Mathematics. — *Beiträge zur Theorie der* WHITTAKER*schen Funktionen.* (Zweite Mitteilung)[19]. Von C. S. MEIJER. (Communicated by Prof. J. G. VAN DER CORPUT.)

(Communicated at the meeting of June 25, 1938.)

Spezialfälle der Sätze 1—7. Für die Funktionen K_ν, I_ν und D_ν gilt wegen (50) und (5), bezw. (49) und (6), oder (8) und (5)

$$K_\nu(z^2) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{e^{-z^2}}{z}\,T_{0,\nu}(z\sqrt{2}), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (56)$$

bezw.

$$I_\nu(z^2) = \frac{\Gamma(\nu+\frac{1}{2})\,e^{z^2}}{\sqrt{2\pi}\;z}\,L_{0,\nu}(z\sqrt{2}), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (57)$$

oder

$$D_{2\nu}(z) = 2^{\nu+\frac{1}{4}}\,z^{-\frac{1}{2}}\,e^{-\frac{1}{4}z^2}\,T_{\nu+\frac{1}{4},\pm\frac{1}{4}}\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (58)$$

Mit Hilfe dieser Relationen kann man aus den Sätzen 1—7 Integraldarstellungen für $K_\nu(z^2)$, $I_\nu(z^2)$ und $D_{2\nu}(z)$ ableiten. Ich werde einige verhältnismässig einfache Spezialfälle mitteilen:

Ist $|\arg z| < \frac{3}{4}\pi$ und $0 < \Re(\nu) < \frac{1}{6}$, bezw. $-\frac{1}{2} < \Re(\nu) < \frac{1}{2}$, so ergibt sich aus (22) (mit $z\sqrt{2}$ statt z, $\frac{u}{\sqrt{2}}$ statt u, $k=0$, $m=\nu$ und $\alpha=\frac{1}{4}$, bezw. $\alpha=-\frac{1}{4}$ angewendet) mit Rücksicht auf (56) und (58)

$$K_\nu(z^2) = \frac{2^{1-\nu}\,z^{\nu+1}\,e^{-z^2}\,\Gamma(-\nu)\sqrt{\pi}}{\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}\int_0^{\infty e^{-i\arg z}} u^\nu\,e^{\frac{1}{4}u^2}\,D_{2\nu}(u)\,J_{\nu-1}(2zu)\,du,$$

bezw.

$$K_\nu(z^2) = \frac{2^{1-\nu}\,z^{\nu}\,e^{-z^2}\,\Gamma(1-\nu)\sqrt{\pi}}{\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}\int_0^{\infty e^{-i\arg z}} u^\nu\,e^{\frac{1}{4}u^2}\,D_{2\nu-1}(u)\,J_{\nu}(2zu)\,du.$$

[19]) Erste Mitteilung: Proc. Kon. Ned. Akad. v. Wetensch., Amsterdam, **41**, 624—633 (1938).

Ist $\Re(\nu) > 0$, bezw. $\Re(\nu) > -\frac{1}{2}$, so ergibt sich aus (42) (mit $z\sqrt{2}$ statt z, $\frac{u}{\sqrt{2}}$ statt u, $k=0$, $m=\nu$, $\tau=0$ und $\alpha=\frac{1}{4}$, bezw. $\alpha=-\frac{1}{4}$ angewendet) mit Rücksicht auf (57) und (58)

$$I_\nu(z^2) = \frac{2^{\nu+3/2}\,z^{\nu+1}\,e^{z^2}}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty u^\nu\,e^{-\frac{1}{4}u^2}\,D_{-2\nu-1}(u)\,J_{\nu-1}(2zu)\,du,$$

bezw.

$$I_\nu(z^2) = \frac{2^{\nu+\frac{1}{2}}\,z^{\nu}\,e^{z^2}}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty u^\nu\,e^{-\frac{1}{4}u^2}\,D_{-2\nu}(u)\,J_{\nu}(2zu)\,du.$$

In diesen beiden Formeln ist z beliebig ($z \neq 0$).

Ist $z \neq 0$ und $\Re(\nu) > 0$, bezw. $\Re(\nu) > -\frac{1}{2}$, so ergibt sich aus (42) (mit $\frac{z}{\sqrt{2}}$ statt z, $\frac{u}{\sqrt{2}}$ statt u, $\tau=0$, $\alpha=-\nu$, $k=\nu+\frac{1}{4}$ und $m=-\frac{1}{4}$, bezw. $k=\nu-\frac{1}{4}$ und $m=\frac{1}{4}$ angewendet) mit Rücksicht auf (58), (6) und (3)

$$\int_0^\infty u^\nu\,e^{-\frac{1}{4}u^2}\,D_{2\nu}(u)\,J_{\nu-1}(zu)\,du = 2^\nu\,z^{\nu-1}\,e^{-\frac{1}{2}z^2}\,\Gamma(\nu+\tfrac{1}{2})\,\pi^{-\frac{1}{2}}\,{}_1F_1(-\nu;\tfrac{1}{2};\tfrac{1}{2}z^2),$$

bezw.

$$\int_0^\infty u^\nu\,e^{-\frac{1}{4}u^2}\,D_{2\nu-1}(u)\,J_{\nu}(zu)\,du = 2^\nu\,z^{\nu}\,e^{-\frac{1}{2}z^2}\,\Gamma(\nu+\tfrac{1}{2})\,\pi^{-\frac{1}{2}}\,{}_1F_1(1-\nu;\tfrac{3}{2};\tfrac{1}{2}z^2).$$

Die rechten Seiten dieser Relationen gehen für ganze positive Werte von ν über in

$$(-1)^\nu\,z^{\nu-1}\,e^{-\frac{1}{4}z^2}\,D_{2\nu}(z), \text{ bezw. } (-1)^{\nu-1}\,z^{\nu-1}\,e^{-\frac{1}{4}z^2}\,D_{2\nu-1}(z)$$

(man vergl. (8), (4) und (3)). Für $\nu = 1, 2, 3, \ldots$ gelten also die folgenden Beziehungen

$$\int_0^\infty u^\nu\,e^{-\frac{1}{4}u^2}\,D_{2\nu}(u)\,J_{\nu-1}(zu)\,du = (-1)^\nu\,z^{\nu-1}\,e^{-\frac{1}{4}z^2}\,D_{2\nu}(z),$$

bezw.

$$\int_0^\infty u^\nu\,e^{-\frac{1}{4}u^2}\,D_{2\nu-1}(u)\,J_{\nu}(zu)\,du = (-1)^{\nu-1}\,z^{\nu-1}\,e^{-\frac{1}{4}z^2}\,D_{2\nu-1}(z).$$

Diese zwei Relationen sind neuerdings auf andre Weise von Herrn MITRA [20]) bewiesen worden.

Spezialfälle der Sätze 8—11; Integraldarstellungen für Produkte von BESSEL*schen Funktionen.* Die Beziehungen (45), (46), (47) und (48) werden besonders einfach, wenn man $k=0$ setzt. Aus (54) und (45) folgt nämlich

$$H_\nu^{(1)}(z^2)\,H_\nu^{(2)}(z^2)=\frac{32\cos\nu\pi}{\pi}\int_0^\infty J_\nu(u^2)\,J_{-\nu}(u^2)\,K_{4\nu}(4zu)\,u\,du$$

(wo $|\arg z|\leqq\frac{1}{2}\pi$ und $|\Re(\nu)|<\frac{1}{2}$ ist); ebenso aus (53) und (46)

$$\left.\begin{aligned}J_\nu^2(z^2)&=i\int_0^\infty[\{H_\nu^{(1)}(u^2)\}^2-\{H_\nu^{(2)}(u^2)\}^2]\,J_{4\nu}(4zu)\,u\,du\\&=-4\int_0^\infty J_\nu(u^2)\,Y_\nu(u^2)\,J_{4\nu}(4zu)\,u\,du\end{aligned}\right\}\quad .\ .\ .\ (59)$$

(wo $z>0$ und $\Re(\nu)>-\frac{1}{4}$ ist); aus (50), (49) und (47)

$$K_\nu(z^2)\,I_\nu(z^2)=4\int_0^{\infty e^{-i\arg z}}K_\nu(u^2)\,I_\nu(u^2)\,J_{4\nu}(4zu)\,u\,du\quad .\ .\ .\ (60)$$

(wo $|\arg z|\leqq\frac{1}{4}\pi$ und $\Re(\nu)>-\frac{1}{4}$ ist); schliesslich aus (55) und (48)

$$J_\nu(z^2)\,Y_\nu(z^2)=-4\int_0^\infty J_\nu^2(u^2)\,J_{4\nu}(4zu)\,u\,du\quad .\ .\ .\ .\ (61)$$

(wo $z>0$ und $\Re(\nu)>-\frac{1}{4}$ ist).

Der Spezialfall mit $\nu=0$ von (60) ist schon von Herrn MITRA [21]) gegeben worden. Formel (61) kann auch mit Hilfe der HANKELschen Transformation aus (59) abgeleitet werden.

Anwendung auf selbstreziproke Funktionen. Nach HARDY und TITCHMARSH [22]) nennt man eine Funktion $f(x)$ *selbstreziprook für die* HANKEL*sche Transformation der Ordnung* ν (abgekürzt: $f(x)$ ist R_ν, $f(x)$ ist

20) MITRA, [29], Formeln (8) und (9).
Bemerkung bei der Korrektur: Siehe auch W. N. BAILEY, Self-reciprocal functions involving confluent hypergeometric functions, Journ. London Math. Soc., **13**, 111—112 (1938).

21) MITRA, [28]. Siehe auch das Referat im Zentralblatt für Mathematik, **12**, 72 (1936). (Die Arbeit [28] war mir nicht zugänglich).

[illegible]DY and TITCHMARSH, [**15**]; TITCHMARSH, [**34**], chapter IX.

eine R_ν-Funktion), falls $f(x)$ eine Lösung der homogenen Integralgleichung

$$f(x)=\int_0^\infty f(t)\,J_\nu(xt)\,(xt)^{\frac{1}{2}}\,dt\quad .\ .\ .\ .\ .\ .\ (62)$$

ist [23]).

Die selbstreziproken Funktionen haben in letzterer Zeit die Aufmerksamkeit verschiedener Mathematiker auf sich gezogen und viele Arbeiten [24]) sind dem Studium dieser Funktionen gewidmet worden. Einige der einfachsten R_ν-Funktionen sind [25])

$$x^{-\frac{1}{2}}\ \text{und}\ x^{\nu+\frac{1}{2}}\,e^{-\frac{1}{2}x^2}\quad .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (63)$$

Eine kompliziertere, von Herrn W. N. BAILEY gefundene Lösung der Integralgleichung (62) ist [26])

$$f(x)=x^{-2m+\nu-\frac{1}{2}}\,e^{\frac{1}{4}x^2}\,W_{3m-\nu-\frac{1}{2},m}(\tfrac{1}{2}x^2)\quad .\ .\ .\ .\ (64)$$

Ich werde beweisen, dass unter gewissen Voraussetzungen auch

$$x^{2m-\nu-\frac{1}{2}}\,e^{-\frac{1}{4}x^2}\,M_{3m-\nu+\frac{1}{2},m}(\tfrac{1}{2}x^2)=2^{-m-\frac{1}{2}}\,x^{4m-\nu+\frac{1}{2}}\,e^{-\frac{1}{2}x^2}\,{}_1F_1(\nu-2m;2m+1;\tfrac{1}{2}x^2)\ (65)$$

eine R_ν-Funktion ist [27]). Dieser Beweis ist sehr kurz. Aus (38), mit

23) Ist

$$\psi(x)=\int_0^\infty\varphi(t)\,J_\nu(xt)\,(xt)^{\frac{1}{2}}\,dt,$$

so nennt man $\psi(x)$ die HANKELsche Transformierte von $\varphi(x)$; ist $\psi(x)=\varphi(x)$, so heisst $\varphi(x)$ selbstreziprook.

Für die HANKELsche Transformation vergl. man: WATSON, [**37**], 456; BOCHNER, [**6**], 180; TITCHMARSH, [**32**]; [**34**], 240; PLANCHEREL, [**31**]; OFFORD, [**30**].

24) Ein Verzeichnis der wichtigsten Arbeiten über R_ν-Funktionen ist von B. M. MEHROTRA, [**18**], [**19**] gegeben worden.

25) BAILEY, [**2**], 93; [**3**], 260 und 263; HARDY and TITCHMARSH, [**15**], 209; MEHROTRA, [**18**], 95; [**19**], 216.

26) BAILEY, [**3**], 263. In (64) ist $x>0$, $\Re(\nu+1)>0$ und m beliebig mit $\Re(\nu-2m+1)>0$, $\Re(\nu-4m+\frac{3}{2})>0$. Die Spezialfälle mit $m=\pm\frac{1}{4}$ von (64) (siehe auch Formel (8)) sind neuerdings von Herrn VARMA ([**35**], 12), anscheinend ohne Kenntnis der BAILEYschen Arbeit, untersucht worden.

Bemerkung bei der Korrektur: Siehe auch die in Fussnote 20) zitierte Arbeit von BAILEY.

27) Für $2m-\nu=0,1,2,\ldots$ ist dies schon von Herrn HOWELL ([**17**], 810) bewiesen worden.

Bemerkung bei der Korrektur: Siehe auch W. T. HOWELL, On a class of functions which are self-reciprocal in the HANKEL transform, Philosophical Magazine, (7) **25**, 622—628 (1938). HOWELL betrachtet das LAGUERREsche Polynom

$$L_n^{(\alpha)}(x)=\frac{(1+\alpha)(2+\alpha)\ldots.(n+\alpha)}{n!}\,{}_1F_1(-n;1+\alpha;x).$$

$k=3m-\nu+\frac{1}{2}$, $\alpha=\nu-2m-\frac{1}{2}$, $z=2^{-\frac{1}{2}}x$, $u=2^{-\frac{1}{2}}t$ und $\tau=0$ angewendet, folgt nämlich

$$x^{2m-\nu-\frac{1}{2}} L_{3m-\nu+\frac{1}{2},m}(2^{-\frac{1}{2}}x)=\int_0^\infty t^{2m-\nu-\frac{1}{2}} L_{3m-\nu+\frac{1}{2},m}(2^{-\frac{1}{2}}t)\, J_\nu(xt)(xt)^{\frac{1}{2}}\, dt\,. \quad . \quad (66)$$

Hierin ist

$$x>0,\quad \Re(2m+1)>0 \text{ und } \Re(4m-\nu+\tfrac{3}{2})>0 \text{ [28]}\ .\ .\ (67)$$

Die Funktion $x^{2m-\nu-\frac{1}{2}} L_{3m-\nu+\frac{1}{2},m}(2^{-\frac{1}{2}}x)$ ist also unter den Bedingungen (67) eine R_ν-Funktion, womit wegen (6) der verlangte Beweis geliefert ist [29].

Für $2m=\nu$, bezw. $2m=\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}$, geht die rechte Seite von (65) über in $2^{-\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}}x^{\nu+\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}x^2}$, bezw.

$$2^{-\frac{1}{4}\nu-\frac{1}{4}}x^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}x^2}{}_1F_1(\tfrac{1}{2}\nu+\tfrac{1}{2};\tfrac{1}{2}\nu+\tfrac{1}{2};\tfrac{1}{2}x^2)=2^{-\frac{1}{4}\nu-\frac{1}{4}}x^{-\frac{1}{2}},$$

so dass die R_ν-Funktionen (63) Spezialfälle von (65) sind. Der Spezialfall mit $m=\frac{1}{3}\nu-\frac{1}{6}$ von (65) ergibt wegen (49) die selbstreziproke Funktion

$$x^{-1/_3\nu+1/_6}e^{-\frac{1}{4}x^2}I_{1/_3\nu-1/_6}(\tfrac{1}{4}x^2).$$

Aus (60), mit $\frac{1}{4}\nu$ statt ν, $z=\frac{1}{2}x$ und $u=\frac{1}{2}t$ angewendet, folgt noch, dass auch

$$x^{\frac{1}{2}}K_{\frac{1}{4}\nu}(\tfrac{1}{4}x^2)\,I_{\frac{1}{4}\nu}(\tfrac{1}{4}x^2)$$

eine R_ν-Funktion ist.

§ 4. Hilfsformeln.

Ist $k\pm m\neq-\frac{1}{2},-\frac{3}{2},-\frac{5}{2},\ldots.$, so hat man, wie ich früher bewiesen habe [30],

$$W_{k,m}(z)=\frac{\Gamma(\frac{1}{2}+k+m)\Gamma(\frac{1}{2}+k-m)}{2\pi i}\{e^{k\pi i}W_{-k,m}(ze^{\pi i})-e^{-k\pi i}W_{-k,m}(ze^{-\pi i})\}\ (68)$$

Eine verwandte Formel, gültig für alle Werte von k und m mit $2m\neq-1,-2,-3,\ldots.$ und $m-k\neq\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{5}{2},\ldots.$ ist

$$\frac{1}{\Gamma(2m+1)}M_{k,m}(z)=\frac{\Gamma(\frac{1}{2}+k-m)}{2\pi}\{e^{m\pi i}W_{-k,m}(ze^{\pi i})+e^{-m\pi i}W_{-k,m}(ze^{-\pi i})\}\ (69)$$

---

28) Ist $2m-\nu=0,1,2,\ldots$, so gilt (66) für $\Re(2m+1)>0$ und jedes $x\neq0$ (siehe die Bemerkung zu Satz 5).

29) In ganz ähnlicher Weise findet man die R_ν-Funktion (64), wenn man $k=3m-\nu-\frac{1}{2}$, $\alpha=2m-\nu-\frac{1}{2}$, $z=2^{-\frac{1}{2}}x$ und $u=2^{-\frac{1}{2}}t$ setzt in (22).

30) Für (68) und (69) vergl. man MEIJER, **[23]**, Formel (23); **[26]**, Formel (7).

Für die Funktion $T_{k,m}(z)$ gilt daher mit Rücksicht auf (68) und (5), falls $k\pm m\neq-\frac{1}{2},-\frac{3}{2},-\frac{5}{2},\ldots.$ ist,

$$T_{k,m}(z)=\frac{e^{z^2}\Gamma(\frac{1}{2}+k+m)\Gamma(\frac{1}{2}+k-m)}{2\pi i}\{e^{k\pi i}T_{-k,m}(ze^{\frac{1}{2}\pi i})-e^{-k\pi i}T_{-k,m}(ze^{-\frac{1}{2}\pi i})\}\ (70)$$

In ähnlicher Weise erhält man mit Hilfe von (69), (6) und (5), falls $m-k\neq\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{5}{2},\ldots.$ ist [31],

$$L_{k,m}(z)=\frac{\Gamma(\frac{1}{2}+k-m)}{2\pi}\{e^{m\pi i}T_{-k,m}(ze^{\frac{1}{2}\pi i})+e^{-m\pi i}T_{-k,m}(ze^{-\frac{1}{2}\pi i})\}.\ \ .\ \ (71)$$

Für grosse Werte von $|z|$ mit $|\arg z|<\frac{3}{2}\pi$ gilt bekanntlich [32]

$$W_{k,m}(z)=e^{-\frac{1}{2}z}z^k\{1+O(z^{-1})\}.$$

Wegen (5) hat man also

$$T_{k,m}(z)=z^{2k}\{1+O(z^{-2})\}\quad(|\arg z|<\tfrac{3}{4}\pi;|z|\to\infty)\ \ .\ \ .\ \ (72)$$

Die analoge Relation für die durch (7) definierte Funktion $L_{k,m}(z)$ lautet [33], falls $k-m\neq\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{5}{2},\ldots.$ ist,

$$L_{k,m}(z)=\frac{z^{-2k}}{\Gamma(\frac{1}{2}-k+m)}\{1+O(z^{-2})\}\quad(|\arg z|<\tfrac{1}{4}\pi;|z|\to\infty).\ \ (73)$$

Ist $k-m=\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{5}{2},\ldots.$, so gilt aber, wie man leicht einsieht [34],

$$L_{k,m}(z)=e^{-z^2}z^\lambda\{a+O(z^{-2})\}\quad(|z|\to\infty),\ .\ .\ .\ .\ (74)$$

wo λ und a nicht von z abhängig sind.

Für kleine Werte von $|z|$ hat man wegen (7)

$$L_{k,m}(z)=O(|z|^{1+2\Re(m)})\quad(z\to0).\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ (75)$$

und wegen (5), (4) und (3) [35]

$$T_{k,m}(z)=O(|z|^{1-2|\Re(m)|})\quad(z\to0)\ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ (76)$$

---

31) Formel (71) gilt aus Stetigkeitsgründen auch für $2m=-1,-2,-3,\ldots$ (siehe auch (7)).

32) WHITTAKER and WATSON, **[38]**, § 16.4.

33) Man vergl. BARNES, **[4]**, 257—258.

34) Für $k-m=\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{5}{2},\ldots$ wird der Ausdruck zwischen geschweiften Klammern auf der rechten Seite von (7) ein Polynom in z^2.

35) Siehe auch GOLDSTEIN, **[13]**, 111—112, insbesondere Gleichung (41).
Formel (76) gilt für $m\neq0$.

$$T_{k,0}(z)=O(|z|\log|z|)\qquad(z\to0).$$

Beim Beweis meiner Sätze brauche ich ferner noch die Beziehungen [36])

$$K_\nu(z) = O(|z|^{-|\Re(\nu)|}) \quad (z \to 0)\ ^{37)}, \qquad (77)$$

$$J_\nu(z) = O(|z|^{\Re(\nu)}) \quad (z \to 0), \qquad (78)$$

$$K_\nu(z) = \left(\frac{\pi}{2z}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-z} \{1 + O(z^{-1})\} \quad (|\arg z| < \tfrac{3}{2}\pi;\ |z| \to \infty), \qquad (79)$$

$$\left.\begin{aligned} J_\nu(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}} \Big[& \cos(z - \tfrac{1}{2}\nu\pi - \tfrac{1}{4}\pi) \{1 + O(z^{-2})\} \\ & - \sin(z - \tfrac{1}{2}\nu\pi - \tfrac{1}{4}\pi) \left\{\frac{4\nu^2 - 1}{8z} + O(z^{-3})\right\}\Big] \quad (|\arg z| < \pi;\ |z| \to \infty) \end{aligned}\right\} \qquad (80)$$

§ 5. Beweis der Sätze 1—7.

Beweis von Satz 1 mit der ersten zugehörigen Bemerkung. Ist $\omega \neq 0$, $|\arg \omega| < \frac{1}{2}\pi$, $\xi \neq \frac{1}{2}\omega$, $|\arg(\xi - \frac{1}{2}\omega)| < \frac{1}{2}\pi$ und $\Re(\frac{3}{2} + \mu + \lambda) > 0$, so hat man nach Herrn ERDÉLYI [38])

$$\int_0^\infty e^{-\xi t} M_{\varkappa,\mu}(\omega t)\, t^\lambda\, dt = \Gamma(\tfrac{3}{2} + \mu + \lambda)\, \omega^{\mu + \frac{1}{2}} (\xi + \tfrac{1}{2}\omega)^{-3/2 - \mu - \lambda}$$

$$\times {}_2F_1\left(\tfrac{3}{2} + \mu + \lambda, \tfrac{1}{2} - \varkappa + \mu; 2\mu + 1; \frac{\omega}{\xi + \frac{1}{2}\omega}\right).$$

Ersetzt man hierin ω durch $e^{i\varphi}$, ξ durch $e^{i\varphi}\eta$ und t durch $e^{-i\varphi} v$ $(-\frac{1}{2}\pi < \varphi < \frac{1}{2}\pi,\ \eta \neq \frac{1}{2},\ |\varphi + \arg(\eta - \frac{1}{2})| < \frac{1}{2}\pi)$, so findet man

$$\int_0^{\infty e^{i\varphi}} e^{-\eta v} M_{\varkappa,\mu}(v)\, v^\lambda\, dv = \Gamma(\tfrac{3}{2} + \mu + \lambda)(\eta + \tfrac{1}{2})^{-3/2 - \mu - \lambda}$$

$$\times {}_2F_1\left(\tfrac{3}{2} + \mu + \lambda, \tfrac{1}{2} - \varkappa + \mu; 2\mu + 1; \frac{1}{\eta + \frac{1}{2}}\right).$$

[36]) WATSON, [**37**], 77, Formel (2), 78, Formel (6), 80, Formeln (14) und (15), 202, Formel (1) und 199, Formel (1).

[37]) Formel (77) gilt für $\nu \neq 0$; $K_0(z) = O(\log|z|)$ $(z \to 0)$.

[38]) ERDÉLYI, [**9**], 696.

Setzt man nun noch $\varphi = 2\tau$, $\eta = \zeta + \frac{1}{2}$ und $v = u^2$, so erhält man mit Rücksicht auf (6) [39])

$$\left.\begin{aligned} \int_0^{\infty e^{i\tau}} e^{-\zeta u^2} L_{\varkappa,\mu}(u)\, u^{2\lambda+1}\, du = \frac{\zeta^{-3/2-\mu-\lambda}\, \Gamma(\frac{3}{2} + \mu + \lambda)}{2\,\Gamma(2\mu + 1)} \\ \times {}_2F_1\left(\tfrac{3}{2} + \mu + \lambda, \tfrac{1}{2} + \varkappa + \mu; 2\mu + 1; -\frac{1}{\zeta}\right). \end{aligned}\right\} \qquad (81)$$

In dieser Beziehung ist $\Re(\frac{3}{2} + \mu + \lambda) > 0$, $\zeta \neq 0$ und

$$\mathit{Max}(-\tfrac{1}{4}\pi, -\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}\arg\zeta) < \tau < \mathit{Min}(\tfrac{1}{4}\pi, \tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}\arg\zeta). \qquad (82)$$

Beim Beweis von (18) benutze ich ferner noch die bekannte Integralformel [40])

$$K_\nu(2w) = \tfrac{1}{2} w^\nu \int_0^{\infty e^{i\chi}} e^{-v - \frac{w^2}{v}}\, v^{-\nu-1}\, dv. \qquad (83)$$

Hierin ist $|\arg w| < \frac{1}{2}\pi$ und χ ein Punkt des Intervalles

$$\mathit{Max}(-\tfrac{1}{2}\pi, -\tfrac{1}{2}\pi + 2\arg w) < \chi < \mathit{Min}(\tfrac{1}{2}\pi, \tfrac{1}{2}\pi + 2\arg w). \qquad (84)$$

Ich nehme nun an, dass k, m, α und τ den Bedingungen (14), (19) und (16) genügen. Die rechte Seite von (18) ist dann wegen (75), (77), (73), (74) und (79) eine analytische Funktion von z für $-\frac{1}{2}\pi - \tau < \arg z < \frac{1}{2}\pi - \tau$ und, falls überdies noch (20) erfüllt ist [41]), eine stetige Funktion von z für $-\frac{1}{2}\pi - \tau \leqq \arg z \leqq \frac{1}{2}\pi - \tau$, so dass ich nur den Fall mit $-\frac{1}{2}\pi - \tau < \arg z < \frac{1}{2}\pi - \tau$, also mit $-\frac{1}{2}\pi - \arg z < \tau < \frac{1}{2}\pi - \arg z$ (man vergl. (17)), zu betrachten brauche. Es gilt daher $|\arg zu| < \frac{1}{2}\pi$, falls $\arg u = \tau$ ist, so dass aus (83) und (84) folgt

$$K_{m+k-2\alpha-\frac{1}{2}}(2zu) = \tfrac{1}{2}(zu)^{m+k-2\alpha-\frac{1}{2}} \int_0^{\infty e^{i\psi}} e^{-v - \frac{z^2u^2}{v}}\, v^{2\alpha - m - k - \frac{1}{2}}\, dv,$$

[39]) Man beachte auch, dass

$${}_2F_1\left(a, b; c; \frac{1}{y}\right) = \left(\frac{y-1}{y}\right)^{-a} {}_2F_1\left(a, c-b; c; \frac{1}{1-y}\right)$$

ist (siehe BARNES, [**5**], 150, Formel (1)).

[40]) WATSON, [**37**], 183, Formel (15). WATSON betrachtet nur den Fall, dass $|\arg w| < \frac{1}{4}\pi$ ist, und nimmt dann $\chi = 0$.

[41]) Bedingung (15) folgt durch Addition aus (19) und (20).

worin

$$Max(-\tfrac{1}{2}\pi, -\tfrac{1}{2}\pi+2\tau+2\arg z)<\psi<Min(\tfrac{1}{2}\pi, \tfrac{1}{2}\pi+2\tau+2\arg z). \quad (85)$$

Die rechte Seite von (18) ist somit gleich [42])

$$\left.\begin{aligned}&\frac{2z^{2m+1}}{\Gamma(\frac{1}{2}-k+m)}\int_0^{\infty e^{i\tau}} L_{-m-\alpha,\alpha-k}(u)\,u^{2m-2\alpha-1}\,du\int_0^{\infty e^{i\psi}} e^{-v-\frac{z^2u^2}{v}}\,v^{2\alpha-m-k-\frac{1}{2}}\,dv\\ &=\frac{2z^{2m+1}}{\Gamma(\frac{1}{2}-k+m)}\int_0^{\infty e^{i\psi}} e^{-v}\,v^{2\alpha-m-k-\frac{1}{2}}\,dv\int_0^{\infty e^{i\tau}} e^{-\frac{z^2u^2}{v}}\,L_{-m-\alpha,\alpha-k}(u)\,u^{2m-2\alpha-1}\,du\\ &=\frac{z^{2k}}{\Gamma(1+2\alpha-2k)}\int_0^{\infty e^{i\psi}} e^{-v}\,v^{2\alpha-2k}\,{}_2F_1\left(\tfrac{1}{2}-k+m,\tfrac{1}{2}-k-m;1+2\alpha-2k;-\frac{v}{z^2}\right)dv\end{aligned}\right\}. \quad (86)$$

wegen (81) (mit $\zeta=\frac{z^2}{v}$, $\varkappa=-m-\alpha$, $\mu=\alpha-k$ und $\lambda=m-\alpha-1$ angewendet) [43]). Das letzte Integral ist aber gleich [44]) $T_{k,m}(z)$, so dass Satz 1 und die erste zugehörige Bemerkung bewiesen sind.

Beweis der zweiten Bemerkung zu Satz 1. Für grosse Werte von $|u|$ hat man wegen $k-m-2\alpha=\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \ldots$ und (74)

$$L_{-m-\alpha,\alpha-k}(u)=e^{-u^2}u^{\mu}\,\{b+O(u^{-2})\}.$$

Aus (75), (77) und (79) [45]) folgt also, dass das Integral in (18) für

[42]) Das wiederholte Integral auf der linken Seite von (86) ist absolut konvergent. Die Vertauschung der Integrationsfolge ist also erlaubt; man vergl. HOBSON, **[16]**, 347.

[43]) Wegen (16), (85) und $\arg v=\psi$ gilt

$$Max\left\{-\tfrac{1}{4}\pi, -\tfrac{1}{4}\pi-\tfrac{1}{2}\arg\left(\frac{z^2}{v}\right)\right\}<\tau<Min\left\{\tfrac{1}{4}\pi, \tfrac{1}{4}\pi-\tfrac{1}{2}\arg\left(\frac{z^2}{v}\right)\right\}.$$

Ich darf also $\zeta=\frac{z^2}{v}$ setzen in (81) (siehe (82)).

[44]) Siehe MEIJER, **[20]**, 36, Fussnote [3]).

[45]) Formel (79) gilt für $|\arg z|<\frac{3}{2}\pi$. Das Verhalten von $K_\nu(z)$ für grosse Werte von $|z|$ mit $|\arg z|\geqq\frac{3}{2}\pi$ folgt aus (man vergl. WATSON, **[37]**, 75, Formel (5))

$$K_\nu(z\,e^{m\pi i})=\frac{\sin(1-m)\nu\pi}{\sin\nu\pi}K_\nu(z)+\frac{\sin m\nu\pi}{\sin\nu\pi}K_\nu(z\,e^{\pi i}) \quad (m \text{ ganz})$$

und (79).

jedes $z\neq 0$ konvergiert, falls τ der Bedingung (16) genügt [46]). Ist $\arg z=0$, so ist die Behauptung der zweiten Bemerkung nur ein Spezialfall der ersten Bemerkung. Der Beweis für $|\arg z|>0$ geht mit Hilfe von analytischen Fortsetzung.

Beweis von Satz 2. Ist $\Re(\frac{1}{2}-k+m)>0$, $|\arg\zeta|<\frac{3}{4}\pi$ und

$$Max(-\pi, -\tfrac{1}{2}\pi-2\arg\zeta)<\psi<Min(\pi, \tfrac{1}{2}\pi-2\arg\zeta), \quad . \quad (87)$$

so gilt bekanntlich [47])

$$T_{k,m}(\zeta)=\frac{\zeta^{2m+1}}{\Gamma(\frac{1}{2}-k+m)}\int_0^{\infty e^{i\psi}} e^{-\zeta^2 v}(1+v)^{m+k-\frac{1}{2}}\,v^{m-k-\frac{1}{2}}\,dv. \quad . \quad (88)$$

Weiter hat man [48]), falls $\Re(\nu+1)>0$ und $|2\arg z+\arg w|<\frac{1}{2}\pi$ ist,

$$\int_0^{\infty e^{-i\arg z}} e^{-\frac{u^2}{w}}J_\nu(2zu)\,u^{\nu+1}\,du=\tfrac{1}{2}z^\nu\,w^{\nu+1}\,e^{-z^2w}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (89)$$

Ich nehme nun vorläufig an, dass k, m und α den Bedingungen

$$\Re(\tfrac{1}{2}-k+m)>0,\ \Re(\tfrac{1}{2}+k\pm m-2\alpha)>0,\ \Re(k-3m-2\alpha)>0 \quad (90)$$

genügen. Dann gilt wegen (88) (mit $m+\alpha$ statt k, $k-\alpha$ statt m, $\zeta=u$ ($\arg u=-\arg z$), $v=\frac{1}{w}$ und $\psi=-\varphi$ angewendet) und (87), falls $|\arg z|<\frac{3}{4}\pi$ ist,

$$T_{m+\alpha,k-\alpha}(u)=\frac{u^{2k-2\alpha+1}}{\Gamma(\frac{1}{2}+k-m-2\alpha)}\int_0^{\infty e^{i\varphi}} e^{-\frac{u^2}{w}}\left(1+\frac{1}{w}\right)^{m+k-\frac{1}{2}} w^{m-k+2\alpha-3/2}\,dw,$$

worin

$$Max(-\pi, -\tfrac{1}{2}\pi-2\arg z)<\varphi<Min(\pi, \tfrac{1}{2}\pi-2\arg z). \quad . \quad (91)$$

[46]) Ich nehme an, dass die Voraussetzungen (14) und (19) erfüllt sind.

[47]) MEIJER, **[20]**, 36, Formel (4) mit $z=\zeta^2$, $t=\zeta^2 v$ und $\mu=\psi+2\arg z$.

[48]) WATSON, **[37]**, 394, Formel (4) mit $a=2z\,e^{-i\arg z}$, $t=u\,e^{i\arg z}$ und $p^2=\frac{e^{-2i\arg z}}{w}$.

Die rechte Seite von (22) ist daher gleich [49])

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{2\,z^{m-k+2\alpha+3/2}}{\Gamma(\frac12-k+m)}\int_0^{\infty e^{-i\arg z}} J_{m+k-2\alpha-\frac12}(2\,z\,u)\,u^{m+k-2\alpha+\frac12}\,du\int_0^{\infty e^{i\varphi}} e^{-\frac{u^2}{w}}\left(1+\frac{1}{w}\right)^{m+k-\frac12} w^{m-k+2\alpha-3/2}\,dw\\
&=\frac{2\,z^{m-k+2\alpha+3/2}}{\Gamma(\frac12-k+m)}\int_0^{\infty e^{i\varphi}}\left(1+\frac{1}{w}\right)^{m+k-\frac12} w^{m-k+2\alpha-3/2}\,dw\int_0^{\infty e^{-i\arg z}} e^{-\frac{u^2}{w}} J_{m+k-2\alpha-\frac12}(2\,z\,u)\,u^{m+k-2\alpha+\frac12}\,du\\
&=\frac{z^{2m+1}}{\Gamma(\frac12-k+m)}\int_0^{\infty e^{i\varphi}} e^{-z^2 w}\,(1+w)^{m+k-\frac12}\,w^{m-k-\frac12}\,dw \quad \text{(wegen (89))}\\
&= T_{k,m}(z) \quad \text{(wegen (88); siehe auch (87) und (91)).}
\end{aligned}\right\}\quad (92)$$

Sind die Voraussetzungen (90) erfüllt, so ist also der Beweis von (22) geliefert. Aus (76), (78), (72) und (80) geht aber hervor, dass die rechte Seite von (22) existiert für alle Werte von k, m und α mit (21), (23), (24) und (25); man benutze nun das Prinzip der analytischen Fortsetzung.

Mit Hilfe von (70) und (71) kann man nun die Sätze 4 und 5 auf sehr einfache Weise aus Satz 1, die Sätze 3 und 6 hingegen aus Satz 2 ableiten.

Beweis von Satz 3. Ist $|\arg z| < \frac14\pi$, so ergibt sich aus (75), (78), (73), (74) und (80), dass die rechte Seite von (27) (mit $\tau = -\arg z$) existiert, falls k, m und α den Bedingungen (29), (30) und (31) genügen. Ich darf also annehmen (analytische Fortsetzung), dass (29), (30) und (31) erfüllt sind und dass überdies $\Re(\frac12+k\pm m)>0$ ist. Dann gilt wegen (22), mit $-k$ statt k, $z\,e^{\frac12\pi i}$ statt z und $u=v\,e^{-\frac12\pi i}$ angewendet,

$$\left.\begin{aligned}
e^{k\pi i}\,T_{-k,m}(z\,e^{\frac12\pi i}) &= \frac{2\,i\,e^{(k+\alpha)\pi i}\,z^{m+k+2\alpha+3/2}\,\Gamma(\frac12-k-m-2\alpha)}{\Gamma(\frac12+k+m)}\\
&\times\int_0^{\infty e^{-i\arg z}} T_{m+\alpha,-k-\alpha}(v\,e^{-\frac12\pi i})\,J_{m-k-2\alpha-\frac12}(2\,z\,v)\,v^{m+k-\frac12}\,dv.
\end{aligned}\right\}\quad (93)$$

Auf analoge Weise findet man

$$\left.\begin{aligned}
e^{-k\pi i}\,T_{-k,m}(z\,e^{-\frac12\pi i}) &= -\frac{2\,i\,e^{-(k+\alpha)\pi i}\,z^{m+k+2\alpha+3/2}\,\Gamma(\frac12-k-m-2\alpha)}{\Gamma(\frac12+k+m)}\\
&\times\int_0^{\infty e^{-i\arg z}} T_{m+\alpha,-k-\alpha}(v\,e^{\frac12\pi i})\,J_{m-k-2\alpha-\frac12}(2\,z\,v)\,v^{m+k-\frac12}\,dv.
\end{aligned}\right\}\quad (94)$$

[49]) Das wiederholte Integral auf der linken Seite von (92) ist absolut konvergent wegen $\Re(k-3m-2\alpha)>0$, so dass die Vertauschung der Integrationsfolge gestattet ist.

Aus (70), (93) und (94) folgt nun

$$\begin{aligned}
T_{k,m}(z) &= \frac{z^{m+k+2\alpha+3/2}\,e^{z^2}\,\Gamma(\frac12-k-m-2\alpha)\,\Gamma(\frac12+k-m)}{\pi}\\
&\times\int_0^{\infty e^{-i\arg z}}\{e^{(k+\alpha)\pi i}\,T_{m+\alpha,-k-\alpha}(v\,e^{-\frac12\pi i})+e^{-(k+\alpha)\pi i}\,T_{m+\alpha,-k-\alpha}(v\,e^{\frac12\pi i})\}\\
&\times J_{m-k-2\alpha-\frac12}(2\,z\,v)\,v^{m+k-\frac12}\,dv = 2\,z^{m+k+2\alpha+3/2}\,e^{z^2}\,\Gamma(\tfrac12-k-m-2\alpha)\\
&\times\int_0^{\infty e^{-i\arg z}} L_{-m-\alpha,-k-\alpha}(v)\,J_{m-k-2\alpha-\frac12}(2\,z\,v)\,v^{m+k-\frac12}\,dv.
\end{aligned}$$

wegen (71) (mit $-m-\alpha$ statt k, $-k-\alpha$ statt m und v statt z angewendet). Hiermit ist Satz 3 bewiesen.

Beweis der Bemerkung zu Satz 3. Wegen $k-m=\frac12, \frac32, \frac52, \ldots$ und (74) hat man für grosse Werte von $|u|$

$$L_{-m-\alpha,-k-\alpha}(u)=e^{-u^2}\,u^{\gamma}\,\{c+O(u^{-2})\}.$$

Hieraus und aus (75), (78) und (80) [50]) geht hervor, dass die rechte Seite von (27) für jedes $z\neq 0$ und alle Werte von k, m, α und τ mit $\Re(\frac12-k+m-2\alpha)>0$, $\frac12-k-m-2\alpha\neq 0, -1, -2, \ldots$ und $-\frac14\pi<\tau<\frac14\pi$ existiert und für diese Werte von τ nicht von τ abhängig ist, so dass ich $\tau=-\arg z$ setzen darf, falls $|\arg z|<\frac14\pi$ ist. Der Beweis der Bemerkung zu Satz 3 ist also geliefert für den Fall, dass $|\arg z|<\frac14\pi$ und $\Re(1-k-3m-2\alpha)>0$ ist (wegen Satz 3). Man verwende ferner die Theorie der analytischen Fortsetzung.

[50]) Das Verhalten von $J_\nu(z)$ für grosse Werte von $|z|$ mit $|\arg z|\geqq\pi$ folgt aus

$$J_\nu(z\,e^{m\pi i})=e^{m\nu\pi i}\,J_\nu(z) \qquad (m \text{ ganz})$$

und (80).

Bemerkung bei der Korrektur: Die Beziehungen (22), (27) und (42) der ersten Mitteilung kommen mit andern Bezeichnungen vor in einer neulich erschienenen Arbeit von ERDÉLYI (The HANKEL transform of a product of WHITTAKER's functions, Journ. London Math. Soc., **13**, 146—154 (1938), Formeln (2.06), (2.08) und (2.07)). Beziehung (22) ist vor kurzem auch mit Hilfe von operatorischen Methoden bewiesen worden (siehe ERDÉLYI, The HANKEL transform of WHITTAKER's function $W_{k,m}(z)$, Proc. Cambridge Phil. Soc., **34**, 28—29 (1938)).