Mathematics. — *Metrisches über die Approximation reeller Zahlen.* Von J. F. KOKSMA. (Communicated by Prof. J. G. VAN DER CORPUT).

(Communicated at the meeting of December 18, 1937.)

Das Ziel dieser Note ist der Beweis des folgenden Satzes.

Satz 1. *Seien* α, $\Lambda(x) \neq 0$, *und* $\Phi(x) > 0$ $(x = 1, 2, \ldots)$ *reell und die beiden Reihen*

$$\sum_{x=1}^{\infty} \Phi(x), \quad \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\Phi(x)}{|\Lambda(x)|} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

konvergent. Dann hat für fast alle reellen θ *das Ungleichungssystem*

$$\alpha - \Phi(x) \leqq \theta\, \Lambda(x) - y \leqq \alpha + \Phi(x) \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

höchstens eine endliche Anzahl Lösungspaare x, y *mit ganzen* $x > 0$, y.

Bemerkungen. 1. „Fast alle θ" bedeutet, dass die Menge der Ausnahmezahlen θ das LEBESGUEsche Mass Null hat. Es genügt offenbar den Satz zu zeigen unter der Einschränkung

$$q \leqq \theta \leqq q + 1,$$

angenommen, dass hierin q jede beliebige ganze rationale Zahl bedeuten kann.

2. Für $|\Lambda(x)| \geqq 1$ $(x = 1, 2, \ldots)$ folgt die Konvergenz der zweiten Reihe (1) offenbar aus jener der ersten Reihe (1) und genügt es z.B.

$$\Phi(1) = 1, \quad \Phi(x) = \frac{1}{x \log^2 x} \quad (x \geqq 2)$$

zu setzen.

3. Satz 1 bildet eine Verallgemeinerung der zweiten Hälfte des folgenden KHINTCHINEschen Approximationssatzes [1]).

Satz 2. *Es sei* $\Phi(x) > 0$ $(x = 1, 2, \ldots)$ *und es werde formal*

$$R = \sum_{x=1}^{\infty} \Phi(x)$$

gesetzt. Dann gilt

---

[1]) A. KHINTCHINE, Einige Sätze über Kettenbrüche, mit Anwendungen auf die Theorie der Diophantischen Approximationen. Math. Ann. 92, 115—125 (1924).

A. *Die Ungleichung*

$$|\theta x - y| < \Phi(x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

hat für fast alle reellen θ unendlich viele Lösungspaare x, y mit ganzen $x > 0$, y, falls $x\Phi(x)$ monoton ist und R divergiert.

B. *Die Ungleichung* (3) *hat für fast alle reellen θ höchstens endlich viele Lösungspaare x, y mit ganzen x, y, falls R konvergiert.*

In der Tat ist der „homogene lineare" Satz 2 B im „allgemeinen" Satz 1 mit $\alpha = 0$, $A(x) \equiv x$ enthalten. Der einfache KHINTCHINEsche Beweis des Satzes 2 B (dessen Grundgedanke sich übrigens schon bei Herrn BOREL [2]) findet) lässt sich leicht auf den Fall des Satzes 1 übertragen. Schwieriger ist die Frage, Satz 2 A ähnlich zu verallgemeinern, wie hier mit Satz 2 B geschieht. In dieser Richtung habe ich mit andern Methoden mehrere Sätze gezeigt. Die von diesen Sätzen gelieferten Approximationen sind aber weniger scharf, als man mit Hinsicht auf Satz 2 A erhoffen dürfte [3]).

Beweis des Satzes 1. Sei q eine beliebige ganze rationale Zahl und $q \leqq \theta \leqq q + 1$ (vgl. Bemerkung 1). Jedes Lösungspaar $x \geqq 1$, y von (2) genügt a fortiori den Ungleichungen

$$\frac{\alpha + y}{A(x)} - \frac{\Phi(x)}{|A(x)|} \leqq \theta \leqq \frac{\alpha + y}{A(x)} + \frac{\Phi(x)}{|A(x)|} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Nach den Voraussetzungen von Satz 1 gibt es ein ganzes $x_0 \geqq 1$, so dass $\Phi(x) < 1$ für $x \geqq x_0$ ist.

Ist nun $x \geqq x_0$ eine feste ganze Zahl, so liegen von den äquidistanten Punkten

$$\frac{y + \alpha}{A(x)} \; (y = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

$\left(\text{mit der Entfernung } \frac{1}{|A(x)|}\right)$ höchstens [4]) $[|A(x)|] + 1$ im Intervall $q \leqq \theta \leqq q + 1$. Wegen $\Phi(x) < 1$ haben also höchstens $[|A(x)|] + 3$ der Intervalle (4) einen Punkt mit $q \leqq \theta \leqq q + 1$ gemeinsam. Ihre Gesamtlänge ist

$$L(x) = \{[|A(x)|] + 3\} \frac{2\Phi(x)}{|A(x)|} \leqq \left\{2 + \frac{6}{|A(x)|}\right\} \Phi(x),$$

---

[2]) E. BOREL, Contribution à l'analyse arithmétique du continu. J. math. pures appl. (5) 9, 329—375 (1903).

[3]) J. F. KOKSMA, Metrisches zur Theorie der Diophantischen Approximationen. Proc. Royal Acad. Amsterdam, 39, 225—240 (1936).

Weitere Arbeiten sind in Vorbereitung.

[4]) Für reelles u bedeutet $[u]$ die grösste ganze Zahl $\leqq u$.

so dass wegen der Voraussetzungen des Satzes 1 die Reihe

$$\sum_{x=x_0}^{\infty} L(x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (6)$$

konvergiert. Bedeutet nun $\mathfrak{M}(x)$ die Durchschnittmenge der Vereinigungsmenge jener Intervalle (4) mit dem Intervall $q \leqq \theta \leqq q+1$, so ist das Mass von $\mathfrak{M}(x)$ gleich

$$\mathrm{m}\,\mathfrak{M}(x) \leqq L(x) \qquad (x \geqq x_0).$$

Wegen der Konvergenz von (6) gehören also fast alle θ aus $q \leqq \theta \leqq q+1$ höchstens einer endlichen Anzahl der Mengen $\mathfrak{M}(x)\,(x = x_0, x_0+1, \ldots)$, also höchstens einer endlichen Anzahl der Intervalle (4) mit $x \geqq x_0$ an. Q. e. d.