ soit égale au nombre donné t.

Soient $r(v)$, $\varrho(v)$, $r'(v')$, $\varrho'(v')$, $f(x)$ définis pour tout nombre entier v de V, pour tout nombre entier v' de V et pour tout nombre x de X; je suppose que $f(x)$ soit toujours égal à un nombre entier.

Je me pose le problème de trouver pour la somme

$$L(f(x)) = \sum_{v+v'=f(x)} r(v)\, r'(v') \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

une valeur approximative, valable pour beaucoup de nombres entiers x de X. A un facteur près, cette valeur approximative sera égale à

$$\Lambda(f(x)) = \sum_{v+v'=f(x)} \varrho(v)\, \varrho'(v') \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

J'impose trois conditions:

1. *Soit $N \geqq 3$; $n = \log N$; chacun des intervalles V et V' ait une*

---

[1]) Representation of an odd number as a sum of three primes, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de l'URSS, **15**, N⁰. 6—7, 169—172 (1937).

Some theorems concerning the theory of primes. Recueil mathématique **2** (42), N⁰. 2, 179—195 (1937).

[2]) Dans le théorème qui paraîtra bientôt dans les Acta Arithmetica, je pose $w(t)$ égal au nombre des nombres entiers x situés dans X et tels que $f(x) = t$.

longueur $\leqq N$. *Dans l'intervalle* V *la fonction* $\varrho(v)$ *soit monotone et en valeur absolue* $\leqq \Gamma$, *où* Γ *est indépendant de* v. *Dans l'intervalle* V' *la fonction* $\varrho'(v')$ *soit monotone et en valeur absolue* $\leqq \Gamma'$, *où* Γ' *est indépendant de* v'. *Supposons en outre*

$$\sum_v |r(v)|^2 \leqq \Gamma^2 N; \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

$$\sum_{v'} |r'(v)|^2 \leqq \Gamma'^2 N \quad \ldots \ldots \quad (4)$$

2. *A tout nombre naturel* q *et à tout nombre naturel* $k \leqq q$ *correspondent deux nombres* $\chi(q, k)$ *et* $\chi'(q, k)$ *tels qu'on ait*

$$|\chi(q, k)| \leqq \gamma_1 q^l; \qquad |\chi'(q, k)| \leqq \gamma_1 q^l, \quad \ldots \ldots \quad (5)$$

$$\Bigl| \sum_{\substack{v \leqq u \\ v \equiv k \,(\mathrm{mod.}\, q)}} r(v) - \chi(q, k) \sum_{v \leqq u} \varrho(v) \Bigr| \leqq \gamma_m \Gamma N q^l n^{-m}. \quad \ldots \quad (6)$$

et

$$\Bigl| \sum_{\substack{v' \leqq u' \\ v' \equiv k \,(\mathrm{mod.}\, q)}} r'(v') - \chi'(q, k) \sum_{v' \leqq u'} \varrho'(v') \Bigr| \leqq \gamma_m \Gamma' N q^l n^{-m}, \quad \ldots \quad (7)$$

valables pour tout nombre naturel m, *pour tout nombre* u *de* V *et pour tout nombre* u' *de* V'; *dans ces inégalités* l *désigne un nombre* $\geqq 0$, *indépendant de* m, q, k, u *et* u'.

3. *Pour tout nombre naturel* m *et pour tout nombre réel* α, *tels que l'intervalle fermé* $(\alpha - N^{-1} n^{\eta_m}, \alpha + N^{-1} n^{\eta_m})$ *ne contienne aucune fraction à dénominateur positif* $\leqq n^{\eta_m}$, *on ait*

$$\Bigl| \sum_x e^{2\pi i \alpha f(x)} \Bigr| \leqq \gamma_m n^{-m} \sum_x 1 \quad \ldots \ldots \quad (8)$$

et

$$\Bigl| \sum_v r(v) e^{2\pi i \alpha v} \Bigr| \leqq \gamma_m \Gamma N n^{-m} \quad \ldots \ldots \quad (9)$$

Sous ces conditions à tout nombre naturel m *correspondent un nombre naturel* $\sigma \geqq m$, *dépendant uniquement de* m *et de la suite* (η), *et un nombre positif* c_5, *ne dépendant que de* m, l *et des suites* (γ) *et* (η), *tels que*

$$\sum_x \Bigl| L(f(x)) - \Lambda(f(x)) \sum_{\frac{a}{q}} E\left(\frac{a}{q}\right) E'\left(\frac{a}{q}\right) e^{-\frac{2\pi i a f(x)}{q}} \Bigr|^2 \leqq c_5 \Gamma^2 \Gamma'^2 N^2 n^{-m} \sum_x 1, \quad (10)$$

où

$$E\left(\frac{a}{q}\right) = \sum_{k=1}^{q} e^{\frac{2\pi i a k}{q}} \chi(q, k) \quad \textit{et} \quad E'\left(\frac{a}{q}\right) = \sum_{k=1}^{q} e^{\frac{2\pi i a k}{q}} \chi'(q, k); \quad \ldots \quad (11)$$

$\sum_{\frac{a}{q}}$ *est étendu à toutes les fractions irréductibles* $\frac{a}{q}$ *telles que* $0 \leqq a < q \leqq n^{\tau}$.

Lemme 2: *Si* $\psi(x)$ *est un polynôme du degré précis* g *qui prend des* *valeurs entières pour toute valeur entière de x, alors à tout nombre naturel m correspondent un nombre naturel η et un nombre positif c_6 qui ne dépendent que de m et du choix du polynôme $\psi(x)$ et qui possèdent la propriété suivante: pour tout nombre $Z > 3$ et pour tout nombre réel α, tels que l'intervalle fermé $(\alpha - Z^{-g} z^{\eta},\ \alpha + Z^{-g} z^{\eta})$ ne contienne aucune fraction à dénominateur positif $\leqq z^{\eta}$, on a*

$$\Big| \sum_{x \leqq Z} e^{2\pi i \alpha \psi(x)} \Big| < c_6 Z z^{-m};$$

Σ est étendu à tous les nombres entiers x qui sont en valeurs absolues $\leqq Z$.

Mathematics. — *Ueber Trivektoren.* III. Von R. WEITZENBÖCK.

(Communicated at the meeting of November 27, 1937.)

§ 6. *Die Typen B bei $n = 6$.*

Bei $n = 6$ haben wir zunächst nach Gleichung (27) die 36 Syzygien erster Art

$$A_\lambda^\mu = A^\mu A_\lambda = \tfrac{1}{6}(a^3 b^2)^\mu b_\lambda = (a' b)^2 a'^\mu b_\lambda = 0, \quad . \quad . \quad . \quad (55)$$

die durch eine Gleichung

$$A_\lambda^\lambda = \sum_{\lambda=1}^{6} A_\lambda^\lambda = \tfrac{1}{6}(a^3 b^3) \equiv 0 \qquad \{a_{ijk}\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (56)$$

verbunden sind, sodass sich nur $36 - 1 = 35$ *irreduzible* Syzygien ergeben.

Die Reduktionsformel (5a), die $(a' b)$ auf $(a' b)^2$ umformt, lautet hier wie folgt:

$$\left.\begin{aligned} &4(a' b)(a' x)(a' y)(b u')(b v') = \\ &\quad = (a' b)^2 (a' y)(b v')(u' x) + (a' b)^2 (a' x)(b u')(v' y) - \\ &\quad - (a' b)^2 (a' x)(b v')(u' y) - (a' b)^2 (a' y)(b u')(v' x) \end{aligned}\right\} . \quad (57a)$$

oder, wenn wir rechts nach (55) die Grössen A_λ^μ einführen:

$$\left.\begin{aligned} 4(a' b)(a' x)(a' y)(b u')(b v') &= A_\lambda^\mu y_\mu v^\lambda (u' x) + A_\lambda^\mu x_\mu u^\lambda (v' y) - \\ &- A_\lambda^\mu x_\mu v^\lambda (u' y) - A_\lambda^\mu y_\mu u^\lambda (v' x). \end{aligned}\right\} . \quad (57b)$$

In Tensorschreibweise wird dies, wenn x, y, u und v jetzt Indizes bezeichnen:

$$4\, a^{ixy} b_{iuv} = A_v^y \delta_u^x + A_u^x \delta_v^y - A_v^x \delta_u^y - A_u^y \delta_v^x \quad . \quad . \quad . \quad (57c)$$