Mathematics. — *Contribution à la théorie additive des nombres.* Par J. G. VAN DER CORPUT. (Troisième communication).

(Communicated at the meeting of April 30, 1938).

Lemme 6: *Si nous désignons par α un nombre positif $\leqq 1$ et par t un entier $\geqq 4$, nous avons*

$$\left| \sum_{h=2}^{t-2} \frac{h^{-1+\alpha}}{\log (t-h)} - \frac{t^\alpha}{\alpha \log t} \right| < \frac{c_{49}\, t^\alpha}{(\log t)^2},$$

où c_{49} ne dépend que de α.

Démonstration: Nous avons

$$\sum_{2 \leqq h \leqq t - \sqrt{t}} h^{-1+\alpha} \frac{\log t - \log (t-h)}{\log (t-h)}$$

$$\leqq \sum_{2 \leqq h \leqq t - \sqrt{t}} \left(\frac{h+1}{2}\right)^{-1+\alpha} \frac{\log t - \log (t-h)}{\frac{1}{2} \log t}$$

$$< \frac{2^{2-\alpha}}{\log t} \int_0^t u^{-1+\alpha} \left(\log \frac{t}{t-u}\right) du$$

$$= \frac{2^{2-\alpha}\, t^\alpha}{\log t} \int_0^1 v^{-1+\alpha} \left(\log \frac{1}{1-v}\right) dv,$$

$$\sum_{t - \sqrt{t} < h \leqq t-2} h^{-1+\alpha} \frac{\log t - \log (t-h)}{\log (t-h)} \leqq \sum_{t - \sqrt{t} < h \leqq t-2} (\tfrac{1}{2} t)^{-1+\alpha} \frac{\log t}{\log 2}$$

$$< 2^{1-\alpha}\, t^{-\frac{1}{2}+\alpha} \frac{\log t}{\log 2}$$

et

$$\left| \sum_{h=2}^{t-2} h^{-1+\alpha} - \frac{t^\alpha}{\alpha} \right| < c_{50},$$

c_{50} désignant un nombre dépendant uniquement de α. Le lemme est donc une conséquence de l'identité

$$\sum_{h=2}^{t-2} \frac{h^{-1+\alpha}}{\log (t-h)} = \sum_{h=2}^{t-2} \frac{h^{-1+\alpha}}{\log t} + \frac{1}{\log t} \sum_{h=2}^{t-2} h^{-1+\alpha} \frac{\log t - \log (t-h)}{\log (t-h)}.$$

Comme je l'ai déjà fait remarquer dans la deuxième communication, il est possible de déduire les propositions 3 et 4 de la proposition 2, mais après avoir écrit la communication précédente, j'ai constaté que dans la proposition 2 la condition, exprimée par l'inégalité (22), est superflue, c'est-à-dire, au lieu de la proposition 2, j'ai également à ma disposition le théorème suivant.

Proposition 5: *Supposons que les conditions de la proposition 1 soient vérifiées, que la fonction $H(q,t)$ possède la propriété multiplicative, exprimée par (18), et qu'elle satisfasse pour tout nombre naturel q, tout entier t et tout nombre naturel m à l'inégalité*

$$|H(q,t)| \leqq \gamma_m q^{-1+\frac{1}{m}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (32)$$

Sous ces conditions on a pour tout nombre positif m et pour tout nombre $\omega > m$

$$\sum_{t=2}^{[N]} \Big| L(t) - \Lambda(t) \prod_p \sum_{\zeta=0}^{\left[\frac{\omega \log \log t}{\log p}\right]} H(p^\zeta, t) \Big|^2 < c_{51} \Gamma^2 \Gamma'^2 N^3 n^{-m},$$

où c_{51} dépend uniquement de m, l, ω et des suites (γ) et (η).

Démonstration: La démonstration est analogue à celle de la proposition 2. Nous appliquons la proposition 1, où m est remplacé par le plus petit entier $\geqq m+1$, de sorte que nous trouvons un entier $\sigma \geqq m+1$, dépendant uniquement de m et de la suite (η), et aussi un nombre c_{19}, dépendant uniquement de m, l et des suites (γ) et (η), tels que la seconde formule, figurant à la page 355, soit vérifiée. De la même manière que dans la démonstration de la proposition 2 pour le résultat analogue nous observons qu'il suffit de déduire les inégalités

$$\sum_{\sqrt{N}<t\leqq N} \Big| \sum_q{}_\tau H(q,t) \Big|^2 < c_{52} N n^{-m} \qquad (\tau = 6, 7 \text{ et } 8); \quad . \quad . \quad . \quad (33)$$

$\sum_q{}_6$ est étendu à tous les nombres naturels $q \leqq n^\sigma$ possédant au moins un diviseur $p^\zeta > (\log t)^\omega$; $\sum_q{}_7$ est étendu à tous les entiers $q > n^\sigma$ et $\leqq N^{\frac{1}{4l+7}}$ dont tous les diviseurs de la forme p^ζ sont $\leqq (\log t)^\omega$, tandis que $\sum_q{}_8$ est étendu à tous les entiers $q > N^{\frac{1}{4l+7}}$ dont tous les diviseurs de la forme p^ζ sont $\leqq (\log t)^\omega$; dans cette démonstration $c_{52}, c_{53}, \ldots, c_{65}$ dépendent uniquement de m, l, ω et des suites (γ) et (η).

On a

$$\sum_{\sqrt{N}<t\leqq N} \Big| \sum_q{}_6 H(q,t) \Big|^2 = \sum_{\sqrt{N}<t\leqq N} \sum_q{}_6 \sum_{q'}{}_6 H(q,t) \overline{H}(q',t) = U_3 + U_4,$$

où U_3 est la contribution des termes avec $q = q'$, tandis que U_4 est la contribution des autres termes. Dans chaque terme de $\sum_q{}_6$ on a

$q > (\log t)^{\omega} \geqq (\frac{1}{2} n)^{\omega}$; en appliquant (32), où m est remplacé par le plus petit entier $\geqq \frac{2\omega}{\omega - m}$, on obtient donc

$$| U_3 | \leqq c_{53} N \sum_{q > (\frac{1}{2} n)^{\omega}} q^{-2 + \frac{\omega - m}{\omega}} < c_{54} N n^{-m}.$$

De la même manière que dans la démonstration de la proposition 2 pour le résultat analogue on trouve

$$| U_4 | \leqq \left\{ \sum_{q=1}^{[n^{\sigma}]} \sum_{\substack{a=0 \\ (a,q)=1}}^{q-1} q \left| \lambda\left(\frac{a}{q}\right) \lambda'\left(\frac{a}{q}\right) \right| \right\}^2$$

$$\leqq \gamma_1^{\,4} \left\{ \sum_{q=1}^{[n^{\sigma}]} q^{2l+2} \right\}^2 \quad \text{en vertu de (3)}$$

$$< c_{55}\, n^{2\sigma(2l+3)} < c_{56} N n^{-m}.$$

De la même manière on démontre qu'à l'expression

$$\sum_{\sqrt{N} < t \leqq N} | \sum_{q}{}_7 H(q, t) |^2 = \sum_{\sqrt{N} < t \leqq N} \sum_{q}{}_7 \sum_{q'}{}_7 H(q, t) \overline{H}(q', t)$$

la contribution des termes avec $q = q'$ est inférieure à

$$c_{57} N \sum_{q > n^{\sigma}} q^{-2 + \frac{\sigma - m}{\sigma}} < c_{58} N n^{-m}$$

et que la contribution des autres termes est tout au plus égale à

$$\gamma_1^{\,4} \Big\{ \sum_{q=1}^{\left[N^{\frac{1}{4l+7}}\right]} q^{2l+2} \Big\}^2 < c_{59} N^{\frac{4l+6}{4l+7}} < c_{60} N n^{-m}.$$

Pour tout $Q \geqq 2 N^{\frac{1}{4l+7}}$ nous avons $\log t \leqq n < (4l + 7) \log Q$; en appliquant de lemme 5 (p. 353) avec $\varrho = \frac{1}{2 + 2\omega}$ et $x = (\log t)^{1+\omega}$, nous trouvons que la somme $\sum_{q}{}_8$ renferme moins de

$$c_{61}\, Q^{1 - \frac{1}{2+2\omega}} e^{8(\omega+1)\sqrt{\log t}} < c_{62}\, Q^{1 - \frac{1}{3+3\omega}}$$

termes tels que l'on ait $\frac{1}{2} Q < q \leqq Q$. La contribution de ces termes à $\sum_{q}{}_8 H(q, t)$ est, en vertu de (32), où m est remplacé par le plus petit entier $\geqq 6 + 6\omega$, inférieure à $c_{61}\, Q^{-\frac{1}{6+6\omega}}$. On a donc

$$| \sum_{q}{}_8 H(q, t) | < c_{64} N^{-\frac{1}{(6+6\omega)(4l+7)}} < c_{65}\, n^{-m},$$

d'où suit l'inégalité (33) pour $\tau = 8$.

Ainsi nous avons obtenu (33) pour $\tau = 6, 7$ et 8, de sorte que la proposition 5 est démontrée.

Cette proposition me permet de trouver au lieu de la proposition 4 le résultat suivant:

Proposition 6: *Si m est un nombre positif et si ν est supérieur à $3mg + 2m + 2g$, presque tout entier $t \geqq 4$ tel que $t - \psi(0)$ soit premier avec G satisfait à la relation*

$$F(t) = \left(1 + \frac{\theta}{(\log t)^m}\right) \Phi(t)\, \Omega_\nu(t) \quad \text{où} \quad |\theta| < 1.$$

Le nombre des exceptions $\leqq N$ est même pour tout $N \geqq 3$ inférieur à $c_{66} N (\log N)^{-m}$, où c_{66} dépend uniquement de m, ν et du choix du polynôme $\psi(x)$.

Dit d'une autre façon: on peut remplacer le second membre $2^{g-2}(3mg + 2m + 2g)$ de (30) par $3mg + 2m + 2g$. Il va sans dire que la proposition 4 suit immédiatement du dernier théorème pour tout $g \geqq 2$. Dans le cas particulier où g est égal à 1, la proposition 4 est évidente; en effet $F(t)$ est alors simplement le nombre des manières dont on peut écrire t sous la forme $p + bx + b'$, où b et b' sont des entiers donnés ($b > 0$); l'inégalité (31) est alors valable pour tout nombre naturel suffisamment grand t tel que $t - b'$ soit premier avec b.

Les propositions 3 et 6 ne sont que des cas particuliers des propositions 7 et 8 figurant dans la suivante application.

Deuxième application.

Introduisons un polynôme

$$\psi(x) = bx^g + \ldots \qquad (b > 0,\ g > 0)$$

du $g^{\text{ième}}$ degré qui prend des valeurs entières pour toutes les valeurs entières de x; introduisons en outre deux nombres naturels K et U et un entier u premier avec U. Posons la question quels nombres naturels t possèdent la forme $Kp + \psi(x)$, où p est un nombre premier $\equiv u \pmod U$ et x un nombre naturel.

Désignons par G le plus grand commun diviseur de tous les nombres $\psi(x) - \psi(0)$, où x est entier. Soit E l'ensemble des nombres naturels t qui satisfont pour tout facteur premier P de KUG à la condition suivante, dans laquelle P^ω désigne la puissance la plus élevée de P qui est un diviseur de KU.

1. Si P n'est pas un facteur de U, il existe au moins un entier X tel que $\psi(X) - t$ soit divisible par P^ω, mais non par $P^{\omega+1}$.

2. Si P est un facteur de U, il existe au moins un entier X tel que $\psi(X) + Ku - t$ soit divisible par P^ω.

Considérons d'abord un nombre naturel t qui n'appartient pas à cet ensemble E et qui possède la susdite forme $Kp + \psi(x)$ où $p \equiv u \ (mod.\ U)$.

Puisque t n'appartient pas à E, au moins un facteur premier P de KUG jouit de la propriété suivante:

1. Si P n'est pas un facteur de U, tout nombre de la forme $\psi(X)-t$ (où X est entier) qui est divisible par P^{ω}, est même divisible par $P^{\omega+1}$. Parce que U n'est pas divisible par P, le nombre K est divisible par P^{ω}, de sorte que $-Kp=\psi(x)-t$ est divisible par P^{ω}, c'est-à-dire par $P^{\omega+1}$, d'où il suit que p est divisible par P, donc égal à P.

2. Si P était un facteur de U, il n'y aurait aucun entier X tel que $\psi(X)+Ku-t$ soit divisible par P^{ω}; ce cas est donc exclu, puisque $\psi(x)+Ku-t$ est divisible par KU, par conséquent par P^{ω}.

Ainsi nous avons obtenu le résultat suivant:

Si un nombre naturel t, n'appartenant pas à E, possède la susdite forme $Kp+\psi(x)$, où $p\equiv u \pmod{U}$, ce nombre p est nécessairement un facteur de KG.

Pous les nombres appartenant à E je déduirai le résultat suivant:

Proposition 7: *Presque tout entier appartenant à E possède la susdite forme. A tout nombre naturel m correspond même un nombre c_{67} dépendant uniquement de m, K, U et du choix du polynôme $\psi(x)$ tel que le nombre des exceptions $\leqq N$ soit pour tout $N\geqq 3$ inférieur à $c_{67}\,N(\log N)^{-m}$.*

Je vais traiter plus amplement un cas particulier. Je me demande quels nombres naturels t possèdent la forme $t=3p+x^4$, où p est un nombre premier $\equiv 1 \pmod{3}$ et où x désigne un nombre naturel. Dans ce cas on a

$$K=U=3,\quad u=G=1,\quad \psi(x)=x^4;$$

E est l'ensemble des nombres naturels t auxquels correspond au moins un entier X tel que X^4+3-t soit divisible par 9. E est donc l'ensemble des nombres naturels t qui sont congrus à 1, 3, 4 ou 7 $(mod.\ 9)$. Ainsi nous obtenons le résultat suivant: presque tout nombre naturel t qui est congru à 1, 3, 4 ou 7 $(mod.\ 9)$ possède la forme $t=3p+x^4$, où p est un nombre premier $\equiv 1 \pmod{3}$. De la même manière nous trouvons: presque tout nombre naturel t qui est congru à 1, 4, 6 ou 7 $(mod.\ 9)$ peut être mis sous la forme $t=3p+x^4$, où le nombre premier p est $\equiv 2 \pmod{3}$.

Afin de démontrer la proposition 7, il suffit de traiter le cas particulier où $\psi(x)$ est un polynôme à coefficients entiers. En effet, supposons que ce cas particulier est déjà démontré. Les coefficients du polynôme $g!\,\psi(x)$ sont entiers. $g!\,G$ est le plus grand commun diviseur de tous les nombres $g!\,\psi(x)-g!\,\psi(0)$, où x est entier. Soit E^* l'ensemble des nombres naturels τ qui satisfont pour tout facteur premier P de $g!\,g!\,KUG$ à la condition suivante, dans laquelle P^{ξ} désigne la puissance la plus élevée de P qui est un diviseur de $g!\,KU$:

1. Si P n'est pas un facteur de U, il existe au moins un entier X tel que $g!\,\psi(X)-\tau$ soit divisible par P^{ξ}, mais non par $P^{\xi+1}$.

2. Si P est un facteur de U, il existe au moins un entier X tel que $g!\,\psi(X)+g!\,Ku-\tau$ soit divisible par p^{ξ}.

Afin de démontrer que pour tout élément t de E le produit $g!\,t$ appartient à $E^{\star}$, je distingue trois cas différents:

I. Soit P un facteur de KG, mais pas de U. L'entier X tel que $\psi(X)-t$ soit divisible par P^{ω}, mais non par $P^{\omega+1}$, satisfait à la condition que $g!\,\psi(X)-g!\,t$ est divisible par P^{ξ}, mais non par $P^{\xi+1}$.

II. Soit P un facteur de U. L'entier X tel que $\psi(X)+Ku-t$ soit divisible par P^{ω} satisfait à la condition que $g!\,\psi(X)+g!\,Ku-g!\,t$ est divisible par P^{ξ}.

III. Soit P un facteur de $g!$, mais pas de KUG. Alors P^{ξ} est la puissance la plus élevée de P qui est un diviseur de $g!$. Puisque P n'est pas un facteur du plus grand commun diviseur G de tous les nombres $\psi(x)-\psi(0)$, où x est entier, on peut trouver un entier X tel que $\psi(X)-t$ ne soit pas divisible par P, de sorte que $g!\,\psi(X)-g!\,t$ est divisible par P^{ξ}, mais non par $P^{\xi+1}$.

Ainsi j'ai démontré que $g!\,t$ appartient à $E^{\star}$ pour tout nombre t appartenant à E. D'après la proposition 7, appliquée avec $g!\,\psi(x)$, $g!\,K$, $g!\,G$, $g!\,N$ et $E^{\star}$ au lieu de $\psi(x)$, K, G, N et E, presque tout nombre $g!\,t$ appartenant à $E^{\star}$ possède la forme $g!\,Kp+g!\,\psi(x)$, dans laquelle le nombre premier p est congru à u (*mod.* U), tandis que x est un nombre naturel. Le nombre des exceptions $\leqq g!\,N$ est pour tout $N\geqq 3$ inférieur à $c_{52}\,N(\log N)^{-m}$, où c_{52} dépend uniquement de m, K, U et du choix du polynôme $\psi(x)$. Par conséquent presque tout entier appartenant à E possède la forme $Kp+\psi(x)$, où p est congru à u (*mod.* U) et le nombre des exceptions $\leqq N$ est pareillement inférieur à $c_{52}\,N(\log N)^{-m}$.

Dans ce qui suit dans cette deuxième application je me bornerai à un polynôme $\psi(x)$ dont tous les coefficients sont entiers.

Désignons par $F(t)$ le nombre des manières dont on peut écrire un entier donné $t>1$ sous la susdite forme ; posons

$$\Phi(t)=K^{-1}\,g^{-1}\,b^{-\frac{1}{g}}\,.\,\varphi^{-1}(U)\sum_{h=2}^{t-2K}\frac{h^{-1+\frac{1}{g}}}{\log(t-h)-\log K}\,.\quad .\quad .\qquad (34)$$

($\Phi(t)$ s'annule donc pour tout $t<2K+2$) et

$$\Omega_r^{*}(t)=\prod_{p\leqq(\log t)^{r}}W(p,t),$$

où $W(p,t)$ est défini pour tout entier t et pour tout nombre premier p de la manière suivante (dans cette définition p^{ω} est la puissance la plus élevée de p, qui est un diviseur de KU):
pour un nombre premier p qui n'est pas un facteur de U, le produit $(p-1)\,W(p,t)$ est le nombre des nombres naturels $h\leqq p^{\omega+1}$ tels que $\psi(h)-t$ soit divisible par p^{ω}, mais non par $p^{\omega+1}$;

pour un facteur premier p de U le nombre $W(p, t)$ est égal au nombre des nombres naturels $h \leqq p^{\omega}$ tels que $\psi(h) + Ku - t$ soit divisible par p^{ω}.

$W(p, t)$ est positif pour tout entier $t > 1$ et pour tout nombre premier p qui n'est pas un facteur de KUG. En effet, $(p-1)\,W(p, t)$ est alors le nombre des nombres naturels $h \leqq p$ tels que $\psi(h) - t$ ne soit pas divisible par p; la relation $W(p, t) = 0$ impliquerait que p est un facteur de tous les nombres $\psi(x) - t$ (x entier), par conséquent de $\psi(x) - \psi(0)$, de sorte que p serait un facteur de G.

Pour un facteur premier p de KUG il suit de la définition de l'ensemble E que $W(p, t)$ est positif ou nul, selon que l'entier $t > 1$ appartient à E ou non. Si l'on choisit l'entier $t > 1$ et le nombre ν tels que $(\log t)^{\nu}$ soit supérieur ou égal au plus grand facteur premier de KUG, le nombre $\Omega_{\nu}^{*}(t)$ est donc positif ou nul, selon que t appartient à E ou non.

Comme nous le verrons, $F(t)$ possède pour presque tout entier $t > 1$ la valeur approximative $\Phi(t)\,\Omega_{\nu}^{*}(t)$, où ν est assez grand. Cette remarque est évidente pour les entiers $t > 1$ n'appartenant pas à E. En effet, pour un tel nombre, $F(t)$ est, comme nous l'avons observé, borné, tandis que $\Phi(t)\,\Omega_{\nu}^{*}(t)$ s'annule si l'on choisit ν supérieur ou égal au plus grand facteur premier de KUG. Pour les nombres t appartenant à E la remarque résulte de la proposition suivante:

Proposition 8: *Si m est positif et si ν est supérieur à $3mg + 2m + 2g$, presque tout nombre t appartenant à E satisfait à la relation*

$$F(t) = \left(1 + \frac{\theta}{(\log t)^{m}}\right) \Phi(t)\,\Omega_{\nu}^{*}(t) \quad \text{où } |\theta| < 1.$$

Le nombre des exceptions $\leqq N$ est même pour tout $N \geqq 3$ inférieur à $c_{69}\,N(\log N)^{-m}$, où c_{69} dépend uniquement de m, ν, K, U et du choix du polynôme $\psi(x)$.

Il va sans dire que la proposition 7 est une conséquence immédiate de la proposition 8. Cette dernière proposition résulte de la proposition suivante, comme je le démontrerai dans la suite.

Proposition 9: *Si M est un nombre positif et si ν est supérieur à $g\,M$, on a pour tout nombre $N \geqq 3$*

$$\sum_{t=2}^{[N]} |F(t) - \Phi(t)\,\Omega_{\nu}(t)|^{2} < c_{70}\,N^{1+\frac{2}{g}}\,n^{-M},$$

où c_{70} dépend uniquement de M, ν, K, U et du choix du polynôme $\psi(x)$.

Pour la démonstration de cette proposition j'ai besoin de 7 lemmes.

Lemme 7: (*Théorème de* SIEGEL-WALFISZ). *A tout nombre naturel m correspond un nombre c_{71}, dépendant uniquement de m, tel que l'inégalité*

$$\left| \sum_{\substack{p \leqq x \\ p \equiv h \,(\mathrm{mod.}\, k)}} 1 - \frac{1}{\varphi(k)} \int_{2}^{x} \frac{du}{\log u} \right| < \frac{c_{71}\,x}{(\log x)^{m}}$$

soit vérifiée pour toute valeur $\geqq 2$ *de* x, *pour tout nombre naturel* k *et pout tout entier* h *qui est premier avec* k.

Lemme 8: *A toute paire de nombres naturels* m *et* K *correspond un nombre* c_{72} *dépendant uniquement de* m *et de* K *tel que l'inégalité*

$$\left| \sum_{\substack{p \leqq x \\ p \equiv h \,(mod.\, k)}} 1 - \frac{1}{K\varphi(k)} \sum_{2 \leqq v \leqq Kx} \frac{1}{\log \frac{v}{K}} \right| < \frac{c_{72}\, x}{(\log x)^m}$$

soit vérifiée pöur toute valeur $\geqq 2$ *de* x, *pour tout nombre naturel* k *et pour tout entier* h *qui est premier avec* k.

Démonstration: Ce lemme est une conséquence immédiate du lemme précédent, puisqu'on a

$$\left| \int_2^x \frac{du}{\log u} - \frac{1}{K} \sum_{2 \leqq v \leqq Kx} \frac{1}{\log \frac{v}{K}} \right| = \frac{1}{K} \left| \int_{2K}^{Kx} \frac{du}{\log \frac{u}{K}} - \sum_{2 \leqq v \leqq Kx} \frac{1}{\log \frac{v}{K}} \right|$$

$$< c_{73} + \frac{1}{K} \sum_{2K \leqq v \leqq Kx} \int_v^{v+1} du \left(\frac{1}{\log \frac{v}{K}} - \frac{1}{\log \frac{u}{K}} \right)$$

$$\leqq c_{73} + \frac{1}{K} \sum_{2K \leqq v \leqq Kx} \left(\frac{1}{\log \frac{v}{K}} - \frac{1}{\log \frac{v+1}{K}} \right)$$

$$< c_{73} + \frac{1}{K \log 2};$$

c_{73} dépend uniquement de K.

Lemme 9: *A tout polynôme*

$$\psi(x) = b x^g + \ldots . \qquad (b > 0)$$

du degré $g \geqq 1$ *à coefficients entiers correspond un nombre positif* c_{74} *jouissant de la propriété suivante:*

Si nous désignons par A' *un nombre positif, par* B' *un nombre* $> A'$, *par* y *un nombre réel, par* q *et* h *des nombres naturels et si* $\sum\limits_{v' \leqq y}^{*}$ *est étendu à tous les entiers* $v' > A'$ *et* $\leqq B'$ *auxquels correspond au moins un nombre naturel* $x \equiv h$ (*mod.* q) *tel que* $\psi(x) = v'$, *nous avons*

$$\left| \sum_{v' \leqq y}^{*} 1 - q^{-1} g^{-1} b^{-\frac{1}{g}} \sum_{\substack{A' < v' \leqq B' \\ v' \leqq y}} v'^{-1+\frac{1}{g}} \right| < c_{74}.$$

Démonstration: Dans le cas où y est $\leqq A'$ le premier membre s'annule. Dans le cas où $A' < y \leqq B'$ ce premier membre ne change pas sa valeur si l'on remplace B' par y. On peut donc supposer $y \geqq B'$.

Sans troubler la généralité on peut admettre en outre $A' \geqq c_{75}$, où cette constante, dépendant uniquement du choix du polynôme $\psi(x)$, est choisie si grande que $\psi(v')$ est une fonction croissante de v' pour $v' \geqq c_{75}$. A chaque point v' de l'intervalle $A' \leqq v' \leqq B'$ correspond alors un seul nombre $x \geqq c_{75}$ tel que $\psi(x)$ soit égal à v'. En choisisant $\alpha \geqq c_{75}$ et $\beta \geqq c_{75}$ de telle façon que nous ayons $\psi(\alpha) = A'$ et $\psi(\beta) = B'$, nous obtenons

$$\sum_{v'}^{\star} 1 = \sum_{\substack{\alpha < x \leqq \beta \\ x \equiv h \,(\mathrm{mod}\, q)}} 1,$$

par conséquent

$$\left| \sum_{v'}^{\star} 1 - \frac{\beta - \alpha}{q} \right| \leqq 1 \,. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (35)$$

En vertu de

$$B' = \psi(\beta) = b\beta^g + \ldots$$

on a

$$b\beta^g = B' \left\{ 1 + O\left(B'^{-\frac{1}{g}}\right) \right\},$$

par conséquent

$$\beta = \left(\frac{B'}{b}\right)^{\frac{1}{g}} \left\{ 1 + O\left(B'^{-\frac{1}{g}}\right) \right\} = \left(\frac{B'}{b}\right)^{\frac{1}{g}} + O(1)$$

et on obtient d'une manière analogue

$$\alpha = \left(\frac{A'}{b}\right)^{\frac{1}{g}} + O(1).$$

La relation

$$g^{-1} b^{-\frac{1}{g}} \sum_{A' < v' \leqq B'} v'^{-1 + \frac{1}{g}} = \left(\frac{B'}{b}\right)^{\frac{1}{g}} - \left(\frac{A'}{b}\right)^{\frac{1}{g}} + O(1)$$

nous apprend donc

$$\left| \beta - \alpha - g^{-1} b^{-\frac{1}{g}} \sum_{A' < v' \leqq B'} v'^{-1 + \frac{1}{g}} \right| < c_{76},$$

c_{76} dépendant uniquement du choix du polynôme $\psi(x)$, de sorte que l'inégalité qui est à démontrer est une conséquence de (35).

Lemme 10: *A toute paire de nombres naturels g et m correspondent un nombre naturel h et un nombre positif c_{77} jouissant de la propiété suivante*:

Pour tout entier P, tout entier $Z \geqq 3$, et tout nombre réel β tels que *l'intervalle* $(\beta \mp Z^{-g} (\log Z)^h)$ *ne contienne aucune fraction à dénominateur positif* $\leqq (\log Z)^h$ *et pour tout polynôme réel* [1])

$$\chi(x) = \frac{x^g}{g!} + \ldots .$$

du $g^{\text{ième}}$ *degré, on a*

$$\Big| \sum_{x=P+1}^{P+Z} e^{2\pi i \beta \chi(x)} \Big| < c_{77} Z (\log Z)^{-m}$$

On peut trouver la démonstration dans mon article: Ueber Summen von Primzahlen und Primzahlquadraten, qui paraîtra bientôt dans les Mathematische Annalen (§ 3; lemme 3).

Lemme 11: *A tout système de nombres naturels g, m et b correspondent un nombre naturel* ζ *et un nombre positif* c_{78} *jouissant de la propriété suivante:*

Pour tout entier P, tout entier $Z \geqq 3$ *et tout nombre réel* α *tels que l'intervalle* $(\alpha \mp Z^{-g} (\log Z)^{\zeta})$ *ne contienne aucune fraction à dénominateur positif* $\leqq (\log Z)^{\zeta}$, *et pour tout polynôme réel*

$$\psi(x) = b x^g + \ldots .$$

du $g^{\text{ième}}$ *degré, on a*

$$\Big| \sum_{x=P+1}^{P+Z} e^{2\pi i \alpha \psi(x)} \Big| < c_{78} Z (\log Z)^{-m}.$$

Démonstration: On peut supposer $\log Z \geqq g!\, b$. Sinon le lemme est évident.

Je considère les nombres h et c_{77} indiqués dans le lemme précédent et je pose $\zeta = h + 1$. Supposons que l'intervalle $(\alpha \mp Z^{-g} (\log Z)^{\zeta})$ ne contienne aucune fraction à dénominateur positif $\leqq (\log Z)^{\zeta}$. L'intervalle $(g!\, b\, \alpha \mp Z^{-g} (\log Z)^h)$ ne contient aucune fraction $\frac{a}{q}$ à dénominateur positif $\leqq (\log Z)^h$; en effet, sinon la fraction $\frac{a}{g!\, b q}$, dont le dénominateur est

$$g!\, b q \leqq g!\, b (\log Z)^h \leqq (\log Z)^{\zeta},$$

serait situé dans l'intervalle $(\alpha \mp \frac{1}{g!\, b} Z^{-g} (\log Z)^h)$, donc dans l'intervalle $(\alpha \mp Z^{-g} (\log Z)^{\zeta})$. Si l'on pose

$$\psi(x) = g!\, b\, \chi(x) \quad \text{et} \quad \beta = g!\, b\, \alpha$$

on obtient donc moyennant le lemme précédent

$$\Big| \sum_{x=P+1}^{P+Z} e^{2\pi i \alpha \psi(x)} \Big| = \Big| \sum_{x=P+1}^{P+Z} e^{2\pi i \beta \chi(x)} \Big| < c_{77} Z (\log Z)^{-m}.$$

---

[1]) Je désigne par $(\alpha \mp \eta)$ l'intervalle fermé $(\alpha - \eta, \alpha + \eta)$.

Lemme 12: *Si γ, γ' et γ'' sont positifs et si la fonction réelle $Z(p)$ est pour tout nombre premier $p \geqq \gamma'$ tout au plus égal à $\frac{\gamma}{p-1}$ et pour tout nombre premier $< \gamma'$ tout au plus égal à γ'', on a pour tout $\chi \geqq 2$*

$$\prod_{p \leqq \chi} | 1 + Z(p) | \leqq c_{79} (\log \chi)^{\gamma},$$

où c_{79} dépend uniquement de γ, γ' et γ''.

Si l'on sait en outre pour tout nombre premier p

$$Z(p) \geqq -1 + \frac{1}{\gamma''}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (36)$$

on a

$$\prod_{p \leqq \chi} (1 + Z(p)) \geqq c_{80} (\log \chi)^{\gamma},$$

c_{80} désignant un nombre positif, dépendant uniquement de γ, γ' et γ''.

Démonstration. Désignons par γ_0 le plus grand des deux nombres $2\gamma + 2$ et γ'.

Pour tout nombre δ qui est en valeur absolue $\leqq \frac{1}{2}$, le nombre

$$\log (1 + \delta) = \delta - \frac{\delta^2}{2} + \frac{\delta^3}{3} - \ldots.$$

est d'une part $\leqq \delta$ et d'autre part

$$\geqq \delta - \tfrac{1}{2} \delta^2 \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots\right) = \delta - \delta^2,$$

par conséquent

$$e^{\delta - \delta^2} \leqq 1 + \delta \leqq e^{\delta}.$$

Pour tout nombre premier $p \geqq \gamma_0$ on a donc

$$e^{-\frac{\gamma}{p-1} - \frac{\gamma^2}{(p-1)^2}} \leqq 1 - \frac{\gamma}{p-1} \leqq 1 + Z(p) \leqq 1 + \frac{\gamma}{p-1} \leqq e^{\frac{\gamma}{p-1}},$$

de sorte que

$$\prod_{\gamma_0 \leqq p \leqq \chi} (1 + Z(p))$$

est d'une part

$$\leqq e^{\sum_{p \leqq \chi} \frac{\gamma}{p-1}} \leqq e^{\gamma (\log \log \chi + c_{81})} = c_{82} (\log \chi)^{\gamma}$$

et d'autre part

$$\geqq e^{-\sum_{p \leqq \chi} \left(\frac{\gamma}{p-1} + \frac{\gamma^2}{(p-1)^2}\right)} \geqq e^{-\gamma (\log \log \chi + c_{83})} = c_{84} (\log \chi)^{\gamma},$$

où c_{81}, c_{82}, c_{83} et c_{84} désignent des nombres positifs, dépendant uniquement de γ.

En outre on a

$$\prod_{p<\gamma_0} |1+Z(p)| < c_{85}$$

et si l'on peut utiliser (36)

$$\prod_{p<\gamma_0} (1+Z(p)) > c_{86},$$

où c_{85} et c_{86} sont nombres positifs, dépendant uniquement de γ_0 et γ''. Ainsi le lemme est démontré.