**Mathematics.** — *Contribution à la théorie additive des nombres.* Par J. G. VAN DER CORPUT. (Quatrième communication [1]).

(Communicated at the meeting of May 28, 1938.)

**Lemme 13**: *Si $q$ et $U$ désignent des nombres naturels, $\chi(x)$ un polynôme à coefficients entiers, et si l'on pose pour toute fraction irréductible $\frac{a}{q}$*

$$\lambda\left(\frac{a}{q}\right)=\frac{\varphi(U)}{\varphi(qU)} \sum_{\substack{h=1 \\ h\equiv u \,(mod.\, U) \\ (h,q)=1}}^{qU} e^{\frac{2\pi i a \chi(h)}{q}},$$

*on a pour chaque paire de fractions irréductibles $\frac{a_1}{q_1}$ et $\frac{a_2}{q_2}$ dont les dénominateurs $q_1$ et $q_2$ sont premiers entre eux*

$$\lambda\left(\frac{a_1}{q_1}\right)\lambda\left(\frac{a_2}{q_2}\right)=\lambda\left(\frac{a_1}{q_1}+\frac{a_2}{q_2}\right).$$

**Démonstration**: On a

$$\lambda\left(\frac{a_1}{q_1}\right)\lambda\left(\frac{a_2}{q_2}\right)=\frac{\varphi^2(U)}{\varphi(q_1 U)\,\varphi(q_2 U)} \sum_{\substack{h_1=1 \\ h_1\equiv u_1 \\ (h_1,q_1)=1}}^{q_1 U} \sum_{\substack{h_2=1 \\ h_2\equiv u_2 \,(mod.\, U) \\ (h_2,q_2)=1}}^{q_2 U} e^{2\pi i\left(\frac{a_1}{q_1}\chi(h_1)+\frac{a_2}{q_2}\chi(h_2)\right)}.$$

A toute paire d'entiers $k_1$ et $k_2$ tels que

$$0<h_1=u+k_1 U\leqq q_1 U \text{ et } 0<h_2=u+k_2 U\leqq q_2 U$$

correspond un seul entier $k$ tels que l'on ait

$$0<h=u+kU\leqq q_1 q_2 U,$$

$$k\equiv k_1 \;(mod.\; q_1) \text{ et } k\equiv k_2 \;(mod.\; q_2).$$

Alors on a

$$h\equiv h_1 \;(mod.\; q_1) \text{ et } h\equiv h_2 \;(mod.\; q_2).$$

---

[1]) Dans la première communication (p. 228) j'ai dit que presque tout multiple de 24 augmenté de 3 est la somme des carrés de trois nombres premiers. Il va sans dire qu'on doit faire une exception pour les multiples de 5. Dans mon article: „Sur deux, trois ou quatre nombres premiers", Troisième communication, p. 103, il faut supposer que $n$ soit égal à une puissance $p^\lambda$ d'un nombre premier $p$, et on doit poser $\varepsilon=(-1)^\lambda$ (ou lieu de $\varepsilon=-1$) dans le cas particulier où $n$ est congru à $-1$ (*mod.* 4) et a est un non-reste de $n$.



Si $h_1$ est premier avec $q_1$ et en même temps $h_2$ avec $q_2$, le nombre $h$ est premier avec $q_1 q_2$ et inversement. Ainsi on obtient

$$\lambda\left(\frac{a_1}{q_1}\right)\lambda\left(\frac{a_2}{q_2}\right)=\frac{\varphi^2(U)}{\varphi(q_1 U)\,\varphi(q_2 U)} \sum_{\substack{h=1 \\ h\equiv u\,(mod.\, U) \\ (h,q_1 q_2)=1}}^{q_1 q_2 U} e^{2\pi i\left(\frac{a_1}{q_1}+\frac{a_2}{q_2}\right)\chi(h)}$$

$$=\frac{\varphi(U)}{\varphi(q_1 q_2 U)} \sum_{\substack{h=1 \\ h\equiv u\,(mod.\, U) \\ (h,q_1 q_2)=1}}^{q_1 q_2 U} e^{2\pi i\left(\frac{a_1}{q_1}+\frac{a_2}{q_2}\right)\chi(h)},$$

parce que la relation

$$\prod_{p\mid q_1 U}\left(1-\frac{1}{p}\right).\prod_{p\mid q_2 U}\left(1-\frac{1}{p}\right)=\prod_{p\mid U}\left(1-\frac{1}{p}\right).\prod_{p\mid q_1 q_2 U}\left(1-\frac{1}{p}\right)$$

nous fournit la formule

$$\varphi(q_1 U)\,\varphi(q_2 U)=\varphi(U)\,\varphi(q_1 q_2 U).$$

De cette manière le lemme 13 est démontré.

Je vais démontrer maintenant la proposition 9. Dans cette démonstration $c_{87}, c_{88}, \ldots, c_{109}$ dépendent uniquement de $M, \nu, K, U$ et du choix du polynôme $\psi(x)$.

**Première partie de la démonstration**:

Dans cette partie j'introduis quelques intervalles et quelques fonctions vérifiant les conditions de la proposition 1.

1. Je choisis pour $V$ l'intervalle fermé $(2K, N)$, pour $V'$ l'intervalle fermé $(A', N)$ où $A'=N n^{-\frac{1}{2}gM}$ et pour $T$ l'intervalle fermé $(2, N)$; comme on le sait, $n$ est égal à $\log N$. Chacun de ces intervalles renferme moins de $N$ entiers et, si $N$ est suffisamment grand, au moins un entier.

Posons $r(v)=1$ ou 0, selon que $\frac{v}{K}$ est un nombre premier ou non; de cette définition il suit

$$\sum_v |r(v)|^2=\sum_{p\leqq K^{-1}N} 1<N.$$

Si nous prenons

$$\varrho(v)=\frac{1}{K\,\varphi(U)\log\frac{v}{K}}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (37)$$

nous avons

$$\sum_v |\varrho(v)|^2=\frac{1}{K^2\varphi^2(U)}\sum_{2K\leqq v\leqq N}\frac{1}{\log^2\frac{v}{K}}\leqq\frac{N}{\log^2 2},$$

de sorte que les inégalités (1) sont vérifiées si l'on prend $\Gamma=\frac{1}{\log 2}$.

Pour un entier $v'$ auquel correspond au moins un nombre naturel $x$ tel que $\psi(x) = v'$ je pose $r'(v') = 1$; pour les autres $v'$ je pose $r'(v') = 0$. Par conséquent

$$\sum_{v'} |r'(v')| = \sum_{\substack{A' \leqq v' \leqq N \\ v' = \psi(x)}} 1 \leqq c_{87} N^{\frac{1}{g}} \leqq c_{87} N A'^{-1+\frac{1}{g}}.$$

Je prendrai

$$\Gamma' = c_{88} A'^{-1+\frac{1}{g}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (38)$$

La première des inégalités (2) est donc vérifiée dès que l'on choisit $c_{88} \geqq c_{87}$.

Les nombres

$$\varrho'(v') = g^{-1} b^{-\frac{1}{g}} v'^{-1+\frac{1}{g}} \qquad (A' \leqq v' \leqq N) \quad . \quad . \quad . \quad (39)$$

et

$$\sum_{v' \text{ et } v'+1 \text{ dans } V'} |\varrho'(v'+1) - \varrho'(v')|$$

sont $\leqq g^{-1} b^{-\frac{1}{g}} A'^{-1+\frac{1}{g}}$; la première condition de la proposition 1 est donc vérifiée si l'on impose en outre à $c_{88}$ la condition $c_{88} \geqq g^{-1} b^{-\frac{1}{g}}$.

2. Prenons $l = 1$ et en outre pour toute fraction irréductible

$$\lambda\left(\frac{a}{q}\right) = \frac{\varphi(U)}{\varphi(qU)} \sum_{\substack{h=1 \\ h \equiv u \,(\mathrm{mod.}\, U) \\ (h,q)=1}}^{qU} e^{\frac{2\pi i a K h}{q}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (40)$$

et

$$\lambda'\left(\frac{a}{q}\right) = \frac{1}{q} \sum_{h=1}^{q} e^{\frac{2\pi i a \psi(h)}{q}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (41)$$

$\lambda\left(\frac{a}{q}\right)$ et $\lambda'\left(\frac{a}{q}\right)$ sont en valeur absolue $\leqq q$, de sorte que l'inégalité (3) est vérifiée, si l'on choisit $\gamma_1 \geqq 1$.

On a pour tout nombre réel $y$

$$\sum_{v \leqq y} r(v) e^{\frac{2\pi i a v}{q}} - \lambda\left(\frac{a}{q}\right) \sum_{v \leqq y} \varrho(v)$$

$$= \sum_{\substack{p \mid qU \\ p \leqq K^{-1} y \\ p \leqq K^{-1} N}} e^{\frac{2\pi i a K p}{q}} + \sum_{\substack{h=1 \\ h \equiv u \,(\mathrm{mod.}\, U) \\ (h, qU)=1}}^{qU} e^{\frac{2\pi i a K h}{q}} \left\{ \sum_{\substack{p \leqq K^{-1} y \\ p \leqq K^{-1} N \\ p \equiv h \,(\mathrm{mod.}\, qU)}} 1 - \frac{1}{\varphi(qU)} \sum_{\substack{v \leqq y \\ 2 \leqq v \leqq N}} \frac{1}{K \log \frac{v}{K}} \right\}$$

et la valeur absolue du dernier membre est d'après le lemme 8 (appliqué avec $k = qU$) pour tout nombre naturel $m$ inférieur à

$$qU + q C_1 N n^{-m} < C_2 N q n^{-m};$$



dans cette partie de la démonstration $C_1, C_2, \ldots, C_6$ dépendent uniquement de $m, M, K, U$ et du choix du polynôme $\psi(x)$.

Le lemme 9 nous apprend que

$$\sum_{v' \leqq y} r'(v') e^{\frac{2\pi i a v'}{q}} - \lambda'\left(\frac{a}{q}\right) \sum_{v' \leqq y} \varrho'(v')$$

$$= \sum_{h=1}^{q} e^{\frac{2\pi i a \psi(h)}{q}} \left\{ \sum_{v' \leqq y}^{*} 1 - q^{-1} g^{-1} b^{-\frac{1}{g}} \sum_{v' \leqq y} v'^{-1+\frac{1}{g}} \right\}$$

est en valeur absolue

$$\leqq c_{89}\, q \leqq C_3\, q\, A'^{-1+\frac{1}{g}} N n^{-m}$$

pour tout nombre réel $y$ et pour tout nombre naturel $m$. Par conséquent les inégalités (4) et (5) sont vérifiées, si l'on prend

$$\gamma_m \geqq C_2 \text{ et } \geqq C_3; \qquad c_{88} \geqq 1.$$

3. Il existe un nombre $c_{90}$ tel que $\psi'(x)$ soit constamment positif ou constamment négatif pour $x \geqq c_{90}$. On a pour toute valeur réelle de $\alpha$

$$\left| \sum_{v' \leqq c_{90}} r'(v') e^{2\pi i \alpha v'} \right| \leqq c_{91}$$

et

$$\sum_{v' > c_{90}} r'(v') e^{2\pi i \alpha v'} = \sum_{x}{}_1\, e^{2\pi i \alpha \psi(x)},$$

$x$ parcourant un système de nombres naturels consécutifs. Je démontrerai maintenant qu'à tout nombre naturel $m$ correspond un entier $\eta_m$ dépendant uniquement de $m$ et du choix du polynôme $\psi(x)$ jouissant de la propriété suivante: pour tout nombre réel $\alpha$ tel que l'intervalle $(\alpha \mp N^{-1} n^{\eta_m})$ ne contienne aucune fraction à dénominateur positif $\leqq n^{\eta_m}$, on a

$$\left| \sum_{v'} r'(v') e^{2\pi i \alpha v'} \right| \leqq C_4 N^{\frac{1}{g}} n^{-m} \leqq C_4 N A'^{-1+\frac{1}{g}} n^{-m}. \quad . \quad (42)$$

Nous pouvons supposer que le nombre $Z$ des termes de la somme $\sum_{x}{}_1$ soit supérieur à $N^{\frac{1}{g}} n^{-m}$, la relation (42) étant manifeste dans l'autre cas. On a $Z \leqq c_{92} N^{\frac{1}{g}}$. Le lemme 11 nous fournit un nombre $\zeta$ dépendant uniquement de $m$ et du choix du polynôme $\psi(x)$ et jouissant de la propriété mentionnée dans ce lemme 11. Si nous posons $\eta_m = 1 + \zeta + g m$, nous avons

$$N^{-1} n^{\eta_m} \geqq Z^{-g} (\log Z)^{\zeta} \text{ et } n^{\eta_m} \geqq (\log Z)^{\zeta},$$

supposé que $N$ soit suffisamment grand (sinon, (42) est évident). Si l'intervalle $(\alpha \mp N^{-1} n^{\eta_m})$ ne contient aucune fraction à dénominateur positif $\leqq n^{\eta_m}$, l'intervalle $(\alpha \mp Z^{-g} (\log Z)^{\zeta})$ ne contient aucune fraction à dénominateur positif $\leqq (\log Z)^{\xi}$, et le lemme 11 nous apprend pour tout nombre naturel $m$

$$\Big| \sum_{x} {}_1\, e^{2\pi i \alpha \psi(x)} \Big| \leqq C_5\, Z (\log Z)^{-m} \leqq C_6\, N^{\frac{1}{g}}\, n^{-m}.$$

Ainsi nous trouvons (42), d'où il suit que les conditions de la proposition 1 sont vérifiées si l'on choisit $\gamma_m \geqq C_6$ et $c_{88} \geqq 1$.

**Deuxième partie de la démonstration:**

Ayant démontré dans la première partie que les conditions de la proposition 1 sont valables, je vais considérer maintenant celles de la proposition 5. Pour démontrer que la fonction

$$H(q, t) = \sum_{\substack{a=0 \\ (a,q)=1}}^{q-1} \lambda\left(\frac{a}{q}\right) \lambda'\left(\frac{a}{q}\right) e^{-\frac{2\pi i a t}{q}}$$

possède, pour toute paire de nombres naturels $q_1$ et $q_2$ qui sont premiers entre eux, la propriété multiplicative exprimée par (18), il suffit d'étudier les relations (19) et (20), $\frac{a_1}{q_1}$ et $\frac{a_2}{q_2}$ désignant deux fractions irréductibles dont les dénominateurs $q_1$ et $q_2$ sont premiers entre eux. Le lemme 13, appliqué avec $\chi(x) = Kx$ nous apprend que la fonction $\lambda\left(\frac{a}{q}\right)$, définie par (40), satisfait à (19). Pour la fonction $\lambda'\left(\frac{a}{q}\right)$, définie par (41), on a

$$\lambda'\left(\frac{a_1}{q_1}\right) \lambda'\left(\frac{a_2}{q_2}\right) = q_1^{-1} q_2^{-1} \sum_{h_1=1}^{q_1} \sum_{h_2=1}^{q_2} e^{2\pi i \left(\frac{a_1}{q_1} \psi(h_1) + \frac{a_2}{q_2} \psi(h_2)\right)};$$

le nombre $h$, déterminé par

$$h \equiv h_1 \,(mod.\, q_1); \quad h \equiv h_2 \,(mod.\, q_2); \quad 0 < h \leqq q_1 q_2$$

parcourt le système des nombres naturels $\leqq q_1 q_2$; on a donc

$$\lambda'\left(\frac{a_1}{q_1}\right) \lambda'\left(\frac{a_2}{q_2}\right) = q_1^{-1} q_2^{-1} \sum_{h=1}^{q_1 q_2} e^{2\pi i \left(\frac{a_1}{q_1} + \frac{a_2}{q_2}\right) \psi(h)},$$

d'où suit (20). $H(q, t)$ possède donc la susdite propriété multiplicative.

Evaluons maintenant

$$\lambda\left(\frac{a}{p^\sigma}\right) = \frac{\varphi(U)}{\varphi(p^\sigma U)} \sum_{\substack{h=1 \\ h \equiv u \,(mod.\, U) \\ (h,p)=1}}^{p^\sigma U} e^{\frac{2\pi i a K h}{p^\sigma}}$$



pour un nombre premier quelconque $p$ et pour un nombre naturel quelconque $\sigma$. Dans le cas où $p$ n'est pas un facteur de $U$, nous avons

$$\lambda\left(\frac{a}{p^\sigma}\right) = \frac{1}{p^{\sigma-1}(p-1)} \left\{ \sum_{\substack{h=1 \\ h \equiv u \,(mod.\, U)}}^{p^\sigma U} e^{\frac{2\pi i a K h}{p^\sigma}} - \sum_{\substack{h=1 \\ h \equiv u \,(mod.\, U) \\ h \equiv 0 \,(mod.\, p)}}^{p^\sigma U} e^{\frac{2\pi i a K h}{p^\sigma}} \right\}$$

$$= \frac{1}{p^{\sigma-1}(p-1)} (p^\sigma - p^{\sigma-1}) = 1 \text{ lorsque } p^\sigma / K; \quad \ldots \quad (43)$$

$$= \frac{-p^{\sigma-1}}{p^{\sigma-1}(p-1)} = \frac{-1}{p-1} \text{ lorsque } p^\sigma \nmid K \text{ et } p^{\sigma-1}/K; \quad . \quad (44)$$

$$= 0 \qquad \text{lorsque } p^{\sigma-1} \nmid K. \quad \ldots \quad (45)$$

Si par contre $p$ est un facteur de $U$, nous avons, parce que $u$ est premier avec $U$,

$$\lambda\left(\frac{a}{p^\sigma}\right) = \frac{1}{p^\sigma} \sum_{\substack{h=1 \\ h \equiv u \,(mod.\, U)}}^{p^\sigma U} e^{\frac{2\pi i a K h}{p^\sigma}} = e^{\frac{2\pi i a K u}{p^\sigma}} \text{ ou } 0, \quad \ldots \quad (46)$$

selon que $KU$ est divisible par $p^\sigma$ ou non.

Evaluons ensuite

$$H(q, t) = \frac{1}{q} \sum_{h=1}^{q} \sum_{\substack{a=0 \\ (a,q)=1}}^{q-1} \lambda\left(\frac{a}{q}\right) e^{\frac{2\pi i a (\psi(h) - t)}{q}}$$

dans le cas particulier où $q = p^\sigma$. Dans ce calcul nous utiliserons les relations

$$\left.\begin{aligned} \sum_{\substack{a=0 \\ (a,p)=1}}^{p^\sigma - 1} e^{\frac{2\pi i a k}{p^\sigma}} &= \sum_{a=0}^{p^\sigma - 1} e^{\frac{2\pi i a k}{p^\sigma}} - \sum_{a=0}^{p^{\sigma-1} - 1} e^{\frac{2\pi i a k}{p^{\sigma-1}}} \\ &= p^\sigma - p^{\sigma-1} \quad \text{lorsque } p^\sigma / k; \\ &= -p^{\sigma-1} \quad \text{lorsque } p^\sigma \nmid k \text{ et } p^{\sigma-1}/k; \\ &= 0 \quad \text{lorsque } p^{\sigma-1} \nmid k. \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (47)$$

Distinguons cinq cas:

1. Soit $p \nmid U$ et $p^\sigma / K$. On a

$$\left.\begin{aligned} H(p^\sigma, t) &= p^{-\sigma} \sum_{h=1}^{p^\sigma} \sum_{\substack{a=0 \\ (a,p)=1}}^{p^\sigma-1} e^{\frac{2\pi i a(\psi(h)-t)}{p^\sigma}} \\ &= p^{-\sigma} \sum_{\substack{h=1 \\ p^\sigma / \psi(h)-t}}^{p^\sigma} (p^\sigma - p^{\sigma-1}) - p^{-\sigma} \sum_{\substack{h=1 \\ p^\sigma \nmid \psi(h)-t \\ p^{\sigma-1} / \psi(h)-t}}^{p^\sigma} p^{\sigma-1} \\ &= \sum_{\substack{h=1 \\ p^\sigma / \psi(h)-t}}^{p^\sigma} 1 - p^{-1} \sum_{\substack{h=1 \\ p^{\sigma-1} / \psi(h)-t}}^{p^\sigma} 1 \\ &= \sum_{\substack{h=1 \\ p^\sigma / \psi(h)-t}}^{p^\sigma} 1 - \sum_{\substack{h=1 \\ p^{\sigma-1} / \psi(h)-t}}^{p^{\sigma-1}} 1 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (48)$$

2. Soit $p \nmid U$; $p^\sigma \nmid K$; $p^{\sigma-1} / K$. On a

$$\left.\begin{aligned} -(p-1) H(p^\sigma, t) &= p^{-\sigma} \sum_{h=1}^{p^\sigma} \sum_{\substack{a=0 \\ (a,p)=1}}^{p^\sigma-1} e^{\frac{2\pi i a(\psi(h)-t)}{p^\sigma}} \\ &= \sum_{\substack{h=1 \\ p^\sigma / \psi(h)-t}}^{p^\sigma} 1 - \sum_{\substack{h=1 \\ p^{\sigma-1} / \psi(h)-t}}^{p^{\sigma-1}} 1. \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (49)$$

3. Soit $p \nmid U$ et $p^{\sigma-1} \nmid K$. Dans ce cas $\lambda\left(\frac{a}{p^\sigma}\right)$ et $H(p^\sigma, t)$ s'annulent.

4. Soit $p / U$ et $p^\sigma / KU$. On a

$$\left.\begin{aligned} H(p^\sigma, t) &= p^{-\sigma} \sum_{h=1}^{p^\sigma} \sum_{\substack{a=0 \\ (a,p)=1}}^{p^\sigma-1} e^{\frac{2\pi i a(\psi(h)+Ku-t)}{p^\sigma}} \\ &= \sum_{\substack{h=1 \\ p^\sigma / \psi(h)+Ku-t}}^{p^\sigma} 1 - \sum_{\substack{h=1 \\ p^{\sigma-1} / \psi(h)+Ku-t}}^{p^{\sigma-1}} 1. \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (50)$$

5. Dans le cas où $p / U$ et $p^\sigma \nmid KU$ les nombres $\lambda\left(\frac{a}{p^\sigma}\right)$ et $H(p^\sigma, t)$ s'annulent.

Si le nombre premier $p$ n'est pas un facteur de $KUG$, il n'est pas un facteur du plus grand commun diviseur G des nombres $\psi(x) - \psi(0)$, où $x$ est entier; les coefficients du polynôme $\psi(x) - \psi(0)$ ne sont donc pas tous divisibles par $p$, de sorte que la congruence

$$\psi(h) - t \equiv 0 \qquad (mod.\ p)$$



possède tout au plus $g$ solutions et le nombre

$$-(p-1) H(p, t) = -1 + \sum_{\substack{h=1 \\ p / \psi(h)-t}}^{p^\sigma} 1$$

est $\geqq -1$ et $\leqq g-1$; par conséquent on obtient alors

$$|H(p, t)| \leqq \frac{g}{p-1} \leqq \frac{2g}{p} = \frac{2^{\frac{\log 2g}{\log 2}}}{p};$$

en outre on sait que $H(p^\sigma, t)$ s'annule pour tout entier $\sigma \geqq 2$ et tout nombre premier $p$ qui n'est pas un facteur de $KUG$. Pour un nombre naturel $q$ qui est divisible par le carré d'un nombre premier qui n'est pas un facteur de $KUG$, la fonction $H(q, t)$ s'annule donc en vertu de la propriété multiplicative de cette fonction; pour les autres nombres naturels $q$ on a

$$|H(q, t)| \leqq c_{93} \prod_{\substack{p/q \\ p \nmid KUG}} \frac{2^{\frac{\log 2g}{\log 2}}}{p} \leqq \frac{c_{94}}{q} (\tau(q))^{\frac{\log 2g}{\log 2}},$$

où $\tau(q)$ désigne le nombre des diviseurs de $q$. Ainsi on obtient pour tout nombre naturel $q$ et pour tout entier $t$

$$|H(q, t)| \leqq \gamma_m q^{-1+\frac{1}{m}}$$

si $\gamma_m$ est choisi supérieur à une borne convenable, dépendant uniquement de $m$, $K$, $U$, $G$ et $g$.

Les conditions de la proposition 5 sont donc vérifiées.

**Troisième partie de la démonstration:**

La proposition 5, appliquée avec $m = gM$ ($\nu$ est donc $> m$), nous fournit l'inégalité

$$\sum_{t=2}^{[N]} |L(t) - \Lambda(t)\, \Omega_\nu(t)|^2 < c_{95}\, \Gamma'^2 N^3 n^{-gM},$$

d'où il suit en vertu de (38),

$$\sum_{t=2}^{[N]} |L(t) - \Lambda(t)\, \Omega_\nu(t)|^2 < c_{96}\, A'^{-2+\frac{2}{g}} N^3 n^{-gM} \quad . \quad . \quad . \quad (51)$$

Déduisons maintenant la relation

$$\Omega_\nu(t) = \Omega_\nu^*(t). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (52)$$

pour tout entier $t > 1$ et tout $\nu$ tels que $(log\ t)^\nu$ soit supérieur ou égal à $K^2 U^2$. Si $p$ est un nombre premier et si $p^\omega$ désigne la puissance la plus élevée de $p$ qui est un diviseur de $KU$, on a

$$1 + \sum_{\sigma=1}^{\infty} H(p^\sigma, t) = 1 + \sum_{\sigma=1}^{\omega+1} H(p^\sigma, t); \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (53)$$

en effet, comme nous l'avons vu dans la seconde partie de cette démonstration, $H(p^\sigma, t)$ s'annule pour tout $\sigma > \omega + 1$. Dans le cas où $p$ n'est pas un facteur de $U$, on a en vertu de (48)

$$1 + \sum_{\sigma=1}^{\omega} H(p^\sigma, t) = \sum_{\substack{h=1 \\ p^\omega | \psi(h)-t}}^{p^\omega} 1,$$

de sorte que (49) (appliqué avec $\sigma = \omega + 1$) nous fournit la formule

$$1 + \sum_{\sigma=1}^{\infty} H(p, t) = \sum_{\substack{h=1 \\ p^\omega | \psi(h)-t}}^{p^\omega} 1 - \frac{1}{p-1} \sum_{\substack{h=1 \\ p^{\omega+1} | \psi(h)-t}}^{p^{\omega+1}} 1 + \frac{1}{p-1} \sum_{\substack{h=1 \\ p^\omega | \psi(h)-t}}^{p^\omega} 1$$

$$= \frac{1}{p-1} \left\{ \sum_{\substack{h=1 \\ p^\omega | \psi(h)-t}}^{p^{\omega+1}} 1 - \sum_{\substack{h=1 \\ p^{\omega+1} | \psi(h)-t}}^{p^{\omega+1}} 1 \right\} = W(p, t),$$

d'après la définition de cette dernière fonction, donnée dans la troisième communication entre les propositions 7 et 8. Dans le cas où $p$ est un facteur de $U$, le nombre $H(p^{\omega+1}, t)$ s'annule et on a en vertu de (53) et (50)

$$1 + \sum_{\sigma=1}^{\infty} H(p^\sigma, t) = \sum_{\substack{h=1 \\ p^\omega | \psi(h)+Ku-t}}^{p^\omega} 1 = W(p, t).$$

Pour tout entier $t > 1$ et tout $\nu$ tels que $(\log t)^\nu$ soit $\geqq K^2 U^2$ et pour tout nombre premier $p \leqq (\log t)^\nu$ on a

$$1 + \sum_{\sigma=1}^{\left[\frac{\nu \log \log t}{\log p}\right]} H(p^\sigma, t) = W(p, t).$$

En effet, si $p$ est un facteur de $KU$, tout entier $\sigma > \left[\dfrac{\nu \log \log t}{\log p}\right]$ satisfait aux inégalités

$$p^\sigma > (\log t)^\nu \geqq K^2 U^2,$$

d'où il suit $\sigma > 2\omega \geqq \omega + 1$, de sorte que $H(p^\sigma, t)$ s'annule; si $p$ n'est pas un facteur de $KU$, on a $\omega = 0$, de sorte que $H(p^\sigma, t)$ s'annule pour tout entier $\sigma > 1$, a fortiori pour tout entier $\sigma > \left[\dfrac{\nu \log \log t}{\log p}\right]$. Ainsi nous trouvons

$$\Omega_\nu(t) = \prod_p \Big(1 + \sum_{\sigma=1}^{\left[\frac{\nu \log \log t}{\log p}\right]} H(p^\sigma, t)\Big) = \prod_{p \leqq (\log t)^\nu} W(p, t) = \Omega_\nu^*(t)$$

d'après la définition de cette dernière fonction.



Nous pouvons donc remplacer dans (51) $\Omega_\nu(t)$ par $\Omega_\nu^*(t)$, si l'on remplace en même temps dans le second membre $c_{96}$ par $c_{97}$; en effet, les contributions des termes dans lesquels $(\log t)^\nu$ est inférieur à $K^2 U^2$, sont inférieures à $c_{98}$.

Pour un nombre premier $p$ qui n'est pas un facteur de $KUG$, le produit $(p-1)\, W(p, t)$ est d'après sa définition égal au nombre des nombres naturels $h \leqq p$ tels que $\psi(h) - t$ ne soit pas divisible par $p$. On a donc d'une part $(p-1)\, W(p, t) \leqq p$. Puisque $p$ n'est pas un facteur de plus grand commun diviseur $G$ de tous les nombres $\psi(x) - \psi(0)$, où $x$ est entier, il est exclu que tous les coefficients du polynôme $\psi(x) - \psi(0)$ sont divisibles par $p$. Ainsi on obtient d'autre part $(p-1)\, W(p, t) \geqq p - g$. On a donc

$$|\, W(p, t) - 1\,| \leqq \frac{g}{p-1}, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (53)$$

de sorte que le lemme 12 fournit l'inégalité

$$|\, \Omega_\nu^*(t)\,| \leqq c_{99} (\log \log t)^g \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (54)$$

On sait que

$$L(t) = \sum_{v+v'=t} r(v)\, r'(v')$$

est égal au nombre des nombres premiers $p \equiv u \,(mod.\, U)$ tels que $t$ peut être mis sous la forme $t = Kp + \psi(x)$, où $x$ est un nombre naturel avec $\psi(x) \geqq A'$. La différence $F(t) - L(t)$ est donc le nombre des nombres premiers $p \equiv u \,(mod.\, U)$ tels que $t - Kp$ est égal à un nombre de la forme $\psi(x) < A'$, c'est-à-dire

$$0 \leqq F(t) - L(t) \leqq c_{100} A'^{\frac{1}{g}}. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (55)$$

En vertu de (37) et (39) on trouve

$$\Lambda(t) = \sum_{v+v'=t} \varrho(v)\, \varrho'(v') = c_{101} \sum_{\substack{v \geqq 2K \\ v' \geqq A' \\ v+v'=t}} \frac{v'^{-1+\frac{1}{g}}}{\log \frac{v}{K}},$$

où

$$c_{101} = \frac{1}{K g\, b^{\frac{1}{g}}\, \varphi(U)},$$

par conséquent en vertu de (34)

$$0 \leqq \Phi(t) - \Lambda(t) = c_{101} \sum_{\substack{v \geqq 2K \\ 2 \leqq v' < A' \\ v+v'=t}} \frac{v'^{-1+\frac{1}{g}}}{\log \frac{v}{K}}.$$

Si $t$ est $\geqq 2A'$, le dénominateur $log\,\frac{v}{K}$ dans la dernière somme est supérieur à $log\,\frac{t}{2K}$, par conséquent

$$\Phi(t)-\Lambda(t)<\frac{c_{102}\,A'^{\frac{1}{g}}}{log\,t}.$$

Si $A'\leqq t<2A'$, on a

$$\Phi(t)-\Lambda(t)\leqq c_{101}\sum_{\substack{v\geqq K\sqrt{A'}\\ 2\leqq v'<A'\\ v+v'=t}}\frac{v'^{-1+\frac{1}{g}}}{log\sqrt{A'}}+c_{101}\sum_{\substack{2K\leqq v<K\sqrt{A'}\\ 2\leqq v'<A'\\ v+v'=t}}\frac{v'^{-1+\frac{1}{g}}}{log\,2}$$

$$<\frac{c_{103}\,A'^{\frac{1}{g}}}{log\,A'}<\frac{c_{104}\,A'^{\frac{1}{g}}}{log\,t}$$

et finalement dans le cas où $t<A'$ on obtient

$$\Phi(t)-\Lambda(t)\leqq c_{101}\sum_{\substack{v\geqq K\sqrt{t}\\ v'\geqq 2\\ v+v'=t}}\frac{v'^{-1+\frac{1}{g}}}{log\sqrt{t}}+c_{101}\sum_{\substack{2\leqq v<K\sqrt{t}\\ v'\geqq 2\\ v+v'=t}}\frac{v'^{-1+\frac{1}{g}}}{log\,2}$$

$$<\frac{c_{105}\,t^{\frac{1}{g}}}{log\,t}<\frac{c_{105}\,A'^{\frac{1}{g}}}{log\,t},$$

de sorte qu'on trouve dans tous les cas

$$0\leqq\Phi(t)-\Lambda(t)<\frac{c_{106}\,A'^{\frac{1}{g}}}{log\,t}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (56)$$

Les inégalités (54), (55) et (56) nous donnent maintenant le résultat

$$|F(t)-\Phi(t)\,\Omega_\nu^*(t)|<|L(t)-\Lambda(t)\,\Omega_\nu^*(t)|+c_{107}\,A'^{\frac{1}{g}},$$

par conséquent en vertu de (51), appliqué avec $\Omega_\nu^*(t)$ au lieu de $\Omega_\nu(t)$,

$$\sum_{t=2}^{[N]}|F(t)-\Phi(t)\,\Omega_\nu^*(t)|^2<c_{108}\{A'^{-2+\frac{2}{g}}\,N^3\,n^{-gM}+A'^{\frac{2}{g}}\,N\}$$

$$=c_{109}\,N^{1+\frac{2}{g}}\,n^{-M},$$

puisque $A'$ est égal à $N\,n^{-\frac{1}{2}gM}$.

Ainsi la proposition 9 est démontrée.

Démonstration de la proposition 8.



Il suffit de déduire l'inégalité

$$A<c_{110}\,N\,n^{-m} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (57)$$

pour le nombre $A$ des exceptions $\leqq N$ qui sont supérieures à $2K+1$ et supérieures à $Nn^{-m}$; dans cette démonstration $c_{110}, c_{111}, \ldots, c_{114}$ désignent des nombres positifs, dépendant uniquement de $m, \nu, K, U$ et du choix du polynôme $\psi(x)$.

Comme nous l'avons observé dans la communication précédente, $W(p,t)$ est positif pour tout nombre premier $p$ et pour tout entier $t$ appartenant à l'ensemble $E$. Le lemme 13 nous apprend donc en vertu de (53)

$$\Omega_\nu^*(t)=\prod_{p\leqq(log\,t)^\nu}W(p,t)\geqq c_{111}\,(\nu\,log\,log\,t)^{-g}.$$

En outre on a pour tout entier $t\geqq 2K+2$

$$\Phi(t)=K^{-1}\,g^{-1}\,b^{-\frac{1}{g}}\,\varphi^{-1}(U)\sum_{h=2}^{t-2K}\frac{h^{-1+\frac{1}{g}}}{log\,(t-h)-log\,K}>\frac{c_{112}\,t^{\frac{1}{g}}}{log\,t}.$$

Chaque exception $t$ qui est supérieure à $2K+1$ et supérieure à $Nn^{-m}$, satisfait donc aux inégalités

$$|F(t)-\Phi(t)\,\Omega_\nu^*(t)|\geqq\frac{\Phi(t)\,\Omega_\nu^*(t)}{(log\,t)^m}>\frac{c_{113}\,t^{\frac{1}{g}}\,(\nu\,log\,log\,t)^{-g}}{(log\,t)^{1+m}}$$

$$>c_{114}\,N^{\frac{1}{g}}\,n^{-\frac{m}{g}-1-m}\,(log\,n)^{-g}.$$

Puisque $\nu$ est supérieur à $3mg+2m+2g$, on peut choisir un nombre $M$ entre $\frac{2m}{g}+2+3m$ et $\frac{\nu}{g}$, de sorte que la proposition 9 nous fournit l'inégalité

$$A\,c_{114}^2\,N^{\frac{2}{g}}\,n^{-\frac{2m}{g}-2-2m}\,(log\,n)^{-2g}<c_{70}\,N^{1+\frac{2}{g}}\,n^{-M},$$

qui entraîne (57). Ainsi la proposition 8 est démontrée.