Mathematics. — *Sur deux, trois ou quatre nombres premiers.* Par J. G. VAN DER CORPUT. (Deuxième communication).

(Communicated at the meeting of December 18, 1937.)

J'ai besoin de plusieurs propositions auxiliaires. La suivante est un théorème connu de DIRICHLET.

Lemme 3: *Si α est un nombre quelconque et si τ est un nombre > 1, il existe au moins une fraction irréductible $\frac{a}{q}$ telle qu'on ait*

$$0 < q \leqq \tau \quad et \quad \left| \alpha - \frac{a}{q} \right| < \frac{1}{q\tau} \quad \ldots \ldots \quad (12)$$

C'est M. I. M. VINOGRADOW, qui a déduit le théorème suivant:

Lemme 4: *Soit $\varkappa = 1$ ou 2. A tout nombre naturel m correspondent un nombre naturel η et un nombre c_7 ayant la propriété suivante: toute paire de nombres réels $Z > 3$ et α, à laquelle correspond une fraction irréductible telle que*

$$\left| \alpha - \frac{a}{q} \right| \leqq q^{-1} Z^{-\varkappa} z^{\eta} \quad et \quad z^{\eta} \leqq q \leqq Z^{\varkappa} z^{-\eta},$$

satisfait à l'inégalité

$$\left| \sum_{p \leqq Z} e^{2\pi i \alpha p^{\varkappa}} \right| < c_7 Z z^{-m};$$

Σ est étendu à tous les nombres premiers $p \leqq Z$.

Remarque: Les nombres η et c_7 possèdent la propriété suivante: toute paire de nombres réels $Z > 3$ et α, telle que l'intervalle fermé $(\alpha - Z^{-\varkappa} z^{\eta}, \alpha + Z^{-\varkappa} z^{\eta})$ ne contienne aucune fraction à dénominateur positif $\leqq z^{\eta}$, satisfait à l'inégalité

$$\left| \sum_{p \leqq Z} e^{2\pi i \alpha p^{\varkappa}} \right| < c_7 Z z^{-m}.$$

En effet, posons $\tau = Z^{\varkappa} z^{-\eta}$. Puisque l'intervalle $(\alpha - \tau, \alpha + \tau)$ ne contient aucun nombre entier, on a $\tau > 1$. En vertu du lemme 3 il existe une fraction irréductible $\frac{a}{q}$ avec (12), donc avec

$$0 < q \leqq Z^{\varkappa} z^{\eta} \quad \text{et} \quad \left| \alpha - \frac{a}{q} \right| < \frac{1}{\tau}.$$

Cette fraction, étant située dans l'intervalle $\left(\alpha - \frac{1}{\tau}, \alpha + \frac{1}{\tau} \right)$, possède un dénominateur $\geqq z^{\eta}$, de sorte que les conditions du lemme 4 sont valables.

Lemme 5: *Considérons une des quatre expressions* $\pm u_1^2 \pm u_2^2$. *Soit* $K \geqq 1$; *posons* $\lambda(v)$ *égal au nombre de manières différentes dont il est possible d'écrire* v *sous la forme considérée* $v = \pm u_1^2 \pm u_2^2$, *où* u_1 *et* u_2 *désignent des nombres naturels* $\leqq K$. *Alors on a*

$$\sum_{v=-\infty}^{\infty} \lambda^2(v) < 9K^2 \quad (1 + \log K).$$

Démonstration: Le membre de gauche est égal au nombre des systèmes de nombres naturels u_1, u_2, u_3, u_4, tels que

$$u_\varrho \leqq K \quad (\varrho = 1, 2, 3, 4); \quad \pm u_1^2 \pm u_2^2 = \pm u_3^2 \pm u_4^2 \quad . \quad . \quad (13)$$

Le nombre de ceux parmi ces systèmes, pour lesquels on a $u_1 = u_3$, (donc $u_2 = u_4$), est égal au nombre de paires de nombres naturels $u_1 \leqq K$ et $u_2 \leqq K$, donc tout au plus égal à K^2.

Considérons maintenant les systèmes u_1, u_2, u_3, u_4 qui satisfont à (13) et pour lesquels $u_1 > u_3$. Je désigne par a le plus grand commun diviseur de $u_1 + u_3$ et $u_4 + u_2$; donc $u_1 + u_3 = ab$ et $u_4 + u_2 = ac$, où b et c sont premiers entre eux. Le produit

$$b(u_1 - u_3) = \frac{u_1^2 - u_3^2}{a} = \pm \frac{u_4^2 - u_2^2}{a} = \pm c(u_4 - u_2)$$

est divisible par c, qui est donc un diviseur de $u_1 - u_3$. Posons $u_1 - u_3 = cd$, donc $\pm(u_4 - u_2) = bd$. Alors a, b, c, d sont des nombres naturels tels que

$$ab \leqq 2K, \quad ac \leqq 2K, \quad cd \leqq K \text{ et } bd \leqq K \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

Le nombre des systèmes u_1, u_2, u_3, u_4, qui satisfont à (13) et à $u_1 > u_3$, est donc tout plus au plus égal au nombre des systèmes a, b, c, d, satisfaisant à (14), donc tout au plus égal à deux fois le nombre des systèmes a, b, c, d, qui satisfont à (14) et à $b \leqq c$, c'est-à-dire tout au plus égal à

$$2 \sum_{c=1}^{[N]} \frac{2K}{c} \cdot c \cdot \frac{K}{c} = 4K^2 \sum_{c=1}^{[K]} \frac{1}{c} < 4K^2 (1 + \log K).$$

En changeant u_1 et u_3, on trouve la même borne supérieure pour le nombre des systèmes u_1, u_2, u_3, u_4, avec $u_1 < u_3$. Ainsi le lemme est démontré.

Lemme 6: *Soit* R *le rectangle*

$$R \ldots A_1 \leqq u_1 \leqq B_1, \quad A_2 \leqq u_2 \leqq B_2,$$

où $A_1 \geqq 3$ *et* $A_2 \geqq 3$, *et soit*

$$\varrho(y) = \iint\limits_{\substack{R \\ |u_1^2 + u_2^2 - y| \leqq \frac{1}{2}}} \frac{du_1\, du_2}{\log u_1 \log u_2}.$$

Alors on a pour toute paire de nombres réels α *et* β, *qui sont en valeurs absolues* $\leqq \frac{1}{2}$, *et pour tout nombre réel* y,

$$|\varrho(y+\alpha) - \varrho(y+\beta)| \leqq G + \iint\limits_{\substack{R \\ |u_1^2+u_2^2-y| \leqq 1}} \frac{du_1\, du_2}{u_1^2+u_2^2},$$

où

$$G = \int\limits_{\substack{y-1 \\ w \geqq A_1^2}}^{y+1} \frac{A_1\, dw}{w\sqrt{w-A_1^2}} + \int\limits_{\substack{y-1 \\ w \geqq A_2^2}}^{y+1} \frac{A_2\, dw}{w\sqrt{w-A_2^2}} +$$

$$+ \int\limits_{\substack{y-1 \\ w \geqq B_1^2}}^{y+1} \frac{B_1\, dw}{w\sqrt{w-B_1^2}} + \int\limits_{\substack{y-1 \\ w \geqq B_2^2}}^{y+1} \frac{B_2\, dw}{w\sqrt{w-B_2^2}}.$$

Démonstration: Posons

$$u_1^2 + u_2^2 = w, \quad u_1 = \sqrt{w}\cos\varphi, \quad u_2 = \sqrt{w}\sin\varphi, \quad 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}.$$

Alors on a

$$\varrho(v) = \frac{1}{2}\int\limits_{v-\frac{1}{2}}^{v+\frac{1}{2}} \psi(w)\, dw; \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (15)$$

$\psi(w) = 0$, si le rectangle R ne contient ancien point u_1, u_2 tel que $u_1^2 + u_2^2 = w$; dans l'autre cas

$$\psi(w) = \int\limits_{\varphi_1(w)}^{\varphi_2(w)} \frac{d\varphi}{\log u_1 \log u_2},$$

où

$$\varphi_1(w) = arc\sin \frac{A_2}{\sqrt{w}} \quad \text{ou} \quad arc\cos \frac{B_1}{\sqrt{w}};$$

$$\varphi_2(w) = arc\cos \frac{A_1}{\sqrt{w}} \quad \text{ou} \quad arc\sin \frac{B_2}{\sqrt{w}}.$$

La fonction $\psi(w)$ est partout continue. Dans l'intervalle, où $\psi(w)$ n'est pas identiquement égal à zéro, on a, exception faite d'un nombre borné de points,

$$\frac{d\varphi_1}{dw} = \frac{-\frac{1}{2}A_2}{w\sqrt{w-A_2^2}} \quad \text{ou} \quad \frac{\frac{1}{2}B_1}{w\sqrt{w-B_1^2}},$$

$$\frac{d\varphi_2}{dw} = \frac{\frac{1}{2}A_1}{w\sqrt{w-A_1^2}} \quad \text{ou} \quad \frac{-\frac{1}{2}B_2}{w\sqrt{w-B_2^2}}$$

et

$$\frac{d\psi}{dw}=\frac{1}{\log u_{12}\log u_{22}}\frac{d\varphi_2}{dw}-\frac{1}{\log u_{11}\log u_{12}}\frac{d\varphi_1}{dw}$$

$$-\frac{1}{2w}\int_{\varphi_1(w)}^{\varphi_2(w)}\frac{d\varphi}{\log u_1\log u_2}\left(\frac{1}{\log u_1}+\frac{1}{\log u_2}\right);$$

(u_1 et u_2 prennent pour $\varphi=\varphi_\varkappa$ ($\varkappa=1$ et 2) les valeurs $u_{1\varkappa}$ et $u_{2\varkappa}$). Par conséquent

$$\left|\frac{d\psi}{dw}\right|\leqq\frac{A_1}{w\sqrt{w-A_1^2}}+\frac{A_2}{w\sqrt{w-A_2^2}}+$$

$$+\frac{B_1}{w\sqrt{w-B_1^2}}+\frac{B_2}{w\sqrt{w-B_2^2}}+\frac{\varphi_2(w)-\varphi_1(w)}{w};$$

dans le membre de droite on doit supprimer le terme $\frac{A_\varkappa}{w\sqrt{w-A_\varkappa^2}}$ ($\varkappa=1$ ou 2), lorsque $w<A_\varkappa^2$; le terme $\frac{B_\varkappa}{w\sqrt{w-B_\varkappa^2}}$ ($\varkappa=1$ ou 2), lorsque $w<B_\varkappa^2$.

Ce résultat implique que pour toute paire de nombres réels α et β, qui sont en valeurs absolues $\leqq\frac{1}{2}$ et pour tout nombre réel y (comparez (15)) la différence

$$\varrho(y+\alpha)-\varrho(y+\beta)=\tfrac{1}{2}\int_{y-\frac{1}{2}}^{y+\frac{1}{2}}\{\psi(x+\alpha)-\psi(x+\beta)\}\,dx=\tfrac{1}{2}\int_{y-\frac{1}{2}}^{y+\frac{1}{2}}dx\int_{x+\beta}^{x+\alpha}\frac{d\psi}{dw}\,dw$$

est en valeur absolue inférieure à

$$G+\tfrac{1}{2}\int_{y-1}^{y+1}\frac{dw}{w}(\varphi_2(w)-\varphi_1(w))=G+\iint\limits_{\substack{R\\|u_1^2+u_2^2-y|\leqq 1}}\frac{du_1\,du_2}{u_1^2+u_2^2}.$$

Lemme 7: *Soit R le rectangle*

$$R\ldots A_1\leqq u_1\leqq B_1,\quad A_2\leqq u_2\leqq B_2,$$

où $A_1\geqq 3$, $A_2\geqq 3$ et soit partout dans R

$$|u_1^2-u_2^2|\geqq 3. \qquad (16)$$

Si l'on pose

$$\varrho(y)=\iint\limits_{\substack{R\\|u_1^2-u_2^2-y|\leqq\frac{1}{2}}}\frac{du_1\,du_2}{\log u_1\log u_2},$$

toute paire de nombres réels α *et* β, *qui sont en valeurs absolues* $\leqq \frac{1}{2}$, *satisfait pour tout nombre réel* y *à l'inégalité*

$$|\varrho(y+\alpha)-\varrho(y+\beta)| \leqq G + \iint\limits_{\substack{R \\ |u_1^2-u_2^2-y| \leqq 1}} \frac{du_1\, du_2}{|u_1^2-u_2^2|},$$

où

$$G = \int\limits_{\substack{y-1 \\ 1 \leqq w \leqq A_1^2}}^{y+1} \frac{A_1\, dw}{w\sqrt{A_1^2-w}} + \int\limits_{\substack{y-1 \\ 1 \leqq w \leqq A_2^2}}^{y+1} \frac{A_2\, dw}{w\sqrt{A_2^2-w}} +$$

$$+ \int\limits_{\substack{y-1 \\ 1 \leqq w \leqq B_1^2}}^{y+1} \frac{B_1\, dw}{w\sqrt{B_1^2-w}} + \int\limits_{\substack{y-1 \\ 1 \leqq w \leqq B_2^2}}^{y+1} \frac{B_2\, dw}{w\sqrt{B_2^2-w}}.$$

Démonstration: Il suit de (16) que $u_1 - u_2$ est nulle parte égale à zéro dans R. Sans troubler la généralité, on peut supposer $u_1 > u_2$ partout dans R: sinon il suffit de changer u_1 et u_2. On a $\varrho(v) = 0$, si $v \leqq \frac{5}{2}$; on peut donc supposer $y \geqq 2$. Il suffit maintenant de poser

$$u_1^2 - u_2^2 = w, \quad u_1 = \sqrt{w}\cosh\varphi, \quad u_2 = \sqrt{w}\sinh\varphi,$$

et la démonstration est complètement analogue à celle du lemme précédent.

Lemme 8: *Considérons une des expressions* $\pm u_1^2 \pm u_2^2$. *Soit* R *le rectangle*

$$R \ldots A_1 \leqq u_1 \leqq B_1, \quad A_2 \leqq u_2 \leqq B_2,$$

où $A_1 \geqq 3$ *et* $A_2 \geqq 3$, *et posons*

$$\varrho(y) = \iint\limits_{\substack{R \\ |\pm u_1^2 \pm u_2^2 - y| \leqq \frac{1}{2}}} \frac{du_1\, du_2}{\log u_1 \log u_2};$$

(dans ce lemme je distingue donc quatre cas différents).

Dans les deux cas, où figure $u_1^2 - u_2^2$ *où* $-u_1^2 + u_2^2$, *je suppose partout dans* R

$$|u_1^2 - u_2^2| \geqq 3 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

Alors il existe une constante absolue c_8, *telle qu'on a pour tout nombre réel* y

$$|\varrho(y)| \leqq c_8 \log^2(B_1 + B_2) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

et

$$\Big|\sum_{h=-\infty}^{\infty} M(y+h)\Big| < c_8 \log^2(B_1+B_2), \quad \ldots\ldots \quad (19)$$

où

$$M(y) = \operatorname*{Max}_{\substack{|\alpha| \leqq \frac{1}{2} \\ |\beta| \leqq \frac{1}{2}}} |\varrho(y+\alpha) - \varrho(y+\beta)| \quad \ldots\ldots \quad (20)$$

Démonstration: Il suffit de traiter les deux expressions $u_1^2 \pm u_2^2$, car sinon, on peut remplacer y par $-y$.

Considérons d'abord l'expression $u_1^2 + u_2^2$. Alors le lemme 6 nous apprend

$$\tfrac{1}{2}\sum_{h=-\infty}^{\infty} M(y+h) \leqq \int_{A_1^2}^{\infty} \frac{A_1\,dw}{w\sqrt{w-A_1^2}} + \int_{A_2^2}^{\infty} \frac{A_2\,dw}{w\sqrt{w-A_2^2}}$$

$$+ \int_{B_1^2}^{\infty} \frac{B_1\,dw}{w\sqrt{w-B_1^2}} + \int_{B_2^2}^{\infty} \frac{B_2\,dw}{w\sqrt{w-B_1^2}} + \iint_R \frac{du_1\,du_2}{u_1^2+u_2^2}.$$

Dans le membre de droite chacun des quatre premiers termes est égal à

$$\int_1^{\infty} \frac{du}{u\sqrt{u-1}}$$

et le dernier terme est inférieur à

$$\int_{A_1}^{B_1}\int_{A_2}^{B_2} \frac{du_1\,du_2}{u_1\,u_2} < \log^2(B_1+B_2).$$

Traitons finalement l'expression $u_1^2 - u_2^2$. Le lemme précédent nous apprend

$$\left.\begin{aligned} \tfrac{1}{2}\sum_{h=-\infty}^{\infty} M(y+h) &\leqq \int_1^{A_1^2} \frac{A_1\,dw}{w\sqrt{A_1^2-w}} + \int_1^{A_2^2} \frac{A_2\,dw}{w\sqrt{A_2^2-w}} \\ + \int_1^{B_1^2} \frac{B_1\,dw}{w\sqrt{B_1^2-w}} &+ \int_1^{B_2^2} \frac{B_2\,dw}{w\sqrt{B_2^2-w}} + \iint_R \frac{du_1\,du_2}{|u_1^2-u_2^2|}. \end{aligned}\right\} \quad (21)$$

Dans le membre de droite le premier terme est égal à

$$\int_{A_1^{-2}}^{1} \frac{du}{u\sqrt{1-u}} \leqq \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{du}{\frac{1}{2}\sqrt{1-u}} + \int_{A_1^{-2}}^{1} \frac{du}{u\sqrt{\frac{1}{2}}}$$

$$< 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}\log A_1 < 6\log^2(B_1+B_2).$$

On obtient un résultat analogue pour les $2^{\text{ième}}$, $3^{\text{ième}}$ et $4^{\text{ième}}$ termes du membre de droite de (21).

Pour tout point u_1, u_2 de R on a, en vertu de (17),

$$6 \leqq u_1 + u_2 \leqq B_1 + B_2 \quad\text{et}\quad \frac{1}{B_1+B_2} \leqq |u_1 - u_2| \leqq B_1 + B_2,$$

de sorte qu'on obtient par la transformation $x = |u_1 - u_2|$, $y = u_1 + u_2$, pour le dernier terme, figurant dans (21) dans le membre de droite, la borne supérieure

$$\frac{1}{2}\int\limits_{6}^{B_1+B_2}\frac{dy}{y}\int\limits_{\frac{1}{B_1+B_2}}^{B_1+B_2}\frac{dx}{x} < \log^2(B_1+B_2).$$

Ainsi le lemme est complètement démontré, car (18) suit de (19).

Lemme 9: *Soit R le rectangle*

$$A \leqq u \leqq B, \quad A' \leqq u' \leqq B', \quad \ldots\ldots \quad (22)$$

où $A \geqq 3$ et $A' \geqq 3$. Alors on a pour tout nombre entier t

$$\left| \sum_{\substack{(v,v')\,dans\,R\\ v+v'=t}} \frac{1}{\log v \log v'} - \iint\limits_{\substack{R\\ |u+u'-t|\leqq\frac{1}{2}}} \frac{du\,du'}{\log u \log u'} \right| < c_9 \log(B+B'); \quad (23)$$

$c_9, \ldots, c_{12}$ désignent des constantes absolues, convenablement choisies.

Démonstration: Soit D la partie de R, située dans la bande $|u+u'-t| \leqq \frac{1}{2}$. Chaque point (v, v') à coordonnées entières, situés dans R et sur la droite $u+u'=t$, est situé dans D; à chacun de ces points correspond un rectangle

$$R(v, v') \ldots\ldots |u+u'-v-v'| \leqq \tfrac{1}{2}, \quad |u-u'-v+v'| \leqq 1,$$

dont l'aire est égale à 1. L'ensemble E, formé par ces rectangles $R(v, v')$, est approximativement la partie D, de telle sorte que

$$\iint\limits_{D}\frac{du\,du'}{\log u \log u'} - \iint\limits_{E}\frac{du\,du'}{\log u \log u'}$$

est en valeur absolue inférieure à une constante absolue c_{10}. La contribution à

$$\iint\limits_{E}\frac{du\,du'}{\log u \log u'}$$

d'un rectangle $R(v, v')$ est approximativement égale à $\dfrac{1}{\log v \log v'}$, et la valeur absolue de la différence est inférieure à $c_{11}\left(\dfrac{1}{v}+\dfrac{1}{v'}\right)$, d'où il suit, que le membre de gauche de (23) est inférieur à

$$c_{10} + c_{11}\sum_{A\leqq v\leqq B}\frac{1}{v} + c_{11}\sum_{A'\leqq v'\leqq B'}\frac{1}{v'} < c_{12}\log(B+B').$$

Lemme 10: *Si R désigne le rectangle* (22), *où* $A \geqq 3$ *et* $A' \geqq 3$, *on a pour tout nombre entier t*

$$\left| \sum_{\substack{(v,v')\, dans\, R \\ v-v'=t}} \frac{1}{\log v \log v'} - \iint\limits_{\substack{R \\ |u-u'-t| \leqq \frac{1}{2}}} \frac{du\, du'}{\log u \log u'} \right| < c_{13} \log (B+B'),$$

c_{13} *désignant une constante absolue, convenablement choisie.*

La démonstration est complètement analogue à celle du lemme précédent.

Lemme 11: *Supposons que les conditions du lemme* 8 *soient valables, que* $B' > A' \geqq 3$ *et que* (A, B) *soit le plus petit intervalle tel que tout point* (u_1, u_2) *de* R *possède la propriété que le nombre* $\pm u_1^2 \pm u_2^2$ *appartienne à cet intervalle* (A, B). *Alors on a pour tout nombre entier t*

$$\left| \sum_{\substack{A \leqq v \leqq B \\ A' \leqq t-v \leqq B'}} \frac{\varrho(v)}{\log (t-v)} - \int_{A'}^{B'}\int_{A_1}^{B_1}\int_{A_2}^{B_2}\limits_{|u' \pm u_1^2 \pm u_2^2 - t| \leqq \frac{1}{2}} \frac{du'\, du_1\, du_2}{\log u' \log u_1 \log u_2} \right| < c_{14} (\log B') \log^2 (B_1 + B_2); \quad (24)$$

$c_{14}, \ldots, c_{17}$ *désignant des constantes absolues, convenablement choisies.*

Démonstration: Pour tout nombre entier v tel que $A \leqq v \leqq B$ et $A' \leqq t-v \leqq B'$, on a

$$\left| \frac{\varrho(v)}{\log (t-v)} - \int_{v-\frac{1}{2}}^{v+\frac{1}{2}} \frac{\varrho(u)\, du}{\log (t-u)} \right| \leqq \int_{v-\frac{1}{2}}^{v+\frac{1}{2}} \left| \frac{\varrho(v)}{\log (t-v)} - \frac{\varrho(u)}{\log (t-u)} \right| du$$

$$\leqq c_{15} \frac{\log^2 (B_1 + B_2)}{t-v} + M(v)$$

en vertu de (18) et (20), donc

$$\left| \sum_{\substack{A \leqq v \leqq B \\ A' \leqq t-v \leqq B'}} \left(\frac{\varrho(v)}{\log (t-v)} - \int_{v-\frac{1}{2}}^{v+\frac{1}{2}} \frac{\varrho(u)\, du}{\log (t-u)} \right) \right|$$

$$\leqq c_{15} \log^2 (B_1 + B_2) \sum_{A' \leqq t-v \leqq B'} \frac{1}{t-v} + \sum_{v=-\infty}^{\infty} M(v)$$

$$< c_{16} (\log B') \log^2 (B_1 + B_2)$$

en vertu de (19).

Puisque $\varrho(u)$ est égal à zéro pour tout point u dont la distance à l'intervalle (A, B) est supérieure à $\frac{1}{2}$, la différence

$$\sum_{\substack{A \leqq v \leqq B \\ A' \leqq t-v \leqq B'}} \int_{v-\frac{1}{2}}^{v+\frac{1}{2}} \frac{\varrho(u)\, du}{\log (t-u)} - \int\limits_{A' \leqq t-u \leqq B'} \frac{\varrho(u)\, du}{\log (t-u)} \cdot \;\; . \;\; . \;\; . \quad (25)$$

peut être écrite comme la somme de deux intégrales, de telle façon que de chacune d'elles le chemin d'intégration a une longueur $\leqq 1$, et que la fonction à intégrer a une valeur absolue $\leqq c_{17} \log^2 (B_1 + B_2)$ en vertu de (19). Par conséquent l'expression (25) est en valeur absolue

$\leqq 2\, c_{17} \log^2 (B_1 + B_2)$, d'où suit l'assertion, puisque la dernière intégrale, figurant dans (25), est égale à l'intégrale figurant dans (24).

Lemma 12: *Supposons que les conditions du lemme 8 soient valables. Considérons en outre une des expressions $\pm u_1'^2 \pm u_2'^2$. Soit R' le rectangle*

$$R' \ldots A_1' \leqq u_1' \leqq B_1', \qquad A_2' \leqq u_2' \leqq B_2',$$

où $A_1' \geqq 3$ et $A_2' \geqq 3$, et posons

$$\varrho'(y') = \iint\limits_{\substack{R' \\ |\pm u_1'^2 \pm u_2'^2 - y'| \leqq \frac{1}{2}}} \frac{du_1'\, du_2'}{\log u_1' \log u_2'}.$$

Dans les deux cas où figure $u_1'^2 - u_2'^2$ ou $-u_1'^2 + u_2'^2$, je suppose partout dans R'

$$|u_1'^2 - u_2'^2| \geqq 3.$$

Je désigne par (A', B') le plus petit intervalle tel que tout point (u_1', u_2') de R' possède la propriété, que le nombre $\pm u_1'^2 \pm u_2'^2$ appartienne à (A', B').

Alors on a pour tout nombre entier t

$$\left| \sum_{\substack{A \leqq v \leqq B \\ A' \leqq t-v \leqq B'}} \varrho(v)\, \varrho'(t-v) - \int_{A_1}^{B_1}\int_{A_2}^{B_2}\int_{A_1'}^{B_1'}\int_{A_2'}^{B_2'} \frac{du_1\, du_2\, du_1'\, du_2'}{\log u_1 \log u_2 \log u_1' \log u_2'} \right|$$
$$< c_{18} \log^2 (B_1 + B_2) \log^2 (B_1' + B_2');$$

c_{18}, c_{19} et c_{20} désignant des constantes absolues, convenablement choisies.

Démonstration: Pour tout nombre entier v tel que $A \leqq v \leqq B$ et $A' \leqq t - v \leqq B'$, le produit

$$\varrho(v)\, \varrho'(t-v) = \iint\limits_{\substack{R \\ |\pm u_1^2 \pm u_2^2 - v| \leqq \frac{1}{2}}} \frac{du_1\, du_2}{\log u_1 \log u_2}\, \varrho'(t-v)$$

est approximativement égal à

$$\iint\limits_{\substack{R \\ |\pm u_1^2 \pm u_2^2 - v| \leqq \frac{1}{2}}} \frac{du_1\, du_2}{\log u_1 \log u_2}\, \varrho'(t - (\pm u_1^2 \pm u_2^2)).$$

En effet, la différence est en valeur absolue

$$\leqq \varrho(v)\, M'(t-v) \quad (\text{où } M'(y) = \underset{\substack{|\alpha| \leqq \frac{1}{2} \\ |\beta| \leqq \frac{1}{2}}}{Max} |\varrho'(y+\alpha) - \varrho'(y+\beta)|)$$
$$\leqq c_8 \log^2 (B_1 + B_2)\, M'(t-v)$$

en vertu de (18). Il en résulte que

$$\sum_{\substack{A \leqq v \leqq B \\ A' \leqq t-v \leqq B'}} \varrho(v)\, \varrho'(t-v) - \sum_{\substack{A \leqq v \leqq B \\ A' \leqq t-v \leqq B'}} \iiiint\limits_{\substack{R \quad R' \\ |\pm u_1^2 \pm u_2^2 - v| \leqq \frac{1}{2} \\ |\pm u_1^2 \pm u_2^2 \pm u_1'^2 \pm u_2'^2 - t| \leqq \frac{1}{2}}} \frac{du_1\, du_2\, du_1'\, du_2'}{\log u_1 \log u_2 \log u_1' \log u_2'} \tag{26}$$

est en valeur absolue tout au plus égale à

$$c_8 \log^2(B_1+B_2) \sum_{v=-\infty}^{\infty} M'(t-v) < c_{19} \log^2(B_1+B_2) \log^2(B_1'+B_2')$$

en vertu de (19).

Comparons le dernier terme de (26) avec

$$\sum_{v=-\infty}^{\infty} \iiiint = \underset{|\pm u_1^2 \pm u_2^2 \pm u_1'^2 \pm u_2'^2 - t| \leqq \frac{1}{2}}{\iint_R \iint_{R'}} \frac{du_1\, du_2\, du_1'\, du_2'}{\log u_1 \log u_2 \log u_1' \log u_2'}. \quad (27)$$

La contribution à (27) des nombres v, tels que la distance de v à l'intervalle (A, B), où celle de $t-v$ à l'intervalle (A', B'), soit supérieure ou égale à 1, est égale à zéro. Il y a donc tout au plus quatre nombres v, qui ne satisfont pas au système d'inégalités $A \leqq v \leqq B$, $A' \leqq t-v \leqq B'$, et pour lesquels la contribution à (27) n'est pas nulle. La contribution de chacun de ces v est, en valeur absolue, inférieure à $c_{20} \log^2(B_1+B_2) \log^2(B_1'+B_2')$ en vertu de (18).

Ainsi le lemme est démontré.

Lemme 13: (Théorème de SIEGEL-WALFISZ): *A tout nombre naturel m correspond un nombre c_{21}, dépendant uniquement de m, tel que l'inégalité*

$$\left| \sum_{\substack{p \leqq x \\ p \equiv k \,(mod.\, q)}} 1 - \frac{1}{\varphi(q)} \int_2^x \frac{du}{\log u} \right| < \frac{c_{21}\, x}{(\log x)^m}$$

*vaut pour tout nombre $x \geqq 3$, pour tout nombre naturel q et pour tout nombre entier k, qui est premier avec q; partout dans ces communications $\varphi(q)$ désigne la fonction d'*EULER.

Maintenant encore une remarque concernant le lemme 1. Dans la démonstration de ce lemme, la condition qué $\varrho(v)$ et $\varrho'(v')$ soient monotones, n'est employée qu'une seule fois, notamment pour la déduction des inégalités

$$\left| \sum_v \varrho(v)\, e^{2\pi i \alpha v} \right| < \frac{c_{22}\, \Gamma}{|\sin \pi \alpha|} \quad \text{et} \quad \left| \sum_{v'} \varrho'(v')\, e^{2\pi i \alpha v'} \right| < \frac{c_{23}\, \Gamma'}{|\sin \pi \alpha|}, \quad . \quad (28)$$

c_{22} et c_{23} désignant des constantes absolues, convenablement choisies. De cette remarque il résulte qu'on peut remplacer la condition de la monotonie des fonctions $\varrho(v)$ et $\varrho'(v')$ par les inégalités

$$\sum_{v \text{ et } v+1 \text{ dans } V} |\varrho(v+1) - \varrho(v)| \leqq \Gamma \quad \text{et} \quad \sum_{v' \text{ et } v'+1 \text{ dans } V'} |\varrho'(v'+1) - \varrho'(v')| \leqq \Gamma'. \quad (29)$$

En effet, moyenant la sommation partielle, on déduit immédiatement (28) de (29), en vertu de ce que $|\varrho(v)| \leqq \Gamma$ et $|\varrho'(v')| \leqq \Gamma'$.

Après ces propositions auxiliaires je retourne aux expressions f_1, $f_2, \dots, f_8$, nommées au commencement de l'introduction. Ces expressions ont la forme

$$f_1 = p + p'; \quad f_2 = p_1^2 + p_2^2 + p'; \quad f_3 = p_1^2 + p_2^2 + p_1'^2 + p_2'^2; \quad f_4 = p - p';$$
$$f_5 = -p_1^2 - p_2^2 + p'; \quad f_6 = p_1^2 - p_2^2 + p'; \quad f_7 = p_1^2 + p_2^2 + p_1'^2 - p_2'^2;$$
$$f_8 = p_1^2 + p_2^2 - p_1'^2 - p_2'^2,$$

de sorte que chacune d'elles peut être écrite sous une des formes

$$p \pm p'; \quad \pm p_1^2 \pm p_2^2 + p'; \quad \pm p_1^2 \pm p_2^2 \pm p_1'^2 \pm p_2'^2 \quad . \; . \quad (30)$$

Je supposerai que les nombres premiers p, p', p_1, p_2, p_1' et p_2' sont situés dans des intervalles donnés, notamment

$$\left.\begin{array}{l} A \leqq p \leqq B, \quad A' \leqq p' \leqq B', \quad A_1 \leqq p_1 \leqq B_1, \quad A_2 \leqq p_2 \leqq B_2, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad A'_1 \leqq p'_1 \leqq B'_1, \quad A'_2 \leqq p'_2 \leqq B'_2 \end{array}\right\} \quad (31)$$

Considérons une des expressions (30). Soit $F(t)$ le nombre de manières différentes dont il est possible d'écrire t sous cette forme, les nombres premiers étant situés dans les intervalles donnés ; par exemple, lorsque nous traitons f_6, $F(t)$ est le nombre des manières différentes dont il est possible d'écrire t sous la forme $p_1^2 - p_2^2 + p'$, où les nombres premiers p_1, p_2 et p' sont situés dans les intervalles

$$A_1 < p_1 < B_1; \quad A_2 < p_2 < B_2 \quad \text{et} \quad A' < p' < B'.$$

Comme je vais démontrer, $F(t)$ possède pour beaucoup de valeurs de t une valeur approximative, qui, à un facteur près, est égale à la fonction $\Phi(t)$, qui est définie comme suit:

$$\Phi(t) = \underset{|u \pm u' - t| \leqq \frac{1}{2}}{\int_A^B \int_{A'}^{B'}} \frac{du\, du'}{\log u \log u'} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (32)$$

pour les expressions $p \pm p'$;

$$\Phi(t) = \underset{|\pm u_1^2 \pm u_2^2 + u' - t| \leqq \frac{1}{2}}{\int_{A_1}^{B_1} \int_{A_2}^{B_2} \int_{A'}^{B'}} \frac{du_1\, du_2\, du'}{\log u_1 \log u_2 \log u'} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (33)$$

pour les expressions $\pm p_1^2 \pm p_2^2 + p'$;

$$\Phi(t) = \underset{|\pm u_1^2 \pm u_2^2 \pm u_1'^2 \pm u_2'^2 - t| \leqq \frac{1}{2}}{\int_{A_1}^{B_1} \int_{A_2}^{B_2} \int_{A'_1}^{B'_1} \int_{A'_2}^{B'_2}} \frac{du_1\, du_2\, du'_1\, du'_2}{\log u_1 \log u_2 \log u'_1 \log u'_2} \quad . \; . \; . \quad (34)$$

pour les expressions $\pm p_1^2 \pm p_2^2 \pm p_1'^2 \pm p_2'^2$.

Il va sans dire qu'il faut prendre toujours les signes correspondants; par exemple pour l'expression $-p_1{}^2+p_2{}^2+p'$, la fonction correspondante $\Phi(t)$ est

$$\iiint \frac{du_1\, du_2\, du'}{\log u_1 \log u_2 \log u'},$$

étendu à la région

$$A_1 \leqq u_1 \leqq B_1, \quad A_2 \leqq u_2 \leqq B_2, \quad A' \leqq u' \leqq B', \quad |-u_1{}^2+u_2{}^2+u'-t| \leqq \tfrac{1}{2}.$$

Comme je viens de dire, $F(t)$ possède pour beaucoup de valeurs de t, une valeur approximative, qui est, à un facteur près, égale à $\Phi(t)$. Ce facteur contient une fonction $H(q, t)$, qui est définie pour tout nombre naturel q et pour toute valeur entière de t, comme suit:

$$H(q,t) = \frac{1}{\varphi^2(q)} \sum_{a,h,h'} e^{2\pi i \frac{a}{q}(h+h'-t)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (35)$$

pour les expressions $p \pm p'$;

$$H(q,t) = \frac{1}{\varphi^3(q)} \sum_{a,h',h_1,h_2} e^{2\pi i \frac{a}{q}(h' \pm h_1{}^2 \pm h_2{}^2)} \quad \ldots\ldots \quad (36)$$

pour les expressions $\pm p_1{}^2 \pm p_2{}^2 + p'$;

$$H(q,t) = \frac{1}{\varphi^4(q)} \sum_{a,h_1,h_2,h_1',h_2'} e^{2\pi i \frac{a}{q}(\pm h_1{}^2 \pm h_2{}^2 \pm h_1'^2 \pm h_2'^2)} \quad \ldots\ldots \quad (37)$$

pour les expressions $\pm p_1{}^2 \pm p_2{}^2 \pm p_1'^2 \pm p_2'^2$;

$\varphi(q)$ est la fonction d'EULER, et les nombres $a, h, h', h_1, h_2, h_1', h_2'$ parcourent les nombres naturels $\leqq q$, qui sont premiers avec q. Il va encore sans dire qu'on doit prendre pour les termes quadratiques les signes correspondants; par exemple, dans l'examen de l'expression $p_1{}^2 - p_2{}^2 + p'$ la fonction $H(q, t)$ correspondante est égale à

$$H(q,t) = \frac{1}{\varphi^3(q)} \sum_{a,h',h_1,h_2} e^{2\pi i \frac{a}{q}(h' + h_1{}^2 - h_2{}^2)}.$$