valeurs entières pour toute valeur entière de x, alors à tout nombre naturel m correspondent un nombre naturel η et un nombre positif c_6 qui ne dépendent que de m et du choix du polynôme $\psi(x)$ et qui possèdent la propriété suivante: pour tout nombre $Z > 3$ et pour tout nombre réel α, tels que l'intervalle fermé $(\alpha - Z^{-g} z^{\eta}, \alpha + Z^{-g} z^{\eta})$ ne contienne aucune fraction à dénominateur positif $\leqq z^{\eta}$, on a

$$\left| \sum_{x \leqq Z} e^{2\pi i \alpha \psi(x)} \right| < c_6 Z z^{-m};$$

Σ est étendu à tous les nombres entiers x qui sont en valeurs absolues $\leqq Z$.

Mathematics. — *Ueber Trivektoren.* III. Von R. WEITZENBÖCK.

(Communicated at the meeting of November 27, 1937.)

§ 6. *Die Typen B bei $n = 6$.*

Bei $n = 6$ haben wir zunächst nach Gleichung (27) die 36 Syzygien erster Art

$$A_\lambda^\mu = A^\mu A_\lambda = \tfrac{1}{6} (a^3 b^2)^\mu b_\lambda = (a' b)^2 a'^\mu b_\lambda = 0, \quad . \quad . \quad . \quad (55)$$

die durch eine Gleichung

$$A_\lambda^\lambda = \sum_{\lambda=1}^{6} A_\lambda^\lambda = \tfrac{1}{6} (a^3 b^3) \equiv 0 \qquad \{a_{ijk}\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (56)$$

verbunden sind, sodass sich nur $36 - 1 = 35$ *irreduzible* Syzygien ergeben.

Die Reduktionsformel (5a), die $(a' b)$ auf $(a' b)^2$ umformt, lautet hier wie folgt:

$$\left.\begin{aligned} &4 (a' b) (a' x) (a' y) (b u') (b v') = \\ &\quad = (a' b)^2 (a' y) (b v') (u' x) + (a' b)^2 (a' x) (b u') (v' y) - \\ &\quad - (a' b)^2 (a' x) (b v') (u' y) - (a' b)^2 (a' y) (b u') (v' x) \end{aligned}\right\} . \quad (57a)$$

oder, wenn wir rechts nach (55) die Grössen A_λ^μ einführen:

$$\left.\begin{aligned} 4 (a' b) (a' x) (a' y) (b u') (b v') &= A_\lambda^\mu y_\mu v^\lambda (u' x) + A_\lambda^\mu x_\mu u^\lambda (v' y) - \\ &- A_\lambda^\mu x_\mu v^\lambda (u' y) - A_\lambda^\mu y_\mu u^\lambda (v' x). \end{aligned}\right\} . \quad (57b)$$

In Tensorschreibweise wird dies, wenn x, y, u und v jetzt Indizes bezeichnen:

$$4\, a^{ixy} b_{iuv} = A_v^y \delta_u^x + A_u^x \delta_v^y - A_v^x \delta_u^y - A_u^y \delta_v^x \quad . \quad . \quad . \quad (57c)$$

Bei den Syzygien zweiter Art haben wir nach den letzten zwei Paragraphen vorerst mit den Typen B und C zu tun. Beim Typus B ist nach (34) gesetzt

$$B_{u,vw} = 2P_{u,vw} + P_{v,uw} + P_{w,vu}, \quad \ldots\ldots \quad (58)$$

wobei nach (31) die Ausdrücke P gegeben sind durch

$$P_{u,vw} = A_u^\varrho c_{\varrho vw} = \tfrac{1}{6}(a^3 b^2 c)(bu')(cv')(cw'). \quad \ldots \quad (59)$$

Setzen wir die Ausdrücke (59) in (58) ein, so entsteht

$$\left.\begin{aligned} B_{u,vw} &= 2A_u^\mu c_{\mu vw} + A_v^\mu c_{\mu uw} + A_w^\mu c_{\mu vu} \\ B_{u,vw} &= A_\lambda^\mu (2\delta_u^\lambda c_{\mu vw} + \delta_v^\lambda c_{\mu uw} + \delta_w^\lambda c_{\mu vu}). \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (60)$$

Um alle linearen Abhängigkeiten zwischen den $B_{u,vw}$ zu ermitteln, multiplizieren wir (60) mit unbestimmten, konstanten Koeffizienten $M^{u,vw}$, die so wie die B bezüglich v und w alternierend sind und addieren über u, v und w. Es entsteht

$$B_{u,vw} M^{u,vw} = A_\lambda^\mu (2c_{\mu vw} M^{\lambda,vw} + c_{\mu uw} M^{u,\lambda w} + c_{\mu vu} M^{u,v\lambda}) \quad . \quad (61)$$

dies muss identisch bezüglich der A_λ^μ mit $\lambda \neq \mu$ verschwinden, d.h. wir haben

$$2c_{\mu vw} M^{\lambda,vw} + c_{\mu uw} M^{u,\lambda w} + c_{\mu vu} M^{u,v\lambda} = c_{\mu ik}(2M^{\lambda ik} + M^{i,\lambda k} + M^{k,i\lambda}) = 0.$$

Hieraus folgt also für die Konstanten M:

$$2M^{j,ik} + M^{i,jk} + M^{k,ij} = 0 \quad \ldots\ldots \quad (62)$$

Hieraus folgt wegen $M^{j,ik} = -M^{j,ki}$ leicht, dass $M^{j,ik} = M^{jik}$ schief ist in allen drei Indizes. Aus der linken Seite von (61) entsteht dann, wenn man nach den Indextripeln addiert:

$$B_{u,vw} M^{uvw} = 2 \sum_{(uvw)} M^{uvw}(B_{u,vw} + B_{v,wu} + B_{w,uv}). \quad \ldots \quad (63)$$

Hier ist nach Gleichung (36) im § 4 die eingeklammerte Summe der B identisch Null bezüglich der A_λ^μ und aus (63) lesen wir also ab, dass zwischen den B kleine weiteren linearen Abhängigkeiten mit konstanten Koeffizienten bestehen. Wegen $B_{u,vw} = -B_{u,wv}$ gibt es daher zu einem gebenen Indextripel aus drei verschiedenen Zahlen u, v, w genau zwei irreduzible Syzygien B, d.h. im Ganzen $2 \cdot \binom{6}{3} = 40$. Ist aber z.B. $u = v$, so haben wir wegen $B_{u,uw} = -B_{u,wu}$ nur eine irreduzible Syzygie $B_{u,uw}$, d.h. im Ganzen $1 . \binom{2}{6} = 15$. Es gibt daher überhaupt $40 + 15 = 55$ irreduzible Syzygien zweiter Art vom Typus B.

§ 7. *Der Typus C bei $n = 6$.*

Ganz analoges finden wir beim Typus C der Syzygien zweiter Art. Hier haben wir nach Gleichung (48), wobei wir den Faktor $\frac{1}{6}$ weglassen:

$$
\begin{aligned}
C^{x,yz} &= \tfrac{1}{6} (a^3\, b^2\, x)\, (c^3\, byz) + \tfrac{1}{6} (a^3\, b^2\, c)\, (c^2\, bxyz) = \\
&= 6 \,.\, (A'\, x)\, (c'\, A)\, (c'\, y)\, (c'\, z) + (A'\, c)\, (c^2\, Axyz).
\end{aligned}
$$

Hier bringen wir im letzten Term die Reihe c von $(A' c)$ in den Klammerfaktor:

$$
\begin{aligned}
(c^2\, Axyz)\, (cA') = \tfrac{1}{3} (c^3\, xyz)\, (AA') - \tfrac{1}{3} (c^3\, Ayz)\, (xA') + \\
+ \tfrac{1}{3} (c^3\, Axz)\, (y\, A') - \tfrac{1}{3} (c^3\, Axy)\, (zA');
\end{aligned}
$$

dies wird wegen $(AA') = 0$

$$
\begin{aligned}
= - 2\, (c'\, A)\, (c'\, y)\, (c'\, z)\, (A'\, x) + 2\, (c'\, A)\, (c'\, x)\, (c'\, z)\, (A'\, y) - \\
- 2\, (c'\, A)\, (c'\, x)\, (c'\, y)\, (A'\, z).
\end{aligned}
$$

Daher erhalten wir

$$
C^{x,yz} = (c'\, A)\, [4\, (A'\, x)\, (c'\, y)\, (c'\, z) - 2\, (A'\, y)\, (c'\, z)\, (c'\, x) - 2\, (A'\, z)\, (c'\, x)\, (c'\, y)]
$$

oder, in Tensorschreibweise und dual zu (60):

$$
\left.
\begin{aligned}
\tfrac{1}{2} C^{x,yz} &= A_\lambda^{\mu}\, [2\, c^{\lambda\, yz}\, \delta_\mu^x + c^{\lambda\, xz}\, \delta_\mu^y + c^{\lambda\, yx}\, \delta_\mu^z] \\
&= 2\, Q^{x,yz} + Q^{y,xz} + Q^{z,yx}
\end{aligned}
\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (64)
$$

mit

$$
Q^{x,yz} = A_\tau^x\, c^{\tau\, yz} = - \tfrac{1}{6} (a'^{\,3}\, b'^{\,2}\, c')\, (b'\, x)\, (c'\, y)\, (c'\, z). \quad . \quad . \quad (64a)
$$

(64) multiplizieren wir wieder mit unbestimmten Konstanten $N_{x,yz} = - N_{x,zy}$ und erhalten analog zu (62) die Gleichungen

$$
2\, N_{z,xy} + N_{x,zy} + N_{y,xz} = 0,
$$

woraus sich wieder die schiefe Symmetrie für die N und weiters analog zu (63) die Beziehung ergibt

$$
C^{x,yz}\, N_{x,yz} = 2 \sum_{(xyz)} N_{xyz}\, (C^{x,yz} + C^{y,zx} + C^{z,xy}). \quad . \quad . \quad (65)
$$

Hier gilt nun analog wie bei den B die Identität

$$
C^{x,yz} + C^{y,zx} + C^{z,xy} = 0\, \{A_\lambda^\lambda\}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (66)
$$

was man mit Hilfe von (64) sofort nachweisen kann. Gleichung (65) zeigt dann, dass auch zwischen den Syzygien C keine anderen linearen Beziehungen möglich sind als (66); wir haben also auch 55 irreduzible Syzygien zweiter Art vom Typus C.

Es wäre nun nur noch möglich, dass zwischen den B und C lineare Abhängigkeiten bestehen. Um auch dies zu erledigen, machen wir den Ansatz

$$B_{u,vw} M^{u,vw} + \tfrac{1}{2} C^{x,yz} N_{x,yz} \equiv 0 \; \{A^{\mu}_{\lambda}\}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (67)$$

Dies führt zu den Gleichungen (Vgl. (62)):

$$c_{\mu ik}(2M^{\lambda,ik} + M^{k,i\lambda} + M^{i,\lambda k}) + c^{\lambda rs}(2N_{\mu,rs} + N_{s,r\mu} + N_{r,\mu s}) \equiv 0 \quad (68)$$

für alle a_{ijk} und für $\lambda \neq \mu$. Nimmt man hier den Koeffizienten von $c_{\mu\lambda k}$, so kommt nur der erste Teil der linken Seite in Frage, denn das algebraische Komplement von λrs enthält sicher kein λ. Es kommt

$$c_{\mu\lambda k}(2M^{\lambda,\lambda k} + M^{\lambda,\lambda k} - 2M^{\lambda,k\lambda} - M^{\lambda,k\lambda}) = 6 \sum_{k=1}^{6} c_{\mu\lambda k} \,.\, M^{\lambda,\lambda k} = 0, \text{ d. h.}$$

$$M^{\lambda,\lambda k} = 0 \quad \text{und ebenso} \quad N_{\lambda,\lambda i} = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (69)$$

Setzen wir

$$2M^{\lambda,ik} + M^{k,i\lambda} + M^{i,\lambda k} = \overline{M}^{\lambda,ik}$$

und analog bei $N_{\mu,rs}$, so können wir (68) kürzer so schreiben

$$c_{\mu ik}\overline{M}^{\lambda,ik} + c^{\lambda rs}\overline{N}_{\mu,rs} = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (70)$$

Nach (69) ist jetzt auch

$$\overline{M}^{\lambda,\lambda k} = 0 \quad \text{und} \quad \overline{N}_{\mu,\mu i} = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (71)$$

In (70) wählen wir nun erstens $\lambda = 1$, $\mu = 2$ und setzen den Koeffizienten von $c_{234} = -c^{156}$ Null; dies gibt

$$\overline{M}^{1,34} - \overline{N}_{2,56} = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (72)$$

Zweitens wählen wir in (70) $\lambda = 1$, $\mu = 5$ und setzen den Koeffizienten von $c_{534} = c^{126}$ Null:

$$\overline{M}^{1,34} + \overline{N}_{5,26} = 0.$$

Ein Vergleich mit (72) ergibt $\overline{N}_{2,56} = -\overline{N}_{5,26}$, also gilt allgemein

$$\overline{M}^{\lambda,ik} = -\overline{M}^{i,\lambda k} \quad \text{und} \quad \overline{N}_{\mu,rs} = -\overline{N}_{r,\mu s}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (73)$$

Für die M ohne Querstrich folgt aus der ersten dieser Gleichungen

$$2\,M^{\lambda,ik}+M^{k,i\lambda}+M^{i,\lambda k}=-\,2\,M^{i,\lambda k}-M^{k,\lambda i}-M^{\lambda,ik},$$

d.h. es gilt auch für M und N selbst

$$M^{\lambda,ik}=-\,M^{i,\lambda k} \quad \text{und} \quad N_{\mu,rs}=-\,N_{r,\mu s}$$

und die M und N sind also in allen drei Indizes alternierend. Der Ansatz (67) liefert deshalb keine neuen linearen Abhängigkeiten zwischen den Syzygien B und C.

§ 8. *Die Typen* $\hat{B}$ *und* $\hat{C}$.

Nach (58) haben wir

$$B_{u,vw}=2\,P_{u,vw}+P_{v,uw}+P_{w,vu}$$

mit

$$P_{u,vw}=A_u^{\varrho}\,c_{\varrho vw}=\tfrac{1}{6}\,(a^3\,b^2\,c)\,(bu')\,(cv')\,(cw').$$

Diese letzteren Ausdrücke sind, wie an $c_{\varrho vw}$ abzulesen ist, bezüglich v und w alternierend. d.h. es ist

$$P_{u,vw}+P_{u,wv}=0;$$

dies ist aber keine Syzygie S_2, da diese Summe auch für alle A_λ^μ verschwindet.

$P_{u,vw}$ ist aber nach (12) auch in den Indizes u and v alternierend:

$$\hat{B}_{uv,w}=P_{u,vw}+P_{v,uw}=A_u^{\varrho}\,c_{\varrho vw}+A_v^{\varrho}\,c_{\varrho uw}\equiv 0 \quad \{a_{ijk}\} \qquad . \quad (74)$$

und hier ist $\hat{B}_{uv,w}$ nicht für beliebige A_λ^μ Null. d.h. $\hat{B}_{uv,w}=0$ stellt eine Syzygie zweiter Art dar. Wir wollen zeigen, dass $\hat{B}$ auf B reduzierbar ist und umgekehrt.

Das letztere ergibt sich unmittelbar, wenn wir $B_{u,vw}$ nach (58) so schreiben

$$B_{u,vw}=(P_{u,vw}+P_{vu,w})-(P_{u,wv}+P_{w,uv}),\ \text{d. h.}$$

$$B_{u,vw}=\hat{B}_{uv,w}-\hat{B}_{uw,v}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (75)$$

Ferners haben wir, wieder nach (58):

$$B_{u,vw}=2\,P_{u,vw}+P_{v,uw}+P_{w,uv}$$
$$B_{v,uw}=2\,P_{v,uw}+P_{u,vw}+P_{w,uv}$$

also durch Addition

$$B_{u,vw} + B_{v,uw} = 3(P_{u,vw} + P_{v,uw}), \text{ d. h.}$$

$$\hat{B}_{uv,w} = \tfrac{1}{3}(B_{u,vw} + B_{v,uw}). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (75a)$$

Uebrigens gilt auch für $\hat{B}$ analog zu (36):

$$\hat{B}_{uv,w} + \hat{B}_{vw,u} + \hat{B}_{wu,v} \equiv 0 \quad \{A_\lambda''\}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (76)$$

Ganz analoge Formeln führen bei den $C^{x,yz}$ zu reduziblen Syzygien $\hat{C}^{x,yz}$.

Wir haben die B aus den Ausdrücken (59)

$$P_{uvw} = P_{u,vw} = A_u^\varrho c_{\varrho vw} = (A'c)(Au')(cv')(cw') = \tfrac{1}{6}(a^3b^2c)(bu')(cv')(cw') \quad (77)$$

und dual damit die C aus den Ausdrücken (vgl. (64a))

$$Q^{xyz} = Q^{x,yz} = A_\sigma^x c^{\sigma yz} = (A'x)(c'A)(c'y)(c'z) = -\tfrac{1}{6}(a'^3b'^2c')(b'x)(c'y)(c'z) \quad (78)$$

aufgebaut. Die P und Q sind nun durch Gleichungen verbunden, die identisch in den a_{ijk} gelten. Wir haben nämlich, von (78) ausgehend:

$$Q^{xyz} = \tfrac{1}{36}(b^3a^2x)(c^3ayz)$$

und bringen wir hier eine Reihe c in den ersten Klammerfaktor, so kommt

$$Q^{xyz} = -\tfrac{1}{36}(b^3a^2c)(c^2axyz),$$

also z.B.

$$\begin{aligned} Q^{456} &= -\tfrac{1}{36}(b^3a^2c)(c^2a)_{123} = -\tfrac{1}{36}\cdot 2(b^3a^2c)(c_{23}a_1 + c_{31}a_2 + c_{12}a_3) \\ &= -\tfrac{1}{3}(P_{231} + P_{312} + P_{123}), \text{ d. h.} \\ Q^{456} &= -P_{123}. \end{aligned}$$

Allgemein gilt also [1])

$$P_{ijk} \equiv -Q^{rst}\,\{a_{ijk}\}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (79)$$

wobei rst das algebraische Komplement von ijk ist, d.h. $(ijkrst)$ muss eine positive Permutation von (123456) sein.

Geometrisch ist die Beziehung (79) ohne weiteres evident. Die beiden kovarianten Ebenenkomplexe

$$(a^3b^2c)(bc^2\pi^3) = 0 \text{ und } (a'^3b'^2c')(b'c'^2\pi'^3) = 0,$$

deren Koeffizienten die Ausdrücke P und Q sind, sind identisch.

[1]) O. LANDSBERG, Dissertation Breslau, S. 48 (1899).

Die Gleichung (79) oder

$$R_{ijk} = P_{ijk} + Q^{rst} = A_i^{\varrho} c_{\varrho jk} + A_{\varrho}^{r} c^{\varrho st} = 0 \quad \{a_{ijk}\} \quad . \quad . \quad (80)$$

gilt identisch in den a_{ijk}, nicht aber identisch in allen A_{λ}^{μ}. (80) ist deshalb eine Syzygie zweiter Art S_2. Sie ist aber *reduzibel* wie wir jetzt zeigen wollen.

Wir bringen in

$$P_{u,vw} = (A'a)(Au')(av')(aw') = -\tfrac{1}{6}(a'^3 A' v' w')(u' A)$$

die Reihe u' in den Klammerfaktor. Es entsteht

$$P_{u,vw} + P_{v,wu} + P_{w,uv} \equiv \tfrac{1}{2}(A' a'^2 u' v' w')(a' A) \quad \{A_{\lambda}^{\mu}\}, \quad . \quad (81)$$

also z.B.

$$P_{4,56} + P_{5,64} + P_{6,45} \equiv Q^{1,23} + Q^{2,31} + Q^{3,12} \quad \{A_{\lambda}^{\mu}\}.$$

Hier addieren wir

$$\hat{B}_{54,6} - \hat{B}_{64,5} \quad \text{und} \quad \hat{C}^{21,3} - \hat{C}^{31,2} \qquad \text{(vgl. (74))}:$$

$$3P_{4,56} + \hat{C}^{21,3} - \hat{C}^{31,2} \equiv \hat{B}_{54,6} - \hat{B}_{64,5} + 3Q^{1,23},$$

also wird nach der Bezeichnung (80)

$$R_{ijk} \equiv \Sigma \hat{B} + \Sigma \hat{C} \quad \{A_{\lambda}^{\mu}\}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (82)$$

d.h. (80) stellt eine reduzible S_2 dar.

Nach den Gleichungen (75) und (75*a*) sind die B und die $\hat{B}$ äquivalent. Es gilt daher auch für die Syzygien $\hat{B}$ das am Schlusse des § 6 Gesagte. Und nach § 7 bestehen auch zwischen den $\hat{B}$ und $\hat{C}$ keine linearen Abhängigkeiten. Wir werden im Weiteren in der Regel mit den einfacheren Formen $\hat{B}$ und $\hat{C}$ arbeiten:

$$\left.\begin{aligned} \hat{B}_{uv,w} &= P_{u,vw} + P_{v,uw} = A_u^{\varrho} c_{\varrho vw} + A_v^{\varrho} c_{\varrho uw} \\ \hat{C}^{xy,z} &= Q^{x,yz} + Q^{y,xz} = A_{\tau}^{x} c^{\tau yz} + A_{\tau}^{y} c^{\tau xz} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (83)$$