Mathematics. — *Ueber eine Integraldarstellung der* WHITTAKER*schen Funktion*. Von C. S. MEIJER. (Communicated by Prof. J. G. VAN DER CORPUT).

(Communicated at the meeting of December 18, 1937.)

Die parabolische Zylinderfunktion $D_n(z)$ besitzt bekanntlich für $\Re(n) < 0$ die Integraldarstellung [1])

$$D_n(z) = \frac{e^{-\frac{1}{4}z^2}}{\Gamma(-n)} \int_0^\infty e^{-zu-\frac{1}{2}u^2} u^{-n-1}\, du. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Eine bekannte Integraldarstellung der Funktion $K_\nu(z)$ ist [2])

$$K_\nu(z) = \int_0^\infty e^{-z\cosh w} \cosh \nu w\, dw \qquad (z \neq 0, |\arg z| < \tfrac{1}{2}\pi). \quad . \quad (2)$$

In der vorliegenden Note werde ich zeigen, dass obige Formeln nur Spezialfälle der folgenden Beziehung sind

$$W_{k,m}(\zeta) = 2^{-2k+\frac{1}{2}} \zeta^{-k+\frac{1}{2}} \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}\zeta\cosh 2v} P_{2m-\frac{1}{2}}^{2k+\frac{1}{2}}(\cosh v)(\sinh v)^{-2k+\frac{1}{2}}\, dv. \quad . \quad (3)$$

In dieser Relation wird $\zeta \neq 0, |\arg \zeta| < \frac{1}{2}\pi$ und $\Re(k) < \frac{1}{4}$ vorausgesetzt; $W_{k,m}(\zeta)$ bezeichnet die WHITTAKERsche Funktion [3]) und $P_\nu^\mu(\zeta)$ die zugeordnete LEGENDREsche Funktion erster Art [4]).

Beweis von (3). Ist $\zeta \neq 0$ und $|\arg \zeta| < \frac{3}{2}\pi$, so besitzt die Funktion $W_{k,m}(\zeta)$ die Integraldarstellung [5])

$$W_{k,m}(\zeta) = \frac{e^{-\frac{1}{2}\zeta}\zeta^k}{\Gamma(a)} \int_0^{\infty e^{i\sigma}} e^{-t} F\left(\tfrac{1}{2}-m-k, \tfrac{1}{2}+m-k; a; -\frac{t}{\zeta}\right) t^{a-1}\, dt; \qquad (4)$$

---

[1]) Man vergl. E. T. WHITTAKER and G. N. WATSON, A course of modern analysis (4th edition, 1927), §§ 16.6 und 12.22.

[2]) Siehe G. N. WATSON, A treatise on the theory of BESSEL functions, S. 181 (1922).

[3]) WHITTAKER and WATSON, loc. cit., chapter XVI.

[4]) Für die Definition der Funktion $P_\nu^\mu(\zeta)$ vergl. man E. W. HOBSON, The theory of spherical and ellipsoidal harmonics, S. 188 (1931)

[5]) C. S. MEIJER, Ueber die Integraldarstellungen der WHITTAKERschen Funktion $W_{k,m}(z)$ und der HANKELschen und BESSELschen Funktionen, Nieuw Archief voor Wiskunde (2) **18** (2tes Heft), S. 35—57 (1934) (S. 36, Fussnote [3])).

hierin ist σ ein Punkt des Intervalles

$$Max\left(-\tfrac{1}{2}\pi, -\pi + arg\,\zeta\right) < \sigma < Min\left(\tfrac{1}{2}\pi, \pi + arg\,\zeta\right)$$

und α eine beliebige Zahl mit $\Re(\alpha) > 0$.

Nimmt man nun $\sigma = arg\,\zeta$, also $|arg\,\zeta| < \frac{1}{2}\pi$, $t = \frac{1}{2}\zeta(cosh\,2v - 1) = \zeta\,sinh^2 v$ und $\alpha = \frac{1}{2} - 2k$ $(\Re(k) < \frac{1}{4})$, so geht (4) über in[6])

$$\left.\begin{aligned} W_{k,m}(\zeta) &= \frac{2\zeta^{-k+\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2}-2k)}\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}\zeta cosh\,2v} \\ &\times F\left(\tfrac{1}{2}-m-k, \tfrac{1}{2}+m-k; \tfrac{1}{2}-2k; -sinh^2 v\right)(sinh\,v)^{-4k} cosh\,v\,dv \\ &= \frac{2\zeta^{-k+\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2}-2k)}\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}\zeta cosh\,2v} F(m-k, -m-k; \tfrac{1}{2}-2k; -sinh^2 v)(sinh\,v)^{-4k} dv. \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Man hat aber [7])

$$P_\nu^\mu(w) = \frac{2^\mu}{\Gamma(1-\mu)}(w^2-1)^{-\frac{1}{2}\mu} F\left(\frac{\nu-\mu+1}{2}, -\frac{\nu+\mu}{2}; 1-\mu; 1-w^2\right),$$

somit

$$P_{2m-\frac{1}{2}}^{2k+\frac{1}{2}}(cosh\,v) = \frac{2^{2k+\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2}-2k)}(sinh\,v)^{-2k-\frac{1}{2}} F(m-k, -m-k; \tfrac{1}{2}-2k; -sinh^2 v). \quad (6)$$

Integraldarstellung (3) ergibt sich jetzt aus (5) und (6).

Beweis von (1). Für die Funktion $D_n(z)$ gilt bekanntlich[8])

$$D_n(z) = 2^{\frac{1}{2}n+\frac{1}{4}} z^{-\frac{1}{2}} W_{\frac{1}{2}n+\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}}(\tfrac{1}{2}z^2).$$

Ist $z \neq 0$, $|arg\,z| < \frac{1}{4}\pi$ und $\Re(n) < 0$, so folgt also aus (3)

$$D_n(z) = z^{-n}\int_0^\infty e^{-\frac{1}{4}z^2 cosh\,2v} P_{-1}^{n+1}(cosh\,v)(sinh\,v)^{-n} dv. \quad . \quad . \quad (7)$$

Nun hat man [9])

$$P_\nu^\mu(w) = \frac{1}{\Gamma(1-\mu)}\left(\frac{w+1}{w-1}\right)^{\frac{1}{2}\mu} F\left(-\nu, \nu+1; 1-\mu; \frac{1-w}{2}\right),$$

somit

$$P_{-1}^{n+1}(cosh\,v)(sinh\,v)^{-n-1} = \frac{1}{\Gamma(-n)}(cosh\,v - 1)^{-n-1}.$$

---

6) Ich benutze die bekannte Beziehung $F(a, b; c; w) = (1-w)^{c-a-b} F(c-a, c-b; c; w)$.

7) HOBSON, loc. cit., S. 219.

8) WHITTAKER and WATSON, loc. cit., § 16.5.

9) HOBSON, loc. cit., S. 188.

Formel (7) ist daher äquivalent mit

$$D_n(z) = \frac{z^{-n}}{\Gamma(-n)} \int_0^\infty e^{-\frac{1}{4} z^2 \cosh 2v} (\cosh v - 1)^{-n-1} \sinh v \, dv. \quad . \quad . \quad (8)$$

Ich nehme nun vorläufig an, dass $z > 0$ ist, und setze

$$\cosh v = 1 + \frac{u}{z},$$

also

$$\cosh 2v = 1 + 4\frac{u}{z} + 2\frac{u^2}{z^2} \quad \text{und} \quad \sinh v \, dv = \frac{du}{z}.$$

Relation (8) geht dann über in

$$D_n(z) = \frac{e^{-\frac{1}{4} z^2}}{\Gamma(-n)} \int_0^\infty e^{-zu - \frac{1}{2} u^2} u^{-n-1} \, du,$$

so dass (1) bewiesen ist für den Fall, dass $z > 0$ ist. Durch analytische Fortsetzung schliesst man aber, dass (1) für alle Werte von z gültig ist.

Beweis von (2). Man hat [10])

$$K_\nu(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} \, W_{0,\nu}(2z);$$

hieraus und aus (3) (mit $v = \frac{1}{2} w$ angewendet) folgt (2), da

$$P^{\frac{1}{2}}_{\lambda - \frac{1}{2}}(\cosh v) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\cosh \lambda v}{(\sinh v)^{\frac{1}{2}}}$$

ist [11]).

10) C. S. MEIJER, Einige Integraldarstellungen für WHITTAKERsche und BESSELsche Funktionen, Proc. Royal Acad. Amsterdam, 37, 805—812 (1934), Formel (8).

11) Man vergl. HOBSON, loc. cit., S. 286.