**Mathematics.** — *Ueber Scharen von quadratischen Varietäten.* By O. BOTTEMA. (Communicated by Prof. W. v. D. WOUDE).

(Communicated at the meeting of April 30, 1938).

Vor einiger Zeit hat DANIELSSON [1]) die folgenden Sätze bewiesen:

1. Alle Schnittkurven der Flächen einer gewöhnlichen Schar von Flächen zweiter Ordnung haben dasselbe Doppelverhältnis.

2. Dieses Doppelverhältnis ist gleich dem Doppelverhältnis des tetraedralen Strahlenkomplexes, zu dem die Erzeugenden der einzelnen Flächen der Schar gehören.

Wir geben im Folgenden Erweiterungen dieser Sätze für $R_n$.

I. *Die Schnitt-$V^4_{n-2}$ zweier quadratischen Varietäten $V^2_{n-1}$ einer allgemeinen Schar in $R_n$ sind sämtlich projektiv.*

**Beweis:** Die Exemplare einer Schar (des allgemeinen Typus) von quadratischen Varietäten in $R_n$ können dargestellt werden durch die Gleichungen

$$Q_\lambda = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{x_i^2}{a_i + \lambda} = 0,$$

wo $\lambda$ der Parameter der Schar bedeutet und die Zahlen $a_i$ verschieden sind. Wir betrachten zwei Paare von Varietäten, $Q_{\lambda_1}$, $Q_{\lambda_2}$ und $Q_{\mu_1}$, $Q_{\mu_2}$. Die Nullstellen der Determinante des Büschels $Q_{\lambda_1} - t Q_{\lambda_2} = 0$ sind

$$t_i = \frac{a_i + \lambda_2}{a_i + \lambda_1} \qquad (i = 1, 2, \ldots n+1),$$

diejenigen des Büschels $Q_{\mu_1} - \tau\, Q_{\mu_2} = 0$:

$$\tau_i = \frac{a_i + \mu_2}{a_i + \mu_1} \qquad (i = 1, 2, \ldots n+1).$$

Die *Paare* $Q_{\lambda_1}$, $Q_{\lambda_2}$ und $Q_{\mu_1}$, $Q_{\mu_2}$ sind dann und nur dann projektiv, wenn die Zahlen $t_i$ (in beliebiger Anordnung) den Zahlen $\tau_i$ proportional sind. Damit die *Büschel* ($Q_{\lambda_1}$, $Q_{\lambda_2}$) und ($Q_{\mu_1}$, $Q_{\mu_2}$) projektiv sind — und also auch ihre Basisvarietäten — ist notwendig und hinreichend, dasz eine lineare Substitution existiert:

$$\tau = \frac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta},$$

[1]) DANIELSSON, Sätze über Scharen von Flächen zweiter Ordnung, Math. Annalen **109**, 521—524 (1934).

welche den Zahlen $t_i$ die Zahlen $\tau_i$ zuordnet für $i = 1, 2, \ldots n+1$. Eine solche ist aber

$$\tau = \frac{(\mu_2 - \lambda_1)\, t + (\lambda_2 - \mu_2)}{(\mu_1 - \lambda_1)\, t + (\lambda_2 - \mu_1)}.$$

Ihre Determinante ist $(\lambda_1 - \lambda_2)(\mu_1 - \mu_2)$ und also von Null verschieden.

Zu jeder Schnitt-$V^4_{n-2}$ zweier Varietäten der Schar gehört also ein System von $n+1$ Zahlen, z.B. die Zahlen $t_i$. Die Anordnung dieser Zahlen ist unwesentlich und sie dürfen auszerdem einer linearen Transformation unterworfen werden. Das heiszt: *charakteristisch für die allgemeine $V^4_{n-2}$ ist ein Wurf von n Punkten eines binären Gebietes* und die projektiven Eigenschaften dieses Wurfes bestimmen die projektiven Eigenschaften der Varietät. Eine kanonische Darstellung für die Koordinaten der Punkte des Wurfes erhält man z.B. für $\lambda_1 = \infty$, $\lambda_2 = 0$, nämlich

$$t_i = a_i\,.$$

Der zweite von DANIELSSON gegebene Satz sagt aus, dasz für $n = 3$ der für die Schnittkurve charakteristische Wurf projektiv ist mit der aus vier Punkten bestehenden Figur, welche das Fundamentaltetraeder der Schar ausschneidet auf einer beliebigen Erzeugenden. Da es in $R_n$ auf die Varietäten einer Schar sämtlich $\infty^{2n-4}$ Gerade gibt, während nur $\infty^{n-1}$ Gerade durch das Fundamentalsimplex geschnitten werden in einer Gruppe von $n$ Punkten, welche mit einem gegeben Wurf projektiv ist, wird eine Erweiterung des Satzes in der gegebenen Fassung nicht möglich sein. Durch die Bemerkung, dasz im Falle $n = 3$ auch die *Tangenten* der Schnittkurven $V^4_1$ zum tetraedralen Komplex gehören, werden wir zum folgenden Satz geführt:

II. *Die $n+1$ linearen $R_{n-1}$, welche durch den berührenden $R_{n-2}$ in einem beliebigen Punkt der $V^4_{n-2}$ und je einen Eckpunkt des Fundamentalsimplexes gehen, bilden einen Wurf, welcher mit dem charakteristischen Wurf der $V^4_{n-2}$ (und der ganzen Schar) projektiv ist.*

**Beweis**: Es sei die $V^4_{n-2}$ die Schnittvarietät der quadratischen Varietäten $Q_{\lambda_1} = 0$ und $Q_{\lambda_2} = 0$. Der berührende $R_{n-2}$ in dem Punkt $P \equiv x^0_1, x^0_2 \ldots x^0_n$ ist der Durchschnitt der linearen $R_{n-1}$ mit den Gleichungen:

$$G_1 \equiv \Sigma \frac{x^0_i\, x_i}{a_i + \lambda_1} = 0, \quad G_2 = \Sigma \frac{x^0_i\, x_i}{a_i + \lambda_2} = 0.$$

Die Gleichungen der fraglichen $R_{n-1}$ lauten also

$$G_1 - k\, G_2 = 0;$$

für denjenigen, welcher durch den Eckpunkt $x_i = 0$ $(i \neq p)$ geht, findet man

$$k = k_p = \frac{a_p + \lambda_2}{a_p + \lambda_1},$$

woraus der Satz unmittelbar hervorgeht.