

were made first in East-West direction without lead and with 20 cm of lead in between and 10 cm of lead over the counters. Besides, with a horizontal layer of 33 cm of Fe over the counters. Subsequently determinations were made with and without lead in the direction North-South. We find now that our results in the direction North-South are in exact agreement with the determinations in the direction East-West, so that at 50° magnetic latitude there is a complete symmetry of rotation in the distribution of the intensity. But now a remarkable fact becomes manifest. The determinations with 30 cm of lead between the counters, which are represented by the line beginning at 65, may be converted to vertical intensity 100 and then we obtain a distribution as has been indicated by the uppermost line, deviating from $\cos^2 a$.

However, we are able to explain this. The fairly thick layer of lead of 30 cm, which corresponds to $1/3$ atm., has disturbed the geometry. If, namely, the 30 cm of lead were placed as a flat layer over the counters, we might, by means of the absorption coefficient determined for these directions, find where the points are situated and we see indeed that they are again situated exactly on the line without lead. The points indicated by arrows represent these values. It becomes also apparent that the absorption coefficient in an oblique direction is smaller, in accordance with the thicker layer that has been passed. Consequently the rays are indeed more penetrating. In the same way we find that the absorption coefficient is smaller according as a thicker layer of material has been traversed⁸⁾. We can understand this entirely in connection with the decrease we have got for the rays penetrating into water. The distribution of the intensity, namely, is a result of the decrease of energy of the particles, combined with the original distribution of energy, as may be seen from the foregoing article. If this is such as we have now observed by decrease in water, the distribution round the vertical must of necessity be the same for all layers in a homogeneous substance.

It is then a matter of course that this distribution in the upper layers of the atmosphere has not yet taken place, since the material that has been traversed is not yet sufficient to convert the original distribution of energy, which is isotropic, into one as it must be in the deeper layers. There laterally the energy of the particles has already decreased so much that their coeff. of decrease is smaller, than for the particles in the vertical direction.

⁸⁾ J. CLAY, J. T. WIERSMA and E. M. BRUINS. *Physica* 4, 521 (1937).

Mathematics. — *Ueber die geometrische Deutung von gewöhnlichen p -Vektoren und W - p -Vektoren und den korrespondierenden Dichten.* Von J. A. SCHOUTEN.

(Communicated at the meeting of June 25, 1938.)

1. *Innere und äussere Orientierung.*

Bekanntlich kann man eine E_p oder eine p -Richtung in einer E_n auf zwei verschiedene Weisen orientieren¹⁾. Die erste, die sogenannte *innere Orientierung*, wird erhalten, indem man die E_p (oder eine E_p mit der gegebenen p -Richtung) eine Orientierung im üblichen Sinne beilegt. Eine solche Orientierung oder p -dimensionaler Schraubsinn kan festgelegt werden durch eine geordnete Folge von p unabhängigen mit einem Sinn versehenen Richtungen. Die zweite, die *äussere Orientierung*, wird dagegen erhalten indem man irgend eine E_{n-p} wählt, die mit der gegebenen E_p oder der gegebenen p -Richtung keine Richtung gemeinschaftlich hat und in dieser E_{n-p} eine innere Orientierung festlegt. Wir erweitern diese Definition folgendermassen. Die innere Orientierung der E_n ist die Orientierung im üblichen Sinne, die äussere ist ein $+$ - oder $-$ -Zeichen. Die innere Orientierung einer E_0 ist ein $+$ - oder $-$ -Zeichen, die äussere eine innere Orientierung der E_n .

2. *Kontra- und kovariante p -Vektoren.*

Es seien x^z ($\kappa, \lambda, \mu, \nu, \pi, \rho, \sigma, \tau = 1, \dots, n$) kartesische Koordinaten der E_n und $x^{z'}$ ($\kappa', \lambda', \mu', \nu', \pi', \rho', \sigma', \tau' = 1', \dots, n'$) andere kartesische Koordinaten mit der Transformationsformel

$$x^{z'} = A_z^{z'} x^z + A_0^{z'} ; \text{Det.}(A_z^{z'}) \neq 0 \dots \dots \dots (1)$$

wo die $A_z^{z'}$, $A_0^{z'}$ Konstanten sind.

Ein kontravarianter p -Vektor $v^{z_1 \dots z_p}$ (alternierend in allen Indizes) ist definiert durch die Transformationsformel

$$v^{z'_1 \dots z'_p} = A_{z_1 \dots z_p}^{z'_1 \dots z'_p} v^{z_1 \dots z_p} \dots \dots \dots (2)$$

¹⁾ O. VEULEN und J. H. C. WHITEHEAD, The foundations of differential geometry, *Cambr. Tracts* N^o 29 (1932) S. 55 und 56.

Ist der p -Vektor einfach (d. h. alternierendes Produkt von p Vektoren) und $p > 0$, so kann derselbe geometrisch dargestellt werden durch einen einfach zusammenhängenden Teil einer E_p mit einer inneren Orientierung. Zwei solche Gebilde stellen dann und nur dann denselben p -Vektor dar, wenn 1. die beiden E_p vollständig parallel sind, 2. die zwei p -dimensionalen Inhalte gleich sind und 3. die Orientierungen übereinstimmen. Die $\kappa_1 \dots \kappa_p$ -Bestimmungszahl ist das Volum der Projektion des E_p -Teiles in der $(n-p)$ -Richtung der Massvektoren $e_{\lambda_1}, \dots, e_{\lambda_p}$ auf die Koordinaten- E_p , die von den Massvektoren $e^{\kappa_1}, \dots, e^{\kappa_p}$ aufgespannt wird, gemessen durch das Parallelotop dieser letzten Massvektoren und mit einem $+$ - oder $-$ -Zeichen versehen, je nachdem die mitprojizierte innere Orientierung denselben oder den entgegengesetzten Sinn hat als die von den Vektoren $e^{\kappa_1}, \dots, e^{\kappa_p}$ in dieser Reihenfolge bestimmte Orientierung.

Für $p = 0$ ergibt sich ein Skalar.

Ein kovarianter p -Vektor $w_{\lambda_1 \dots \lambda_p}$ (alternierend in allen Indizes) ist definiert durch die Transformationsformel

$$w_{\lambda'_1 \dots \lambda'_p} = A_{\lambda'_1 \dots \lambda'_p}^{\lambda_1 \dots \lambda_p} w_{\lambda_1 \dots \lambda_p} \dots \dots \dots (3)$$

Ist der p -Vektor einfach und $p > 0$, so kann derselbe geometrisch dargestellt werden durch einen Zylinder, dessen Inneres einfach zusammenhängend ist, und dessen Begrenzung besteht aus ∞^{p-1} (2 für $p = 1$) vollständig parallelen E_{n-p} , denen eine äussere Orientierung beigelegt ist. Zwei solche Gebilde stellen dann und nur dann denselben p -Vektor dar, wenn 1. die $(n-p)$ -Richtungen dieselben sind, 2. die zwei E_p -Teile die von den beiden Zylindern aus irgend einer (und folglich aus jeder) E_p , die keine Richtung mit der $(n-p)$ -Richtung gemeinschaftlich hat, ausgeschnitten werden, denselben p -dimensionalen Inhalt haben und 3. die Orientierungen übereinstimmen. Die $\lambda_1 \dots \lambda_p$ -Bestimmungszahl ist der reziproke Wert des Volums, das durch den Zylinder aus der E_p der Massvektoren $e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_p}$ ausgeschnitten wird, gemessen mit dem Parallelotop

dieser Vektoren und mit einem $+$ - oder $-$ -Zeichen versehen, je nachdem die äussere Orientierung denselben oder entgegengesetzten Sinn hat als die von diesen Vektoren in dieser Reihenfolge bestimmte Orientierung. Für $p = 0$ ergibt sich ein Skalar. Für $p = n$ bekommt man die ∞^{n-1} Punkte einer X_{n-1} , die einen einfach zusammenhängenden E_n -Teil begrenzen, alle mit einer äusseren Orientierung, d. h. also einen E_n -Teil mit innerer Orientierung. Der kontravariante und der kovariante n -Vektor entsprechen also demselben geometrischen Gebilde.

3. Gewöhnliche ko- und kontravariante p -Vektordichten.

Eine gewöhnliche kontra- oder kovariante p -Vektordichte vom Gewicht

f (alternierend in allen Indizes) ist definiert durch die Transformationsformel

$$v^{\kappa'_1 \dots \kappa'_p} = \Delta^{-f} A_{\kappa'_1 \dots \kappa'_p}^{\kappa_1 \dots \kappa_p} v^{\kappa_1 \dots \kappa_p} \dots \dots \dots (4)$$

bzw.

$$w_{\lambda'_1 \dots \lambda'_p} = \Delta^{-f} A_{\lambda'_1 \dots \lambda'_p}^{\lambda_1 \dots \lambda_p} w_{\lambda_1 \dots \lambda_p} \dots \dots \dots (5)$$

Infolgedessen existieren in E_p a priori zwei n -Vektordichten, eine kontravariante $\mathbb{G}^{\kappa_1 \dots \kappa_n}$ vom Gewicht $+1$, und eine kovariante $e_{\lambda_1 \dots \lambda_n}$ vom Gewicht -1 , definiert durch die für jedes Koordinatensystem gültigen Gleichungen:

$$\mathbb{G}^{\kappa_1 \dots \kappa_n} = +1 \dots \dots \dots (6)$$

$$e_{\lambda_1 \dots \lambda_n} = +1 \dots \dots \dots (7)$$

Mittels dieser n -Vektordichten lässt sich eine eindeutige Korrespondenz festlegen zwischen kontravarianten p -Vektoren und kovarianten $(n-p)$ -Vektordichten vom Gewicht -1 und ebenso zwischen kovarianten p -Vektoren und kontravarianten $(n-p)$ -Vektordichten vom Gewicht $+1$:

$$\left. \begin{aligned} v_{\lambda_1 \dots \lambda_{n-p}} &= \frac{1}{p!} e_{\lambda_1 \dots \lambda_{n-p} \kappa_1 \dots \kappa_p} v^{\kappa_1 \dots \kappa_p}; \\ v^{\kappa_1 \dots \kappa_p} &= \frac{1}{(n-p)!} v_{\lambda_1 \dots \lambda_{n-p}} \mathbb{G}^{\lambda_1 \dots \lambda_{n-p} \kappa_1 \dots \kappa_p} \end{aligned} \right\} \dots \dots (8)$$






$$\left. \begin{aligned} w^{\kappa_1 \dots \kappa_{n-p}} &= \frac{1}{p!} w_{\lambda_1 \dots \lambda_p} \mathbb{G}^{\lambda_1 \dots \lambda_p \kappa_1 \dots \kappa_{n-p}}; \\ w_{\lambda_1 \dots \lambda_p} &= \frac{1}{(n-p)!} e_{\lambda_1 \dots \lambda_p \kappa_1 \dots \kappa_{n-p}} w^{\kappa_1 \dots \kappa_{n-p}} \end{aligned} \right\} \dots \dots (9)$$

Insbesondere korrespondiert ein Skalar sowohl mit einer kontravarianten als mit einer kovarianten n -Vektordichte:

$$\left. \begin{aligned} p^{\lambda_1 \dots \lambda_n} &= p e_{\lambda_1 \dots \lambda_n} \\ p^{\kappa_1 \dots \kappa_n} &= p \mathbb{G}^{\kappa_1 \dots \kappa_n} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (10)$$

Die geometrische Deutung korrespondierender Grössen ist natürlich die gleiche und es ergibt sich die geometrische Deutung der kontravarianten p -Vektordichten vom Gewicht $+1$ und der kovarianten vom Gewicht -1 also aus der Deutung der korrespondierenden $(n-p)$ -Vektoren.

Die folgende Tabelle gibt den Sachverhalt für $n = 3$:

Figur	Schreibweise 1	Schreibweise 2	Ge- wicht	Bestimmungs- zahlen	Orientierung
keine	p ; Skalar	$\left\{ \begin{array}{l} p \varrho_{\mu\nu\lambda}; \text{ kov. Triv.dichte} \\ p \mathcal{G}^{\lambda\mu\nu}; \text{ kontr. Triv.dichte} \end{array} \right.$	$\left. \begin{array}{l} -1 \\ +1 \end{array} \right\}$	1	\pm -Zeichen
	v^λ ; kontr. Vektor	$v_{\lambda\mu}$; kov. Biv.dichte	-1	3 (Proj.)	innere
	w_λ ; kov. Vektor	$w^{\lambda\mu}$; kontr. Biv.dichte	+1	$3 \left(\frac{1}{\text{Ausschnitt}} \right)$	äussere
	$f^{\lambda\mu}$; kontr. Bivektor	f_λ ; kov. Vektordichte	-1	3 (Proj.)	innere
	$h_{\lambda\mu}$; kov. Bivektor	h^λ ; kontr. Vektordichte	+1	$3 \left(\frac{1}{\text{Ausschnitt}} \right)$	äussere
	$p^{\lambda\mu\nu}$; kontr. Trivektor	p ; Dichte	-1	1 (Volum)	Schraub- sinn
	$q_{\mu\nu\lambda}$; kov. Trivektor	q ; Dichte	+1	$1 \left(\frac{1}{\text{Volum}} \right)$	

4. W -Grössen.

Wir nehmen eine der im vorigen betrachteten Grössen z. B. einen kontravarianten p -Vektor $u^{x_1 \dots x_p}$ und ersetzen jetzt in der darstellenden Figur die innere Orientierung durch eine äussere. Es entsteht eine neue Grösse, die wir einmal mit $\tilde{v}^{x_1 \dots x_p}$ bezeichnen. Die Regeln für die Bildung der Bestimmungszahlen aus der Figur können bis auf die Vorzeichenregel beibehalten werden. Die Bestimmungszahl $\tilde{v}^{x_1 \dots x_p}$ nehmen wir jetzt $+$ oder $-$ je nachdem die mitprojizierte (äussere) Orientierung denselben oder den entgegengesetzten Sinn hat als die von den Vektoren e^x, \dots, e^x in dieser Reihenfolge bestimmte Orientierung, vorausgesetzt dass die Zahlen $x_1 \dots x_n$ eine gerade Permutation der Zahlen $1, \dots, n$ darstellen. Daraus folgt dass $\tilde{v}^{x_1 \dots x_p} = \pm u^{x_1 \dots x_p}$, wo das obere Zeichen gilt, wenn die innere Orientierung von $u^{x_1 \dots x_p}$ gefolgt durch die äussere Orientierung von $\tilde{v}^{x_1 \dots x_p}$ eine n -dimensionale Orientierung festlegt, die denselben Sinn hat als die von e^x, \dots, e^x in dieser Reihenfolge bestimmte Orientierung und das untere Zeichen im anderen Falle. Die Transformationsformel von $\tilde{v}^{x_1 \dots x_p}$ lautet also

$$\tilde{v}^{x'_1 \dots x'_p} = \frac{\Delta}{|\Delta|} A_{x_1 \dots x_p}^{x'_1 \dots x'_p} \tilde{v}^{x_1 \dots x_p} \dots \dots \dots (11)$$

Eine solche Grösse nennen wir einen kontravarianten W - p -Vektor. Derselbe wird, wenn er einfach ist, dargestellt durch einen einfach

zusammenhängenden Teil einer E_p mit einer inneren Orientierung. Für die Aequivalenz solcher Gebilde gilt m. m. das bei den kontravarianten p -Vektoren gesagte. Die $x_1 \dots x_p$ -Bestimmungszahl ist das Volum der Projektion des E_p -Teiles in der $(n-p)$ -Richtung der Massvektoren e^x, \dots, e^x auf die Koordinaten $-E_p$, die von den Massvektoren e^x, \dots, e^x

aufgespannt wird, gemessen durch das Parallelotop dieser letzten Massvektoren und mit einem $+$ - oder $-$ -Zeichen versehen, je nachdem die mitprojizierte äussere Orientierung denselben oder den entgegengesetzten Sinn hat als die von den Vektoren e^x, \dots, e^x ($x_1, \dots, x_n =$ gerade

Permutation von $1, \dots, n$) in dieser Reihenfolge bestimmte Orientierung.

In derselben Weise definieren wir jetzt einen kovarianten W - p -Vektor (alternierend in allen Indizes) durch die Transformationsformel

$$\tilde{w}_{\lambda_1 \dots \lambda_p} = \frac{\Delta}{|\Delta|} A_{\lambda_1 \dots \lambda_p}^{\lambda'_1 \dots \lambda'_p} \tilde{w}_{\lambda'_1 \dots \lambda'_p} \dots \dots \dots (12)$$

Ist diese Grösse einfach, so kann sie dargestellt werden durch einen Zylinder, dessen Inneres einfach zusammenhängend ist, und dessen Begrenzung besteht aus ∞^{p-1} (2 für $p = 1$) vollständig parallelen E_{n-p} , denen eine innere Orientierung beigelegt ist. Für die Aequivalenz solcher Gebilde gilt m. m. das bei den kovarianten p -Vektoren gesagte. Die $\lambda_1 \dots \lambda_p$ -Bestimmungszahl ist der reziproke Wert des Volums, das durch den Zylinder aus der E_p der Massvektoren e^x, \dots, e^x ausgeschnitten

wird, gemessen mit dem Parallelotop dieser Vektoren und mit einem $+$ - oder $-$ -Zeichen versehen, je nachdem die innere Orientierung denselben oder entgegengesetzten Sinn hat als die von den Vektoren e^x, \dots, e^x ($\lambda_1, \dots, \lambda_n =$ gerade Permutation von $1, \dots, n$) in dieser Reihenfolge bestimmte Orientierung.

Für $p = n$ bekommt man die ∞^{n-1} Punkte einer X_{n-1} ; die einen einfach zusammenhängenden E_n -Teil begrenzen, alle mit einer inneren Orientierung (\pm -Zeichen), d. h. also einen E_n -Teil mit äusserer Orientierung (\pm -Zeichen). Der kontravariante und der kovariante W - n -Vektor, entsprechen also demselben geometrischen Gebilde.

Ein W -Skalar ist definiert durch die Transformationsformel

$$p^{(x')} = \frac{\Delta}{|\Delta|} p^{(x)} \dots \dots \dots (13)$$

Derselbe kann als kontra- oder kovarianter W -Vektor der Valenz Null aufgefasst werden. Es folgt, dass das Produkt eines W -Skalars mit einem gewöhnlichen Skalar ein W -Skalar und mit einem W -Skalar ein gewöhnlicher Skalar ist und dass alle W -Grössen als Produkte von gewöhnlichen

Größen mit einem W -Skalar aufgefasst werden können. Ein Beispiel eines W -Skalars im gewöhnlichen Raum bildet der in physikalischen Arbeiten manchmal vorkommende „Pseudoskalar“, eine Grösse mit einer einzigen Bestimmungszahl, die i. b. auf alle Rechtssysteme den Wert $+1$ und i. b. auf alle Linkssysteme den Wert -1 hat¹⁾. Ein W -Skalar hat eine Orientierung, nämlich die Orientierung der Bezugssysteme i. b. auf welche die Bestimmungszahl einen positiven Wert hat.






Durch Ueberschiebung mit $e_{\lambda_1 \dots \lambda_n}$ bzw. $\mathbb{G}^{\lambda_1 \dots \lambda_n}$ können aus den W - p -Vektoren W -($n-p$)-Vektordichten gebildet werden, denen dieselbe geometrische Deutung zukommt und die sich statt mit Δ mit $|\Delta|$ transformieren. Diese Dichten wurden von H. WEYL eingeführt und sind als WEYLSche Dichten bekannt. Eine kontravariante bzw. kovariante W - p -Vektordichte vom Gewicht $+1$ bzw. -1 transformiert sich also folgendermassen:

$$v^{\lambda_1 \dots \lambda_p} = \Delta^{-1} A^{\lambda_1 \dots \lambda_p}_{\lambda'_1 \dots \lambda'_p} v^{\lambda'_1 \dots \lambda'_p} \dots \dots \dots (14)$$

bzw.

$$w_{\lambda_1 \dots \lambda_p} = \Delta A^{\lambda_1 \dots \lambda_p}_{\lambda'_1 \dots \lambda'_p} w_{\lambda'_1 \dots \lambda'_p} \dots \dots \dots (15)$$

Die folgende Tabelle gibt den Sachverhalt für $n=3$:

Figur	Schreibweise 1	Schreibweise 2	Gewicht	Bestimmungszahlen	Orientierung
keine	\tilde{p} ; W -Skalar	$\tilde{p}^{\mu\lambda\kappa}$; kov. W -Triv.dichte $\tilde{p}^{\mathbb{G}^{\lambda\mu}}$; kontr. W -Triv.dichte	-1 $+1$	1	Schraub-sinn
	\tilde{v}^λ ; kontr. W -Vektor	$\tilde{v}_{\lambda\kappa}$; kov. W -Biv.dichte	-1	3 (Proj.)	äussere
	\tilde{w}_λ ; kov. W -Vektor	$\tilde{w}^{\lambda\kappa}$; kontr. W -Biv.dichte	$+1$	$3 \left(\frac{1}{\text{Ausschnitt}} \right)$	innere
	$\tilde{f}^{\lambda\kappa}$; kontr. W -Bivektor	\tilde{f}_λ ; kov. W -Vekt.dichte	-1	3 (Proj.)	äussere
	$\tilde{h}_{\lambda\kappa}$; kov. W -Bivektor	\tilde{h}^λ ; kontr. W -Vekt.dichte	$+1$	$3 \left(\frac{1}{\text{Ausschnitt}} \right)$	innere
	$\tilde{p}^{\lambda\mu}$; kontr. W -Trivektor	\tilde{p} ; W -Dichte	-1	1 (Volum)	} \pm -Zeichen
	$\tilde{q}_{\mu\lambda\kappa}$; kov. W -Trivektor	\tilde{q} ; W -Dichte	$+1$	$1 \left(\frac{1}{\text{Volum}} \right)$	

ST. GOLAB²⁾ hat kürzlich durch Lösung einer Funktionalgleichung bewiesen, dass alle geometrischen Objekte mit einer einzigen Bestimmungs-

1) Auch bei V. HLAVATÝ, *Diferenciální geometrie křivek a ploch tensorový počet*, Prag 1937, z. B. auf S. 252, tritt ein W -Skalar auf.

2) Ueber die Klassifikation der geometrischen Objekte. *Math. Zeitschr.* 1938.

zahl, deren Transformation nur von Δ abhängt, abgeleitet werden können aus den vier Objekten: Skalare, W -Skalare, Dichten und W -Dichten. Es folgt daraus, dass die hier gegebene Klassifizierung eine erschöpfende ist.

5. Identifizierungen.

Führt man eine Volumeinheit, eine Metrik oder eine innere Orientierung der E_n ein, so können verschiedene der im vorigen aufgetretenen Grössen identifiziert werden. Da Verallgemeinerung für beliebiges n keine Schwierigkeiten bereitet, begnügen wir uns mit folgender Uebersichtstabelle für $n=3$. Es ist stets die einfachste Darstellung gewählt.

Nach Einführung von:	Skalare	W -Skalare	Dichten	W -Dichten
I. Einheitsvolum	Skalar	(p.V.)	(p.B.)	(a.B.) (a.V.)
II. Schraub-sinn	Skalar	Skalar	Skalar	Skalar
III. Einheitsvolum und Schraub-sinn	Skalar	Skalar	Skalar	Skalar
IV. Metrik ¹⁾	Skalar	Skalar	Skalar	Skalar
V. Schraub-sinn und Metrik	Skalar	Skalar	Skalar	Skalar

Die im Falle I auftretenden Grössen sind oft mit folgenden Namen bezeichnet (von links nach rechts): polarer Vektor, polarer Bivektor, axialer Bivektor, axialer Vektor. Diese Unterscheidungen haben aber nur Sinn wenn tatsächlich nur ein Einheitsvolum eingeführt ist und weder ein Schraub-sinn noch eine Metrik. Wird nur eine Metrik, ohne Schraub-sinn, eingeführt, so wäre eine Unterscheidung zwischen polaren und axialen Vektoren schlechthin mehr am Platze (Fall IV).

6. Beispiele.

Viele der bei physikalischen Problemen vorkommenden Grössen sind von Natur W -Grössen. Sie lassen sich erst nach Einführung eines Einheitsvolums oder eines Schraub-sinns oder auch einer Metrik in gewöhnliche Grössen überführen. Dadurch wird aber öfters ein fremdes Element

1) Es ist wichtig zu bemerken, dass sich aus einem Fundamentaltensor $a_{\lambda\kappa}$ nicht in eindeutiger Weise eine gewöhnliche Dichte vom Gewicht $+1$ ableiten lässt, wohl aber eine Weylsche Dichte $|(Det(a_{\lambda\kappa}))^{1/2}|$. In der Tat bestimmt ja $a_{\lambda\kappa}$ keinen Schraub-sinn.

eingeführt, das mit der Problemstellung nichts zu tun hat und diese verdunkelt, sodass es wichtig erscheint die W -Größen wirklich als solche behandeln zu können. Es folgen hier einige einfache Beispiele.

a. Ein Flächenelement mit einer positiven und einer negativen Seite ist eine kovariante W -Vektordichte $d\tilde{D}_\lambda$ vom Gewicht -1 (äq. kontravarianter W -Bivektor $d\tilde{O}^{\lambda\lambda}$).

b. Die Strömungsdichte einer Flüssigkeit ist eine kontravariante W -Vektordichte \tilde{v}^λ vom Gewicht $+1$ (äq. kovarianter W -Bivektor $\tilde{v}_{\lambda\lambda}$). Denkt man die Stromröhren in der Weise eingezeichnet, dass durch jede Röhre pro Zeiteinheit die Masse ε fließt, so ist der Teil einer Röhre in der Umgebung einer ihrer Punkte P mitsamt ihrer Orientierung bei hinreichend kleinem ε bis auf kleine Größen höherer Ordnung die geometrische Darstellung der W -Vektordichte $\varepsilon\tilde{v}^\lambda$ in P . Der Ausdruck $\tilde{v}^\lambda d\tilde{D}_\lambda$ ist ein Skalar und stellt die Masse dar, die durch $d\tilde{D}_\lambda$ pro Zeiteinheit in der positiven Richtung fließt.

Ist \tilde{q} die Massendichte, eine W -Dichte vom Gewicht $+1$ (äq. kovarianter W -Trivektor $\tilde{q}_{\mu\lambda\lambda}$), so lautet die Kontinuitätsgleichung

$$\partial_x \tilde{v}^\lambda + \partial_t \tilde{q} = 0 \quad (\text{äq. } \partial_{[\mu} \tilde{v}_{\lambda\lambda]} + \partial_t \tilde{q}_{\mu\lambda\lambda} = 0).$$

c. Ein Volum mit \pm -Orientierung ist eine W -Dichte $d\mathfrak{B}$ vom Gewicht -1 (äq. kontravarianter W -Trivektor $dV^{\lambda\lambda\mu}$). Wird $d\tilde{D}_\lambda$ über dx^λ verschoben, so ist $d\tilde{\mathfrak{B}} = dx^\lambda d\tilde{D}_\lambda$ das überstrichene Volum, positiv wenn die Richtung von dx^λ mit der äusseren Orientierung von $d\tilde{D}_\lambda$ übereinstimmt.

d. Für alle Systeme der Mechanik, die von einer LAGRANGE-funktion ausgehen, ist der Impuls, als Gradient dieser Funktion, dem Wesen nach ein kovarianter Vektor. Auch die Kraft K_λ ist also als erste Ableitung des Impulses nach der Zeit ein kovarianter Vektor (äq. kontravariante Bivektordichte $\mathfrak{K}^{\lambda\lambda}$). Lässt sich die Kraft K_λ aus einem Potential ableiten, $K_\lambda = \partial_\lambda p$, und denkt man die äquiskalaren Flächen in der Weise eingezeichnet, dass die Differenz der Feldwerte von p zwischen benachbarten Flächen ε beträgt, so bilden die Teile von zwei benachbarten Flächen $p = p_0$ und $p = p_0 + \varepsilon$ in der Umgebung eines Punktes P auf der Fläche $p = p_0$ bei hinreichend kleinem ε bis auf kleine Größen höherer Ordnung die geometrische Darstellung des Vektors $1/\varepsilon K_\lambda$ in P . Ist $\mathfrak{P}_\lambda^\lambda$ die W -Affinordichte der Spannung vom Gewicht $+1$, so ist $\mathfrak{P}_\lambda^\lambda d\tilde{D}_\lambda$ die auf das Flächenelement $d\tilde{D}_\lambda$ wirkende Kraft und $\mathfrak{K}_\lambda = \partial_x \mathfrak{P}_\lambda^\lambda$ die Kraft pro Volumeinheit, eine kovariante W -Vektordichte vom Gewicht $+1$ (äq. kontravarianter W -Bivektor $K^{\lambda\lambda}$). Der STOKE'sche Satz

$$\int_{\tau_2} \mathfrak{P}_\lambda^\lambda d\tilde{D}_\lambda = \int_{\tau_3} \partial_x \mathfrak{P}_\lambda^\lambda d\mathfrak{B} = \int_{\tau_3} \mathfrak{K}_\lambda d\mathfrak{B} \quad \dots \quad (16)$$

stellt die Gleichgewichtsbedingung für das Volum τ_3 mit der Begrenzung τ_2 dar.

Physics. — *Research on thin layers of tin and other metals. V. The corrosion of tin by dilute organic acids.* By J. A. NINCK BLOK-KITS VAN HEYNINGEN and D. A. WAS. (Communicated by Prof. L. S. ORNSTEIN.)

(Communicated at the meeting of June 25, 1938).

SUMMARY.

The corrosion of tin by different organic acids has been studied by the optical method. It appeared that an intermediate reaction product is formed on the metal surface, which dissolves into the liquid under formation of complex ions. The order of reaction and the reaction constants have been calculated from the experimental data.

Introduction.

In preceding publications ¹⁾ by P. J. HARINGHUIZEN and D. A. WAS the results obtained on the corrosion of different metals by mineral and vegetable oils were discussed. From technical as well as from theoretical points of view it seemed desirable to extend this research to aqueous solutions of acids of known concentrations. The influence of the concentration of the active medium could not be determined in the preceding investigations, because the nature of the corroding agent was not definitely known. For a good understanding of what happens at the metal surface, it is necessary to work with solutions of known concentrations.

Preliminary experiments showed us that only weak acids gave reproducible results; of these we studied citric acid, lactic acid, benzoic acid and propionic acid. Tin was chosen for the metal because its reproducibility seemed to be good and at the same time, these investigations may be of interest to the canning industry.

All experiments were done with thin metal layers, made on glass by high vacuum evaporation. The corrosion was measured at room temperature by the optical method. For details we refer to publication II of this series.

Experimental results.

The concentrations varied for citric acid from 10^{-1} M to $5 \cdot 10^{-5}$ M; for lactic acid from 10^{-1} M to $5 \cdot 10^{-4}$ M. Propionic and benzoic acids, which showed very little corroding action, were used only in a concentration of 10^{-1} M.

¹⁾ P. J. HARINGHUIZEN and D. A. WAS. Proc. Kon. Ned. Akad. v. Wetensch., Amsterdam, I: 38, 1002 (1935); II: 39, 201 (1936); III: 40, 39 (1937); IV: 41, 62 (1938).