Mathematics. — *Ueber die Beziehungen zwischen den geometrischen Grössen in einer X_n und in einer in der X_n eingebetteten X_m.* Von J. A. SCHOUTEN.

(Communicated at the meeting of May 28, 1938.)

1. *Die verschiedenen Fälle von Einbettung.*

Es seien $x^\varkappa$; $\varkappa, \ldots, \tau = 1, \ldots, n$; Koordinaten in einer X_n und y^a; $a, \ldots, h = 1, \ldots, m$ Koordinaten in einer X_m. Wir können nun bezüglich der Einbettung der X_m in der X_n acht verschiedene Fälle unterscheiden:

Fall 1. Einfache Einbettung ohne weitere Annahmen, d. h. jedem Punkte y^a der X_m ist eindeutig ein Punkt $x^\varkappa$ der X_n zugeordnet vermöge Gleichungen von der Form

$$x^\varkappa = x^\varkappa (y^1, \ldots, y^m). \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

In jedem Punkte der X_n bestehen zwei Grössen, der Affinor

$$B_b^\varkappa = \partial_b \, \xi^\varkappa \quad ; \quad \partial_b = \frac{\partial}{\partial \eta^b} \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

und die einfache kovariante m'-Vektordichte ($m' = n - m$)

$$\mathfrak{t}_{\lambda_1 \ldots \lambda_{m'}} = \frac{1}{m!} \overset{n}{\mathfrak{e}}_{\varkappa_1 \ldots \varkappa_m \lambda_1 \ldots \lambda_{m'}} B^{\varkappa_1 \ldots \varkappa_m}_{b_1 \ldots b_m} \overset{m}{\mathfrak{E}}{}^{b_1 \ldots b_m} \;{}^{1)} \quad \ldots \quad (3)$$

vom Gewicht -1 in X_n und vom Gewicht $+1$ in X_m. Sowohl $B_b^\varkappa$ als $\mathfrak{t}_{\lambda_1 \ldots \lambda_{m'}}$ werden geometrisch dargestellt durch die lokale tangierende E_m.

Fall 1′. Einbettung mit äusserer Orientierung. In jedem Punkte der X_m bekommt die lokale E_m eine „äussere Orientierung", d. h. irgendeine (und folglich jede) E_{n-m} in der lokalen E_n, die keine Richtung mit der lokalen E_m gemeinsam hat, bekommt eine „innere Orientierung", d. h. eine Orientierung schlechthin ($(n-m)$-dimensionaler Schraubsinn). [2])

Eine solche äussere Orientierung wird dadurch festgelegt, dasz man irgend eine Grösse ω vom Absolutwert $+1$ und folgender Transformationsweise

$$\overset{(\varkappa', a')}{\omega} = \frac{\overset{n}{\triangle}}{|\overset{n}{\triangle}|} \frac{\overset{m}{\triangle}}{|\overset{m}{\triangle}|} \overset{(\varkappa, a)}{\omega} \quad ; \quad \overset{n}{\triangle} = Det \left(\frac{\partial x^{\varkappa'}}{\partial x^\varkappa} \right); \overset{m}{\triangle} = Det \left(\frac{\partial y^{a'}}{\partial y^a} \right). \quad (4)$$

1) Siehe für die Bedeutung von $\overset{n}{\mathfrak{e}}$ und $\overset{m}{\mathfrak{E}}$ SCHOUTEN–STRUIK, Einführung in die neueren Methoden der Differentialgeometrie, I, NOORDHOFF 1935, S. 20.

2) „Exterior orientation" und „interior orientation" bei O. VEBLEN und J. H. C. WHITEHEAD, The foundations of differential geometry, Cambridge Tracts, N⁰. 29 (1932), S. 55 und 56.

gibt. Denn $\omega \, \mathfrak{t}_{\lambda_1 \ldots \lambda_{m'}}$ transformiert sich folgendermassen

$$\overset{(\varkappa', a')}{\omega} \; \mathfrak{t}_{\lambda'_1 \ldots \lambda'_{m'}} = |\overset{n}{\triangle}| \, |\overset{m}{\triangle}|^{-1} \, A^{\lambda_1 \ldots \lambda_m}_{\lambda'_1 \ldots \lambda'_m} \overset{(\varkappa, a)}{\omega} \; \mathfrak{t}_{\lambda_1 \ldots \lambda_m}, \quad \ldots \quad (5)$$

d. h. genau so wie ein kovarianter m-Vektor der X_n bis auf einen stets positiven Faktor $|\overset{n}{\triangle}| \, |\overset{m}{\triangle}|^{-1}$. Diese Grösse hat also dieselbe Orientierung wie ein solcher kovarianter m-Vektor, und dies ist gerade die gewünschte äussere Orientierung der lokalen E_m [1]).

Fall 2. Einbettung mit Einspannung. In jedem Punkte der X_m ist eine m'-Richtung gegeben, die keine Richtung mit der lokalen E_m gemeinsam hat. Die Einspannung wird gegeben durch einen Affinor $B_\lambda^\varkappa$, dessen $\varkappa$-Gebiet aus allen kontravarianten Vektoren der lokalen E_m besteht, dessen λ-Gebiet besteht aus allen kovarianten Vektoren, deren $(n-1)$-Richtung die m'-Richtung der Einspannung enthalten, und der der Gleichungen

$$B_\varrho^\varkappa \, B_\lambda^\varrho = B_\lambda^\varkappa \quad \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

genügt. Aus $B_b^\varkappa$ und $B_\lambda^\varkappa$ lässt sich ein Affinor B_λ^a ableiten vermöge der Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} &(\alpha) \quad B_\lambda^a \, B_b^\lambda = B_b^a = \text{Einheitsaffinor der } X_m. \\ &(\beta) \quad B_\lambda^b \, B_b^\varkappa = B_\lambda^\varkappa \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (7)$$

Das λ-Gebiet von B_λ^a fällt zusammen mit dem λ-Gebiet von $B_\lambda^\varkappa$. Im Falle 1 lässt sich B_λ^a noch nicht eindeutig festlegen, die Gleichung (7 α) allein lässt nämlich unendlich viele Lösungen zu. Ist aber $v^{\varkappa_1 \ldots \varkappa_p}$ ein einfacher p-Vektor, $p \leqq m$, der in der lokalen E_m liegt, so ist dennoch der Ausdruck $B^{a_1 \ldots a_p}_{\varkappa_1 \ldots \varkappa_p} v^{\varkappa_1 \ldots \varkappa_p}$ auch im Falle 1 eindeutig bestimmt.

Fall 2′. Einbettung mit orientierter Einspannung. Dieser Fall entsteht durch Kombination von 1′ und 2 und fordert also die Angabe von ω und $B_\lambda^\varkappa$.

Fall 3. Normalisierte Einbettung mit äusserer Orientierung. In jedem Punkte ist ein kovarianter m'-Vektor $t_{\lambda_1 \ldots \lambda_{m'}}$ gegeben, der die m-Richtung von E_m hat. Es genügt die Grösse

$$\mathfrak{z} = \frac{\mathfrak{t}_{\lambda_1 \ldots \lambda_{m'}}}{t_{\lambda_1 \ldots \lambda_m}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (8)$$

1) Nimmt man die Koordinatensysteme so, dass die Orientierung von $\underset{1}{e^a}, \ldots, \underset{m}{e^a}$ in dieser Reihenfolge gefolgt durch die äussere Orientierung die Orientierung von $\underset{1}{e^\varkappa}, \ldots, \underset{n}{e^\varkappa}$ in dieser Reihenfolge ergibt, so hat ω i.b. auf diese Koordinationsysteme den Wert $+1$.

zu geben, die sich offenbar folgendermassen transformiert

$$\overset{(\varkappa', a')}{\mathfrak{z}} = \overset{n}{\triangle}\, \overset{m}{\triangle}{}^{-1}\, \overset{(\varkappa, a)}{\mathfrak{z}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (9)$$

und also eine Dichte vom Gewicht -1 in X_n und vom Gewicht $+1$ in X_m ist. Aus (9) folgt

$$\omega = \frac{\mathfrak{z}}{|\mathfrak{z}|} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (10)$$

Bei dieser Art der Einbettung ist für jede $E_{m'}$ in der lokalen E_n, die keine Richtung mit der lokalen E_m gemeinsam hat, ein einfacher kontravarianter m'-Vektor $v^{\varkappa_1 \ldots \varkappa_{m'}}$ festgelegt durch die Forderung dass $v^{\varkappa_1 \ldots \varkappa_{m'}}$ in der E_m liegt und der Gleichung

$$v^{\varkappa_1 \ldots \varkappa_{m'}}\, t_{\varkappa_1 \ldots \varkappa_{m'}} = m'! \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (11)$$

genügt.

Fall 3'. Normalisierte Einbettung ohne Orientierung. Es genügt die Grösse $|\mathfrak{z}|$ zu geben. Dann ist auch das Produkt $\omega\, t_{\lambda_1 \ldots \lambda_{m'}} = |\mathfrak{z}|^{-1}\, \mathrm{t}_{\lambda_1 \ldots \lambda_{m'}}$ festgelegt aber weder ω noch $t_{\lambda_1 \ldots \lambda_{m'}}$ für sich.

Fall 4. *Normalisierte Einbettung mit orientierter Einspannung.* Dieser Fall entsteht durch Kombination von 3 und 3' und fordert also die Angabe von $B^{\varkappa}_{\lambda}$ und $\mathfrak{z}$. In der m'-Richtung der Einspannung liegt ein m'-Vektor $n^{\varkappa_1 \ldots \varkappa_{m'}}$, der durch die Gleichungen

$$\left.\begin{array}{ll} \alpha) & n^{\varkappa_1 \ldots \varkappa_{m'}}\, t_{\varkappa_1 \ldots \varkappa_{m'}} = m'! \\ \beta) & B^{\varkappa}_{\varkappa_1}\, n^{\varkappa_1 \ldots \varkappa_{m'}} = 0 \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (12)$$

vollständig festgelegt ist und ausserdem der Gleichung

$$t_{\lambda_1 \ldots \lambda_{m'}}\, n^{\varkappa_1 \ldots \varkappa_{m'}} = m'!\, C^{[\varkappa_1 \ldots \varkappa_{m'}]}_{[\lambda_1 \ldots \lambda_{m'}]}\,;\; C^{\varkappa}_{\lambda} = A^{\varkappa}_{\lambda} - B^{\varkappa}_{\lambda} \quad . \quad . \quad . \qquad (13)$$

genügt.

Fall 4'. Normalisierte Einbettung mit Einspannung ohne Orientierung. Dieser Fall entsteht durch Kombination von 2 und 3' und fordert also die Angabe von $B^{\varkappa}_{\lambda}$ und $|\mathfrak{z}|$. Die Produkte $\omega\, t_{\lambda_1 \ldots \lambda_{m'}}$ als $\omega\, n^{\varkappa_1 \ldots \varkappa_{m'}}$ sind festgelegt.

Folgende Tabelle gibt eine Uebersicht der verschiedenen Fälle und der bei ihnen aftretenden Grössen [1]):

[1]) $+$ steht für „wohl", $-$ für „nicht", t steht für $t_{\lambda_1 \ldots \lambda_{m'}}$ t für $\mathrm{t}_{\lambda_1 \ldots \lambda_{m'}}$ und n für $n^{\varkappa_1 \ldots \varkappa_{m'}}$. Grössen, die sich aus den anderen in der selben Reihe bzw. Spalte vorkommenden ableiten lassen, sind eingeklammert.

Einbettung	1	1'	2	2'	3'	3	4'	4	vorkommende Grössen ausser $B^{\varkappa}_{b}$ und t
schliesst ein		1	1	1, 1', 2	1	1, 1', 3'	1, 2, 3'	1, 1', 2, 2', 3, 3', 4'	
orientiert	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$	ω
eingespannt	$-$	$-$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$	$B^{\varkappa}_{\lambda}, (B^{a}_{\lambda})$
normalisiert	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$	$(\omega\, t), \lvert\mathfrak{z}\rvert$
vorkommende Grössen ausser $B^{\varkappa}_{b}$ und t		ω	$B^{\varkappa}_{\lambda}, (B^{a}_{\lambda})$	ω $B^{\varkappa}_{\lambda}, (B^{a}_{\lambda})$	$(\omega\, t), \lvert\mathfrak{z}\rvert$	(ω) $(t)\, \mathfrak{z}$	$B^{\varkappa}_{\lambda}, (B^{a}_{\lambda})$ $(\omega\, t), \lvert\mathfrak{z}\rvert$ $(\omega\, n)$	(ω) $B^{\varkappa}_{\lambda}, (B^{a}_{\lambda})$ $(t)\, \mathfrak{z}$ (n)	

2. *Beziehungen zwischen den Grössen der X_n und der X_m.*

A. *Kontravariante p-Vektoren.*

Ein einfacher kontravarianter p-Vektor $v^{\varkappa_1 \ldots \varkappa_p}$ der X_n in einem Punkte der X_m bestimmt im Falle 2 für $p \leqq m$ (und für $p = 0$ sogar im Falle 1) eindeutig einen kontravarianten p-Vektor der X_m

$$'v^{a_1 \ldots a_p} = B^{a_1 \ldots a_p}_{\varkappa_1 \ldots \varkappa_p}\, v^{\varkappa_1 \ldots \varkappa_p} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (14)$$

Dieser p-Vektor ist die Projektion von $v^{\varkappa_1 \ldots \varkappa_p}$ auf die lokale E_m mit der m'-Richtung der Einspannung als Projektionsrichtung. Die Gleichung (14) lässt sich für $p > 0$ nicht nach $v^{\varkappa_1 \ldots \varkappa_p}$ lösen. Fängt man aber an mit $'v^{a_1 \ldots a_p}$ und definiert man

$$'v^{\varkappa_1 \ldots \varkappa_p} = B^{\varkappa_1 \ldots \varkappa_p}_{a_1 \ldots a_p}\, 'v^{a_1 \ldots a_p}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (15)$$

was sogar im Falle 1 stets möglich ist, so lässt sich diese Gleichung nach $'v^{a_1 \ldots a_p}$ lösen:

$$'v^{a_1 \ldots a_p} = B^{a_1 \ldots a_p}_{\varkappa_1 \ldots \varkappa_p}\, 'v^{\varkappa_1 \ldots \varkappa_p} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (16)$$

und zwar nicht nur im Falle 2 sondern auch im Falle 1, da die $'v^{\varkappa_1 \ldots \varkappa_p}$ in der lokalen E_m liegt.

Für $p \geqq m'$ bestimmt $v^{\varkappa_1 \ldots \varkappa_p}$ im Falle 3 noch eine andere Grösse der X_m

$$''v^{a_1 \ldots a_{p-m'}} = \frac{1}{m'!}\, B^{a_1 \ldots a_{p-m'}}_{\varkappa_1 \ldots \varkappa_{p-m'}}\, v^{\varkappa_1 \ldots \varkappa_p}\, t_{\varkappa_{p-m'+1} \ldots \varkappa_p} \quad . \quad . \quad . \qquad (17)$$

Die $(p - m')$-Richtung von $''v^{a_1 \ldots a_{p-m'}}$ ist der Schnitt der p-Richtung von $v^{\varkappa_1 \ldots \varkappa_p}$ mit der m-Richtung der lokalen E_m. Diese Gleichung kann nicht nach $v^{\varkappa_1\ldots\varkappa_p}$ gelöst werden. Fängt man aber an mit ${}''v^{a_1\ldots a_{p-m'}}$ und definiert man

$$''v^{\varkappa_1\ldots\varkappa_p} = \binom{p}{m'} \, ''v^{a_1\ldots a_{p-m'}} \, B^{[\varkappa_1\ldots\varkappa_{p-m'}}_{a_1\ldots a_{p-m'}} \, n^{\varkappa_{p-m'+1}\ldots\varkappa_p]}, \quad . \quad . \quad (18)$$

was im Falle 4 stets möglich ist (für $p=n$ sogar im Falle 3, da die Unbestimmtheit von $n^{\varkappa_1\ldots\varkappa_{m'}}$ für $p=n$ das rechte Glied nicht beeinflusst), so lässt sich diese Gleichung nach ${}''v^{a_1\ldots a_{p-m'}}$ lösen:

$$''v^{a_1\ldots a_{p-m'}} = \frac{1}{m'!} B^{a_1\ldots a_{p-m'}}_{\varkappa_1\ldots\varkappa_{p-m'}} \, ''v^{\varkappa_1\ldots\varkappa_p} \, t_{\varkappa_{p-m'+1}\ldots\varkappa_p} \,. \quad . \quad . \quad (19)$$

Nimmt man im Falle 4 das Koordinatensystem so, dass auf der X_m $\xi^1=\eta^1, \ldots \xi^m=\eta^m$, ist, so ist $\mathfrak{t}_{m+1\ldots n}=1$, $t_{m+1\ldots n}=\mathfrak{z}^{-1}$, und alle Bestimmungszahlen von $\mathfrak{t}_{\lambda_1\ldots\lambda_{m'}}$ und $t_{\lambda_1\ldots\lambda_{m'}}$ mit einem Index von *1* bis m verschwinden[1]). Man kann nun die Richtung der Parameterlinien von $\xi^{m+1}, \ldots, \xi^n$ auf der X_m noch in der m'-Richtung der Einspannung wählen, sodass auch alle Bestimmungszahlen von $n^{\varkappa_1\ldots\varkappa_{m'}}$ mit einem Index von *1* bis m verschwinden und erhält dann

$$n^{m+1\ldots n} = \mathfrak{z} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

und infolgedessen, wenn wir $\xi^1, \ldots, \xi^m$ als Koordinaten in der X_m benutzen,

$$\left.\begin{aligned} 'v^{\alpha_1\ldots\alpha_p} &= v^{\alpha_1\ldots\alpha_p} \\ ''v^{\alpha_1\ldots\alpha_{p-m'}} &= \mathfrak{z}^{-1} \, v^{\alpha_1\ldots\alpha_{p-m'}, m+1,\ldots,n}. \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

Man kann das Koordinatensystem sogar noch weiter spezialisieren sodass $\mathfrak{z}=1$ wird. Es ist bemerkenswert, dass für $m \geqq p \geqq m'$ im Falle 4 beide Grössen ${}'v^{a_1\ldots a_p}$ und ${}''v^{a_1\ldots a_{p-m'}}$ existieren, und dass diese beiden Grössen, wie aus (21) hervorgeht, für $m=n-1$ (also $m \geqq p \geqq 1$) in diesem Falle $v^{\varkappa_1\ldots\varkappa_p}$ vollständig bestimmen.

Bekanntlich lässt sich $v^{\varkappa_1\ldots\varkappa_p}$ mit Hilfe von $\overset{n}{\mathfrak{e}}_{\lambda_1\ldots\lambda_n}$ als kovariante p'-Vektordichte in X_n darstellen ($p'=n-p$):

$$\mathfrak{v}_{\lambda_1\ldots\lambda_{p'}} = \frac{1}{p!} \overset{n}{\mathfrak{e}}_{\lambda_1\ldots\lambda_{p'}\varkappa_1\ldots\varkappa_p} v^{\varkappa_1\ldots\varkappa_p} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

[1]) Die Koordinatensysteme dieser Art gehen auseinander hervor durch die Transformationen einer Gruppe, die von A. KAWAGUCHI betrachtet worden ist. (The foundations of the theory of displacements II, Proc. Imp. Academy, **10**, 45—48 (1934).) Aus dieser Bemerkung ergeben sich die Beziehungen zwischen unseren Betrachtungen und den Untersuchungen von KAWAGUCHI, S. HOKARI (Ueber die Uebertragungen, die der erweiterten Transformationsgruppe angehören, Journ. Hokkaido Imp. Univ., **3**, 15—26 (1935); **4**, 14—50 (1935)) und S. GOLAB (Ueber eine Art der Geometrie von KAWAGUCHI-HOKARI, Ann. Soc. Polon. Math., **16**, 25—30 (1937)) und den in diesen Arbeiten zitierten Untersuchungen von T. HOSOKAWA, A. WUNDHEILER, V. HLAVATY, E. CARTAN, T. Y. THOMAS, J. A. SCHOUTEN und ST. GOLAB.

und ebenso ${}'v^{a_1\ldots a_p}$ und ${}''v^{a_1\ldots a_{p-m'}}$ als kovariante $(m-p)$ bzw. $(n-p)$-Vektordichte in X_m

$$'\mathfrak{v}_{b_1\ldots b_{m-p}} = \frac{1}{p!} \overset{m}{\mathfrak{e}}_{b_1\ldots b_{m-p}\,a_1\ldots a_p} \, 'v^{a_1\ldots a_p} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

$$''\mathfrak{v}_{b_1\ldots b_{p'}} = \frac{1}{(m-p')!} \overset{m}{\mathfrak{e}}_{b_1\ldots b_{p'}\,a_1\ldots a_{m-p'}} \, ''v^{a_1\ldots a_{m-p'}}. \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

Mit Hilfe dieser Gleichungen lassen sich die Beziehungen zwischen $\mathfrak{v}_{\lambda_1\ldots\lambda_{p'}}$, ${}'\mathfrak{v}_{\lambda_1\ldots\lambda_{p'}}$, ${}''\mathfrak{v}_{\lambda_1\ldots\lambda_{p'}}$, ${}'\mathfrak{v}_{b_1\ldots b_{m-p}}$ und ${}''\mathfrak{v}_{b_1\ldots b_{p'}}$ aus (14), (15), (16) und (17), (18), (19) ableiten, z.B. ($p \geqq m'$):

$$''\mathfrak{v}_{b_1\ldots b_{p'}} = \mathfrak{z}^{-1} B^{\lambda_1\ldots\lambda_{p'}}_{b_1\ldots b_{p'}} \mathfrak{v}_{\lambda_1\ldots\lambda_{p'}} \quad \text{(Fall 3)}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

$$\left.\begin{aligned} ''\mathfrak{v}_{\lambda_1\ldots\lambda_{p'}} &= \mathfrak{z} \; B^{b_1\ldots b_{p'}}_{\lambda_1\ldots\lambda_{p'}} \, ''\mathfrak{v}_{b_1\ldots b_{p'}} \quad . \quad (26) \\ ''\mathfrak{v}_{b_1\ldots b_{p'}} &= \mathfrak{z}^{-1} B^{\lambda_1\ldots\lambda_{p'}}_{b_1\ldots b_{p'}} \, ''\mathfrak{v}_{\lambda_1\ldots\lambda_{p'}}. \quad . \quad (27) \end{aligned}\right\} \text{(Fall 4, Fall 3 für } p=n)$$

und (21) geht über in

$$\left.\begin{aligned} '\mathfrak{v}_{\beta_1\ldots\beta_{p'-m'}} &= \mathfrak{v}_{\beta_1\ldots\beta_{p'-m'}, m+1,\ldots,n} \\ ''\mathfrak{v}_{\beta_1\ldots\beta_{p'}} &= \mathfrak{z}^{-1} \, \mathfrak{v}_{\beta_1\ldots\beta_{p'}} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

B. *Kovariante p-Vektoren.*

Ein einfacher kovarianter p-Vektor $w_{\lambda_1\ldots\lambda_p}$ der X_n in einem Punkte der X_m bestimmt im Falle 1 für $p \leqq m$ einen kovarianten p-Vektor der X_m:

$$'w_{b_1\ldots b_p} = B^{\lambda_1\ldots\lambda_p}_{b_1\ldots b_p} w_{\lambda_1\ldots\lambda_p} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$

Dieser p-Vektor ist der Schnitt von $w_{\lambda_1\ldots\lambda_p}$ mit der lokalen E_m. Die Gleichung (29) lässt sich nicht nach $w_{\lambda_1\ldots\lambda_p}$ lösen. Fängt man aber mit ${}'w_{b_1\ldots b_p}$ an und definiert man

$$'w_{\lambda_1\ldots\lambda_p} = B^{b_1\ldots b_p}_{\lambda_1\ldots\lambda_p} \, 'w_{b_1\ldots b_p}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30)$$

was im Falle 2 stets möglich ist (für $p=0$ sogar im Falle, 1 da die Unbestimmtheit von B^b_λ für $p=0$ das rechte Glied nicht beeinflusst), so lässt sich die Gleichung (30) nach ${}'w_{b_1\ldots b_p}$ lösen

$$'w_{b_1\ldots b_p} = B^{\lambda_1\ldots\lambda_p}_{b_1\ldots b_p} \, 'w_{\lambda_1\ldots\lambda_p}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31)$$

Die p'-Richtung von ${}'w_{\lambda_1\ldots\lambda_p}$ enthält die m'-Richtung der Einspannung.

Für $p \geqq m'$ bestimmt $w_{\lambda_1\dots\lambda_p}$ im Falle 4 (für $p = n$ sogar im Falle 3) noch eine andere Grösse der X_m

$$''w_{b_1\dots b_{p-m'}} = \frac{1}{m!}\, B^{\lambda_1\dots\lambda_{p-m'}}_{b_1\dots b_{p-m'}}\, w_{\lambda_1\dots\lambda_p}\, n^{\lambda_{p-m'+1}\dots\lambda_p} \quad . \; . \; . \quad (32)$$

Die $(n-p)$-Richtung von $''w_{b_1\dots b_{p-m'}}$ ist die Projektion der $(n-p)$-Richtung von $w_{\lambda_1\dots\lambda_p}$ auf die lokale E_m mit der m'-Richtung der Einspannung als Projektionsrichtung. Diese Gleichung kann für $p \neq n$ nicht nach $w_{\lambda_1\dots\lambda_p}$ gelöst werden. Fängt man aber mit $''w_{b_1\dots b_{p-m'}}$ an und definiert man

$$''w_{\lambda_1\dots\lambda_p} = \binom{p}{m'}\, ''w_{b_1\dots b_{p-m'}}\, B^{b_1\dots b_{p-m'}}_{[\lambda_1\dots\lambda_{p-m'}}\, t_{\lambda_{p-m'+1}\dots\lambda_p]}\,, \quad . \; . \quad (33)$$

was im Falle 3 stets möglich ist, so lässt sich diese Gleichung nach $''w_{b_1\dots b_{p-m'}}$ lösen

$$''w_{b_1\dots b_{p-m'}} = \frac{1}{m!}\, B^{\lambda_1\dots\lambda_{p-m'}}_{b_1\dots b_{p-m'}}\, ''w_{\lambda_1\dots\lambda_p}\, n^{\lambda_{p-m'+1}\dots\lambda_p}\,. \quad . \; . \; . \quad (34)$$

und zwar nicht nur im Falle 4 sondern auch im Falle 3, da die Unbestimmtheit von $n^{\varkappa_1\dots\varkappa_{m'}}$ das rechte Glied nicht beeinflusst.

Nimmt man im Falle 4 das besondere oben eingeführte Koordinatensystem, so gehen (29) und (32) über in

$$\left.\begin{array}{l} 'w_{\beta_1\dots\beta_p} = w_{\beta_1\dots\beta_p} \\ ''w_{\beta_1\dots\beta_{p-m'}} = \mathfrak{z}\, w_{\beta_1\dots\beta_{p-1},\, m+1,\dots,n} \end{array}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (35)$$

Auch hier existieren für $m \geqq p \geqq m'$ im Falle 4 beide Grössen $'w_{b_1\dots b_p}$ und $''w_{b_1\dots b_{p-m'}}$ und aus (35) folgt, dass diese beiden Grössen zusammen für $m = n-1$ (also $m \geqq p \geqq 1$) in diesem Falle $w_{\lambda_1\dots\lambda_p}$ vollständig bestimmen.

Vollziehen wir wieder den Uebergang zu den kontravarianten Dichten in X_n und X_m so lassen sich die mit (29), (30), (31) und (32), (33), (34) korrespondierenden Formeln ableiten, z. B. $(p \geqq m')$:

$$''\mathfrak{w}^{a_1\dots a_{p'}} = \mathfrak{z}\, B^{\mathfrak{a}_1\dots\mathfrak{a}_{p'}}_{\varkappa_1\dots\varkappa_{p'}}\, \mathfrak{w}^{\varkappa_1\dots\varkappa_{p'}} \quad \text{(Fall 4, Fall 3 für } p = n\text{)} \quad (36)$$

$$\left.\begin{array}{ll} ''\mathfrak{w}^{\varkappa_1\dots\varkappa_{p'}} = \mathfrak{z}^{-1}\, B^{\varkappa_1\dots\varkappa_{p'}}_{\mathfrak{a}_1\dots\mathfrak{a}_{p'}}\, ''\mathfrak{w}^{a_1\dots a_{p'}} \quad . \; . \; . \; . \; . & (37) \\ ''\mathfrak{w}^{a_1\dots a_{p'}} = \mathfrak{z}\, B^{\mathfrak{a}_1\dots\mathfrak{a}_{p'}}_{\varkappa_1\dots\varkappa_{p'}}\, ''\mathfrak{w}^{\varkappa_1\dots\varkappa_{p'}}\,. \quad . \; . \; . \; . \; . & (38) \end{array}\right\} \text{(Fall 3)}$$

und (35) geht über in

$$\left.\begin{array}{l} '\mathfrak{w}^{\alpha_1\dots\alpha_{p'-m'}} = \mathfrak{w}^{\alpha_1\dots\alpha_{p'-m'},\, m+1,\dots,n} \\ ''\mathfrak{w}^{\alpha_1\dots\alpha_{p'}} = \mathfrak{z}\, \mathfrak{w}^{\alpha_1\dots\alpha_{p'}} \end{array}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (39)$$

Folgende Tabelle gibt eine Uebersicht[1])

X_n $p \leqq m$	*Fall* 1	*Fall* 2	X_m	X_n $p \geqq m'$	*Fall* 3	*Fall* 4	X_m
$v^{\varkappa_1\dots\varkappa_p}$	$p = 0$	$B^{\mathfrak{a}}_{\lambda}$	$'v^{a_1\dots a_p}$	$v^{\varkappa_1\dots\varkappa_p}$	$(B^{\mathfrak{a}}_{\lambda}), t$	$B^{\mathfrak{a}}_{\lambda}, t$	$''v^{a_1\dots a_{p-m'}}$
$\mathfrak{v}_{\lambda_1\dots\lambda_{p'}}$	$(\rightleftarrows)$	$\rightarrow$	$'\mathfrak{v}_{b_1\dots b_{m-p}}$	$\mathfrak{v}_{\lambda_1\dots\lambda_{p'}}$	$\rightarrow$	$\rightarrow$	$''\mathfrak{v}_{b_1\dots b_{p'}}$
$'v^{\varkappa_1\dots\varkappa_p}$	$B^{\varkappa}_{b}$ $\leftrightarrows$	$B^{\varkappa}_{b}$ $\leftrightarrows$	$'v^{a_1\dots a_p}$	$''v^{\varkappa_1\dots\varkappa_p}$	$p = n$ $(\leftrightarrows)$	$B^{\varkappa}_{b}, n$ $\leftrightarrows$	$''v^{a_1\dots a_{p-m'}}$
$'\mathfrak{v}_{\lambda_1\dots\lambda_{p'}}$	$(B^{\mathfrak{a}}_{\lambda})$	$B^{\mathfrak{a}}_{\lambda}$	$'\mathfrak{v}_{b_1\dots b_{m-p}}$	$''\mathfrak{v}_{\lambda_1\dots\lambda_{p'}}$		$B^{\mathfrak{a}}_{\lambda}, t$	$''\mathfrak{v}_{b_1\dots b_{p'}}$
$w_{\lambda_1\dots\lambda_p}$	$B^{\varkappa}_{b}$	$B^{\varkappa}_{b}$	$'w_{b_1\dots b_p}$	$w_{\lambda_1\dots\lambda_p}$	$p = n$	$B^{\varkappa}_{b}, n$	$''w_{b_1\dots b_{p-m'}}$
$\mathfrak{w}^{\varkappa_1\dots\varkappa_{p'}}$	$\rightarrow$	$\rightarrow$	$'\mathfrak{w}^{a_1\dots a_{m-p}}$	$\mathfrak{w}^{\varkappa_1\dots\varkappa_{p'}}$	$(\rightleftarrows)$		$''\mathfrak{w}^{a_1\dots a_{p'}}$
$'w_{\lambda_1\dots\lambda_p}$	$p = 0$ $(\leftrightarrows)$	$B^{\mathfrak{a}}_{\lambda}$ $\leftrightarrows$	$'w_{b_1\dots b_p}$	$''w_{\lambda_1\dots\lambda_p}$	$(B^{\mathfrak{a}}_{\lambda}), t$ $\leftrightarrows$	$B^{\mathfrak{a}}_{\lambda}, t$ $\leftrightarrows$	$''w_{b_1\dots b_{p-m'}}$
$'\mathfrak{w}^{\varkappa_1\dots\varkappa_{p'}}$		$B^{\varkappa}_{b}$	$'\mathfrak{w}^{a_1\dots a_{m-p}}$	$''\mathfrak{w}^{\varkappa_1\dots\varkappa_p}$	$B^{\varkappa}_{b}, (n)$	$B^{\varkappa}_{b}, n$	$''\mathfrak{w}^{a_1\dots a_{p'}}$

Die hier vorkommenden Grössen sind, als Dichten geschrieben, gewöhnliche Dichten, d. h. solche, die sich mit einer Potenz von $\triangle$ transformieren. Betrachtet man statt dessen die sogenannten WEYLschen Dichten, die sich mit einer Potenz von $|\triangle|$ transformieren und die mit Ihnen vermöge $\overset{n}{\mathfrak{E}}$, $\overset{n}{\mathfrak{e}}$, $\overset{m}{\mathfrak{E}}$ und $\overset{m}{\mathfrak{e}}$ korrespondierenden Grössen, so treten die Fälle 1′, 2′, 3′ 4′ an Stelle von 1, 2, 3, 4. Sonst ändert sich an der Uebersichtstabelle nichts. Auch alle Formeln bleiben erhalten, nur bekommt die eine Seite jeder Formel einen Faktor ω. Auf die geometrische Bedeutung solcher Grössen und ihre Beziehungen i. b. auf X_m und X_n soll in einer anderen Arbeit näher eingegangen werden.

[1]) Die verwendeten Grössen sind bei den Pfeilen angegeben. Grössen, die im vorliegenden Falle unbestimmt sind, die aber doch verwendet werden können, da das Resultat von der Unbestimmtheit nicht beeinflusst wird, sind eingeklammert, t steht für $t_{\lambda_1\dots\lambda_{p'}}$ und n für $n^{\varkappa_1\dots\varkappa_{p'}}$.