Mathematics. — *Die induzierte kovariante Ableitung für Spinoren.* Von J. HAANTJES. (Communicated by Prof. J. A. SCHOUTEN).

(Communicated at the meeting of January 29, 1938.)

Einleitung.

Bekanntlich bilden die kontravarianten Vektoren in jedem Punkte einer V_6 einen euklidischen 6-dimensionalen Raum, der mit R_6 bezeichnet wird. Es ist möglich die ∞^6 kontravarianten Vektoren der R_6 auf die ∞^6 kontravarianten Bivektordichten vom Gewicht $\frac{1}{2}$ eines 4-dimensionalen affinen Raumes (Bezeichnung E_4) abzubilden [1]). Jedem Punkte der V_6 wird nun eine E_4 zugeordnet, die wir *Spinraum* nennen. In dieser E_4 betrachten wir nur Affinordichten mit einem Gewicht, das gleich $\frac{1}{4}$ mal der Differenz zwischen kontra- und kovarianter Valenz ist. Diese Affinoren, die sich alle mit der Transformationsdeterminante $+1$ transformieren, nennt man *Spinoren*, insbesondere auch *Spinvektoren.* Wir identifizieren nun die Spinbivektoren der E_4 mit den kontravarianten Vektoren der lokalen R_6. Das Problem ist eine kovariante Ableitung für Spinvektoren zu bestimmen. Im zweiten Paragraphen wird das entsprechende Problem für eine V_5 behandelt.

§ 1. *V_6 und Spinraum.*

Wir betrachten einen RIEMANNschen Raum V_6 mit den Koordinaten $x^\varkappa$ $(\varkappa, \lambda, \mu, \nu, \varrho, \sigma, \tau = 1, \ldots, 6)$. Der Fundamentaltensor des Raumes sei mit $a_{\lambda\varkappa}$ bezeichnet. Jedem Punkte der V_6 sei eine E_4 zugeordnet mit den kartesischen Koordinaten X^A $(A, \ldots, G = 1, \ldots, 4)$. Die kontravarianten Vektoren $v^\varkappa$ in einem Punkte der V_6 identifizieren wir mit den Spinbivektoren v^{AB} der E_4 derart, dass die Bestimmungszahlen $v^\varkappa$ lineare homogene Funktionen der Bestimmungszahlen v^{AB} des entsprechenden Bivektors sind

$$v^\varkappa = \tfrac{1}{2}\, \chi^{\varkappa}_{.AB}\, v^{AB} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Die Umkehrung lautet

$$v^{AB} = \tfrac{1}{2}\, \chi_{\varkappa}^{.AB}\, v^\varkappa . \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Diese Korrespondenz kann man so wählen, dass der Fundamentaltensor

---

[1]) Vgl. W. VAN DER WOUDE, Ueber die Drehgruppe in R_6. Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa, II, 4, S. 163—174 (1935). J. A. SCHOUTEN und J. HAANTJES, R_6 und Spinraum. Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa, II, 4, S. 175—189 (1935), (weiterhin zitiert als Sp. I).

$a_{\lambda\varkappa}$ dem Spinquadrivektor a^{ABCD} entspricht, wo a^{ABCD} definiert ist durch die für alle Bezugssysteme gültige Gleichung

$$a^{1234} = \tfrac{1}{2}. \qquad (3)$$

Es ist dann

$$a^{\lambda\varkappa} = \tfrac{1}{4}\,\chi^{\lambda}_{.AB}\,\chi^{\varkappa}_{.CD}\,a^{ABCD}. \qquad (4)$$

Die a^{ABCD} und seine Umkehrung a_{ABCD}, definiert durch

$$a_{1234} = \tfrac{1}{2}, \qquad (5)$$

können verwendet werden zum *gleichzeitigen* Herauf- und Herunterziehen von zwei alternierenden Indizes. Die Gleichung (4) lässt sich dann auch schreiben

$$a^{\lambda\varkappa} = \tfrac{1}{4}\,\chi^{\lambda}_{.AB}\,\chi^{\varkappa\,AB}. \qquad (6)$$

Aus dieser Gleichung folgt (vgl. Sp. I, S. 177)

$$\chi^{(\varkappa}_{.BC}\,\chi^{\lambda)\,AC} = a^{\varkappa\lambda}\,\alpha^{A}_{B}, \qquad (7)$$

$$\chi_{\lambda}^{;AB}\,\chi^{\lambda}_{.CD} = 4\,\alpha^{A\,B}_{[C\,D]}, \qquad (8)$$

wo α^{A}_{B} der Einheitsspinor der E_4 ist.

Die Grösse $\chi^{\varkappa}_{.BC}$ ist eine Verbindungsgrösse, die in bezug auf den Index $\varkappa$ ein kontravarianter Vektor der V_6 und in bezug auf die Indizes B, C ein Spinbivektor (vom Gewicht $-\frac{1}{2}$) ist.

Es handelt sich jetzt darum, ausgehend von der RIEMANNschen Uebertragung in der V_6, eine Uebertragung für Spinvektoren zu bestimmen. Dazu setzen wir an

$$\nabla_{\mu}\,\chi^{\varkappa}_{.AB} = 0, \qquad (9)$$

eine Forderung, die nach (7) im Einklang ist mit $\nabla_{\mu}\,a^{\varkappa\lambda} = 0$. Bezeichnen wir die Uebertragungsparameter für Spinoren mit $\Lambda^{A}_{\mu B}$, so lautet (9) ausgeschrieben

$$0 = \partial_{\mu}\,\chi^{\varkappa}_{.AB} + \left\{ {\varkappa \atop \mu\lambda} \right\} \chi^{\lambda}_{.AB} - \Lambda^{E}_{\mu A}\,\chi^{\varkappa}_{.EB} - \Lambda^{E}_{\mu B}\,\chi^{\varkappa}_{.AE}. \qquad (10)$$

Wegen der Verabredung über das Gewicht der Spinoren ist

$$\Lambda^{A}_{\mu A} = 0. \qquad (11)$$

Die $\Lambda^{A}_{\mu B}$ sollen nun aus den Gleichungen (10) und (11) gelöst werden. Dazu bemerken wir, dass wegen (8)

$$\partial_{\mu}\,\chi^{\varkappa}_{.AB} = \tfrac{1}{4}\,(\partial_{\mu}\,\chi^{\varkappa}_{.CD})\,\chi_{\lambda}^{;CD}\chi^{\lambda}_{.AB} = p^{\ \varkappa}_{\mu\ \lambda}\,\chi^{\lambda}_{.AB}, \qquad (12)$$

ist, wo $p^{\varkappa}_{\mu\lambda}$ steht für $\frac{1}{4}(\partial_{\mu}\chi^{\varkappa}_{\cdot CD})\chi_{\lambda}^{\cdot CD}$. Die Parameter $\Lambda^{A}_{\mu B}$ lassen sich linear in den 16 linear unabhängigen gemischten Affinoren

$$a^{A}_{B},\ \chi^{[\varkappa\lambda]A}_{\cdot\ \cdot\ \cdot\ B} = \chi^{[\varkappa AC}\chi^{\lambda]}_{\cdot BC} \quad \ldots\ldots \quad (13)$$

ausdrücken. Es gilt nämlich für jedes $P^{A}_{\cdot B}$ die Identität

$$P^{A}_{\cdot B} \equiv (\tfrac{1}{8}\chi_{[\dot\mu\dot\lambda]\dot D}{}^{F} P^{D}_{\cdot F})\chi^{[\mu\lambda]A}_{\cdot\ \cdot\ \cdot\ B} + \tfrac{1}{4}P^{E}_{\cdot E}a^{A}_{B}. \quad \ldots \quad (14)$$

Wenden wir diese Identität an auf die $\Lambda^{A}_{\mu B}$, so verschwindet der Koeffizient von a^{A}_{B} wegen (11) und es resultiert eine Gleichung von der Form

$$\Lambda^{A}_{\mu B} = q_{\mu\varrho\sigma}\chi^{[\varrho\sigma]A}_{\cdot\ \cdot\ \cdot\ B}, \qquad (q_{\mu\varrho\sigma} = -q_{\mu\sigma\varrho}). \quad \ldots \quad (15)$$

Nach (12) und (15) geht (10) über in

$$\left(p^{\varkappa}_{\mu\lambda} + \left\{ {\varkappa \atop \mu\lambda} \right\}\right)\chi^{\lambda}_{\cdot AB} = q_{\mu\varrho\sigma}(\chi^{\varkappa}_{\cdot EB}\chi^{\varrho EF}\chi^{\sigma}_{\cdot AF} + \chi^{\varkappa}_{\cdot AE}\chi^{\varrho EF}\chi^{\sigma}_{\cdot BF}). \quad (16)$$

Für das rechte Glied kann man unter Berücksichtigung von (7) und $q_{\mu(\varrho\sigma)} = 0$ auch setzen

$$q_{\mu\varrho\sigma}\{4a^{\varkappa\varrho}\chi^{\sigma}_{\cdot AB} - \chi^{\varkappa EF}(\chi^{[\varrho}_{\cdot EB}\chi^{\sigma]}_{\cdot AF} + \chi^{[\sigma}_{\cdot FB}\chi^{\varrho]}_{\cdot EA})\} = 4a^{\varkappa\varrho}q_{\mu\varrho\lambda}\chi^{\lambda}_{\cdot AB}. \quad . \quad (17)$$

Daraus geht hervor

$$4q_{\mu\varrho\lambda} = a_{\varrho\varkappa}\left(p^{\varkappa}_{\mu\lambda} + \left\{ {\varkappa \atop \mu\lambda} \right\}\right). \quad \ldots\ldots \quad (18)$$

Man beweist leicht, ausgehend von (12), dass das rechte Glied dieser Gleichung alternierend in den Indizes $\varrho\lambda$ ist. Die Gleichung (9) kann also befriedigt werden und das Gleichungssystem (10, 11) hat eine eindeutig bestimmte Lösung. Setzt man (18) in (15) ein, so ergibt sich unter Berücksichtigung von (8)

$$\boxed{\Lambda^{A}_{\mu B} = \tfrac{1}{4}\left\{ {\varkappa \atop \mu\lambda} \right\}\chi_{\varkappa}^{\cdot AE}\chi^{\lambda}_{\cdot BE} + \tfrac{1}{4}(\partial_{\mu}\chi^{\varkappa}_{\cdot BE})\chi_{\varkappa}^{\cdot AE}.} \quad \ldots \quad (19)$$

In Spinraum führen wir neben den gewöhnlichen Grössen (*erster Gattung*) auch *Grössen zweiter Gattung* [1]) ein, die in bezug auf die komplexkonjugierten Koordinatentransformation definiert sind und gestrichene Indizes bekommen. Zu jedem Affinor erster Gattung im Spinraum, z.B. $P^{A}_{\cdot B}$, gehört ein Affinor zweiter Gattung mit den komplex-

---

[1]) Vgl. J. A. SCHOUTEN und D. J. STRUIK, Einführung in die neueren Methoden der Differentialgeometrie, NOORDHOFF, Groningen, I, S. 8, (1935).

konjugierten Bestimmungszahlen, den wir mit demselben Kernbuchstaben, aber überstrichen, bezeichnen, also $\overline{P}^{\cdot\bar{A}}_{\cdot\bar{B}}$. Daneben gibt es *hermitesche Affinoren*, die beide Arten von Indizes tragen.

Im Falle, dass der Index von $a_{\lambda\varkappa}$ *gerade* ist, existiert im Spinraum eine hermitesche Fundamentaltensordichte $\omega_{\bar{B}A}$ mit den Gewichten $-\frac{1}{4}$ (erster Gattung) und $-\frac{1}{4}$ (zweiter Gattung), also eine WEYLsche Dichte vom Gewicht $-\frac{1}{2}$. Diese Tensordichte genügt der Gleichung [1])

$$\omega_{\bar{B}A}\,\chi_{\varkappa}^{;AB}\,\omega_{\bar{A}B} = c\,\bar{\chi}_{\varkappa\bar{A}\bar{B}};\ c = \pm 1\ ^{2)}\ \ldots\ldots \quad (20)$$

Durch kovariante Differentiation dieser Gleichung erhält man unter Berücksichtigung von (9)

$$(\nabla_\mu\,\omega_{\bar{B}[A})\,\omega_{|\bar{A}|B]} + \omega_{\bar{B}[A}\,\nabla_{|\mu}\,\omega_{\bar{A}|B]} = 0.\ \ldots\ldots \quad (21)$$

Ueberschiebung mit $\omega^{B\bar{B}}$ ergibt

$$\nabla_\mu\,\omega_{\bar{A}A} - (\nabla_\mu\,\omega_{\bar{B}B})\,\omega^{B\bar{B}}\,\omega_{\bar{A}A} + \nabla_\mu\,\omega_{\bar{A}A} - 4\,\nabla_\mu\,\omega_{\bar{A}A} = 0\ . \quad (22$$

$\nabla_\mu\,\omega_{\bar{A}B}$ ist also proportional zu $\omega_{\bar{A}B}$. Aus (21) geht dann hervor, dass die kovariante Ableitung der Fundamentaltensordichte verschwindet:

$$\boxed{\nabla_\mu\,\omega_{\bar{A}B} = 0.}\ \ldots\ldots\ldots \quad (23)$$

Die kovariante Differentiation im Spinraum ist also mit dem Prozess des Herauf- und Herunterziehens von Indizes *kommutativ*.

§ 2. V_5 *und Spinraum.*

Ein fünfdimensionaler RIEMANNscher Raum kann immer als eine geodätische V_5 in einer V_6 aufgefasst werden. Die Gleichung der V_5 in der V_6 sei $\xi^6 = 0$. Die Koordinaten in der V_5 bezeichnen wir mit ξ^h $(h, i, j, k, l, m = 1, \ldots, 5)$. Die ξ^h, ξ^6 seien so gewählt, dass für den Fundamentaltensor $a_{\lambda\varkappa}$ $(\varkappa, \ldots, \tau = 1, \ldots, 6)$ der V_6 gilt

$$\partial_6\,a_{ih} = 0,\quad a_{i6} = 0,\quad a_{66} = -1.\ \ldots\ldots \quad (24)$$

Der Fundamentaltensor der V_5 ist dann a_{ih}. Die Komponenten des Fundamentaltensors $a_{\lambda\varkappa}$ sind also in bezug auf die bevorzugten Bezugssysteme (ξ^h, ξ^6) unabhängig von ξ^6. Es verschwinden infolgedessen $\left\{ {6 \atop \mu\lambda} \right\}$ und $\left\{ {\varkappa \atop \mu 6} \right\}$, woraus folgt, dass die V_5 in der V_6 geodätisch ist.

Definieren wir nun die Verbindungsgrösse $a^{hA}_{\cdot\cdot B}$ in folgender Weise [3])

$$a^{hA}_{\cdot\cdot B} = \chi^{hAE}\,\chi^{6}_{\cdot BE} = -\,\chi^{6AE}\,\chi^{h}_{\cdot BE}\,,\ \ldots\ldots \quad (25)$$

---

[1]) Sp. I, S. 182.

[2]) Es ist z.B. $c = +1$ für die Signatur $+ + + + - -$ und $c = -1$ für die Signatur $- - - - + +$.

[3]) Sp. I, S. 184.

so folgt mittels (7) und (24)

$$\alpha^{(h\,A}_{\;.\;.\;C}\,\alpha^{i)\,C}_{\;.\;.\;B} = -\,\chi^{h\,AE}\,\chi_{CE}\,\chi^{CF}\,\chi^{i)}_{\;.BF} = \chi^{(h\,AE}\,\chi^{i)}_{\;.BE} = a^{h\,i}\,\alpha^A_B\,. \quad . \qquad (26)$$

wo χ_{AB} für $\chi^6_{\;.AB}$ steht. Die $\alpha^{h\,A}_{\;.\;.\;B}$ bilden die DIRAC*schen Zahlen*, die in der projektiven Feldtheorie auftreten.

Wir werden jetzt eine kovariante Ableitung für Affinordichten im Spinraum ableiten, ausgehend von der Forderung

$$\nabla_j\,\alpha^{h\,A}_{\;.\;.\;B} = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (27)$$

Im folgenden wird sich herausstellen, dass die Parameter $\Lambda^A_{j\,B}$ durch diese Forderung eindeutig bestimmt sind. Daraus geht dann hervor, dass diese Parameter $\Lambda^A_{j\,B}$ mit den im vorigen Paragraphen abgeleiteten Parametern identisch sind, denn eine Uebertragung, die der Gleichung (9) genügt, genügt wegen (25) auch der Gleichung (27). (Die V_5 ist in V_6 geodätisch!). Insbesondere gilt auch für diese Uebertragung infolge (23) $\nabla_j\,\omega_{\bar{A}\,B} = 0$.

Die Gleichung (27) lautet ausgeschrieben

$$0 = \partial_j\,\alpha^{h\,A}_{\;.\;.\;B} + \left\{ {h \atop j\;i} \right\} \alpha^{i\,A}_{\;.\;.\;B} + \Lambda^A_{jC}\,\alpha^{h\,C}_{\;.\;.\;B} - \Lambda^C_{jB}\,\alpha^{h\,A}_{\;.\;.\;C} \quad . \quad . \quad . \qquad (28)$$

Nach (14) gilt für jedes $P^A_{\;.B}$ die Identität

$$P^A_{\;.B} = (-\tfrac{1}{8}\,\alpha_{[h\,i]\;.\;D}^{\;.\;.\;C}\,P^D_{\;.C})\,\alpha^{[h\,i]\,A}_{\;.\;.\;.\;B} + \tfrac{1}{4}\,(\alpha_{i\;.\;D}^{\;.\;F}\,P^D_{\;.F})\,\alpha^{i\,A}_{\;.\;.\;B} + \tfrac{1}{4}\,P^E_{\;.E}\,\alpha^A_B \quad . \qquad (29)$$

Es gilt also eine Gleichung von der Form

$$\partial_j\,\alpha^{h\,A}_{\;.\;.\;B} = r^h_{j\,i}\,\alpha^{i\,A}_{\;.\;.\;B} + r^h_{j[k\,i]}\,\alpha^{[k\,i]\,A}_{\;.\;.\;.\;B} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (30)$$

Die Koeffizienten $r^h_{j\,i}$ und $r^h_{j\,[k\,i]}$ können mit Hilfe von (29) berechnet werden. Sie bilden keine Affinoren. Die Gleichung (30) kann aber auch aus (12) erhalten werden. Es ist nämlich

$$\left.\begin{aligned} (\partial_j\,\alpha^{h\,A}_{\;.\;.\;B}) &= (\partial_j\,\chi^{h\,A\,C})\,\chi_{BC} + (\partial_j\,\chi_{BC})\,\chi^{h\,A\,C} \\ &= p^h_{j\,i}\,\chi^{i\,AC}\,\chi_{BC} - p^h_{j6}\,\alpha^A_B + p^6_{j\,i}\,\chi^{h\,i\,A}_{\;.\;.\;.\;B} \\ &= p^h_{j\,i}\,\alpha^{i\,A}_{\;.\;.\;B} + p^6_{j\,i}\,\alpha^{[h\,i]\,A}_{\;.\;.\;.\;B}, \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (31)$$

woraus in Verbindung mit (30) hervorgeht, dass $r^h_{j\,[k\,i]}$ die folgende Form hat

$$r^h_{j\,[k\,i]} = r_{j\,[i}\,A^h_{k]}\,; \quad r_{j\,i} = \tfrac{1}{2}\,r^{\;h}_{j\,h\,i} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (32)$$

Nach (29) ist

$$r^h_{j\,i} = \tfrac{1}{4}\,(\partial_j\,\alpha^{h\,A}_{\;.\;.\;B})\,\alpha_{i\;.\;A}^{\;.\;B}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (33)$$

$$r_{j\,i} = \tfrac{1}{2}\,r^{\;h}_{j\,h\,i} = -\,\tfrac{1}{16}\,(\partial_j\,\alpha^{h\,A}_{\;.\;.\;B})\,\alpha_{h\,i\;.\;A}^{\;.\;.\;B}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (34)$$

Schreiben wir (auf Grunde von (29))

$$\Lambda^{A}_{jB} = s_{ji}\, a^{i\,A}_{\cdot\,\cdot\,B} + s_{jih}\, a^{[ih]A}_{\cdot\,\cdot\,\cdot\,B}, \quad \ldots \ldots \quad (35)$$

so geht (28) über in

$$\left(r^{h}_{ji} + \left\{ {h \atop j\,i} \right\} \right) a^{i} + r_{ji}\, a^{[hi]} + 2\, s_{ji}\, a^{[ih]} + s_{jil}\, a^{ilh} - s_{jil}\, a^{hil} = 0 \,. \quad (36)$$

(die Indizes $A, B \ldots$ sind unterdrückt). Wegen (25) gilt aber

$$a^{ilh} = -\, a^{ihl} + 2\, a^{hl} a^{i} = a^{hil} - 2\, a^{ih} a^{l} + 2\, a^{hl} a^{i} \,. \quad \ldots \quad (37)$$

Substitution in (36) ergibt einen Ausdruck, der linear in a^i und $a^{[hi]}$ ist. Da a^i und $a^{[hi]}$ linear unabhängig sind, verschwinden die Koeffizienten, d.h. es ist

$$r^{h}_{ji} + \left\{ {h \atop j\,i} \right\} + 4\, s_{jil}\, a^{lh} = 0, \quad \ldots \ldots \quad (38)$$

$$r_{ji} + 2\, s_{ji} = 0, \quad \ldots \ldots \quad (39)$$

und aus diesen Gleichungen geht hervor

$$s_{jil}\, a^{lh} = -\tfrac{1}{4} \left\{ {h \atop j\,i} \right\} - \tfrac{1}{16} \left(\partial_j\, a^{hA}_{\cdot\,\cdot\,B}\right) a_{i\,\cdot\,A}^{\cdot\,B} \,. \quad \ldots \quad (40)$$

$$s_{ji} = -\tfrac{1}{32} \left(\partial_j\, a^{hA}_{\cdot\,\cdot\,B}\right) a_{hi\,\cdot\,A}^{\cdot\,\cdot\,B} \,. \quad \ldots \ldots \quad (41)$$

Für die Parameter Λ^{A}_{jB} finden wir somit den folgenden Ausdruck

$$\boxed{\begin{aligned} \Lambda^{A}_{jB} = -\tfrac{1}{4} \left\{ {h \atop j\,i} \right\} a^{i\,\cdot\,A}_{\cdot\,h\,\cdot\,B} - \tfrac{1}{16} \left(\partial_j\, a^{hC}_{\cdot\,\cdot\,D}\right) a_{i\,\cdot\,C}^{\cdot\,D}\, a^{i\,\cdot\,A}_{\cdot\,h\,\cdot\,B} - \\ - \tfrac{1}{32} \left(\partial_j\, a^{hC}_{\cdot\,\cdot\,D}\right) a_{hi\,\cdot\,C}^{\cdot\,\cdot\,D}\, a^{i\,A}_{\cdot\,\cdot\,B} \end{aligned}} \quad \ldots \quad (42)$$

Für Bezugssysteme, in bezug auf welche die Bestimmungszahlen von $a^{hA}_{\cdot\,\cdot\,B}$ konstant sind, erhält man die Gleichung [1])

$$\Lambda^{A}_{jB} \overset{*}{=} -\tfrac{1}{4} \left\{ {h \atop j\,i} \right\} a^{i\,\cdot\,A}_{\cdot\,h\,\cdot\,B} \,. \quad \ldots \ldots \quad (43)$$

---

[1]) Vgl. J. A. SCHOUTEN, Dirac equations in general relativity. Journal of Math. and Phys., **10**, S. 280 (1931). J. A. SCHOUTEN und D. VAN DANTZIG, Generelle Feldtheorie, Zs. für Physik **78**, S. 661 (1932) und J. A. SCHOUTEN, La théorie projective de la relativité. Annales de l'Institut Henri Poincaré **5**, S. 83 (1935). Die in diesen Arbeiten angegebene Formel für Λ^{A}_{jB} in bezug auf solche Bezugssysteme bei denen die $a^{hA}_{\cdot\,\cdot\,B}$ nicht konstant sind, ist also unrichtig. Die weiteren Resultate dieser Arbeiten sind von diesem Fehler unabhängig.