Mathematics. — *Ueberkonvexe Mengen in der Ebene.* Von J. G. VAN DER CORPUT.

(Communicated at the meeting of October 29, 1938.)

In der Euklidischen Ebene werde eine aus mindestens zwei verschiedenen Punkten bestehende Menge M betrachtet und ausserdem eine Anzahl von Punktmengen, die ich, die Terminologie von Herrn A. E. MAYER [1]) übernehmend, Einheitsmengen auf M, oder, wo kein Missverständnis zu fürchten ist, kurz Einheitsmengen nenne. Dabei wird vorausgesetzt, dass zu je zwei verschiedenen Punkten a und b von M, die einerselben Einheitsmenge angehören, zwei (eventuell identische) Einheitsmengen E und E' mit den folgenden vier Eigenschaften zugeordnet werden können:

I. *a und b sind Begrenzungspunkte von E und E'; jede der zwei Mengen enthält einen inneren Punkt; E und E' sind konvex* [2]), *sogar wenn noch die Punkte a und b hinzugefügt werden.*

II. *Sind E und E' verschiedene Punktmengen, die mindestens einen inneren Punkt gemeinsam haben, so ist wenigstens eine dieser zwei Mengen beschränkt; dann sind a und b die einzigen gemeinsamen Begrenzungspunkte von E und E'; E enthält dann wenigstens einen Punkt ausserhalb E', der weder mit a noch mit b zusammenfällt und E' enthält dann wenigstens einen Punkt ausserhalb E, der weder mit a noch mit b zusammenfällt.*

Die Vereinigungsmenge von a, b und den Durchschnit EE' nenne ich die mit dem Punktepaar (a, b) korrespondierende Linse. Zwei verschiedene

1) A. E. MAYER, Eine Ueberkonvexität. Mathematische Zeitschrift **39**, 511—531 (1935).
Man vergleiche auch: J. BUTER, Ueberkonvexe Menge in der Ebene. Proc. Kon. Ned. Akad. v. Wetensch., Amsterdam, **41**, 756—762 (1938).

J. BUTER, Hyperconvexe puntverzamelingen. Dissertation Groningen (1938). Für den Leser der Dissertation oder der Proceedings-Arbeit von Herrn BUTER gebe ich die folgenden Bemerkungen:

In Satz 9 (Dissertation S. 17) wird gemeint, dass die dort genannten Einheitskurven zusammenfallen, wenn die Strecke, die α und β verbindet, dieselbe Länge besitzt wie der parallele Durchmesser der Eichkurve.

In Satz 23 (S. 23) und Definition 22 (S. 24) ersetze man „Grenze" durch „Rand".

In Hilfssatz 12 (S. 27) steht, dass die zwei Punkte α und β zum Streifen S gehören, aber der Verfasser meint, dass sie im Trapezium $\gamma\delta\varepsilon\zeta$ liegen.

Die in Satz 28 (Dissertation S. 4 und 30; These Proceedings S. 759) gegebene notwendige und hinreichende Bedingung gilt nicht für jede Menge; sie wird nur bewiesen für Mengen, die entweder abgeschlossen oder offen sind.

Im auf. S. 42 genannten Fall $b\,1$ braucht γ kein extremer Punkt von H zu sein.

2) Eine Menge im euklidischen Raum heiszt konvex, wenn sie mit je zwei Punkten auch die diese zwei Punkte verbindende Strecke enthält. Sind die Punkte der offenen Strecke stets innere Punkte der Menge, so heiszt die Menge eigentlich-konvex.

Punkte von M besitzen nur dann eine Linse, wenn sie einerselben Einheitsmenge angehören.

III. *Sind a' und b' zwei verschiedene zu M gehörige Punkte, die in der Vereinigungsmenge von E, a und b liegen, und existiert die mit (a', b') korrespondierende Linse, so liegt diese Linse in dieser Vereinigungsmenge von E, a und b. Diese Eigenschaft bleibt gelten, wenn E durch E' ersetzt wird.*

IV. *Wird der von a und b verschiedene Punkt c von M so gewählt, dass a, b und c in einerselben Einheitsmenge liegen, dass a nicht zu der mit (b, c) korrespondierenden Linse und b nicht zu der mit (a, c) korrespondierenden Linse gehört, so liegt c in der Vereinigungsmenge von E und E'.*

Nach diesen vier Axiomen folgt die Definition der Ueberkonvexität.

Eine Menge A nenne ich mit Rücksicht auf die Einheitsmengen überkonvex auf M, wenn der Durchschnitt MA von M und A in mindestens einer Einheitsmenge liegt und jedes zu MA gehörige Punktepaar (a, b) mit $a \neq b$ die Eigenschaft besitzt, dass die korrespondierende Linse vollständig zu A gehört. Wo kein Missverständnis zu fürchten ist, lasse ich die Worte „mit Rücksicht auf die Einheitsmengen" weg. Evident ist:

Ist A auf M überkonvex und ist B irgend eine Menge, die keinen Punkt von M enthält, so ist auch die Vereinigungsmenge von A und B auf M überkonvex.

Als ersten Spezialfall wähle ich für M die ganze Euklidische Ebene; jedem Punktepaar (a, b) mit $a \neq b$ ordne ich als Einheitsmengen E und E' die zwei Halbebenen zu, die durch die a und b enthaltende Gerade G begrenzt werden und die Punkte der abgeschlossenen Strecke (a, b), aber nicht die übrigen Punkte der Geraden G enthalten; nenne ich dann auch noch die ganze Euklidische Ebene eine Einheitsmenge, so gelten, wie man sich leicht überzeugt, die vier genannten Axiome und der Begriff „überkonvex auf M" geht dann einfach über in „konvex"; eine Menge ist in diesem Fall dann und nur dann auf M überkonvex, wenn sie konvex ist.

Ein anderes Beispiel bekommen wir, wenn wir eine beliebig gegebene, beschränkte eigentlich-konvexe Punktmenge N betrachten. Ist M eine aus mindestens zwei verschiedenen Punkten bestehende Menge, so kann man, wie ich jetzt beweisen werde, als Einheitsmenge wählen jede Menge, die durch Translation aus N entstehen kann und von der mindestens zwei innere Punkte oder Begrenzungspunkte zu M gehören. Um zu zeigen, dass dann die vier Axiome gelten, bemerke ich zunächst, dass zwei verschiedene Einheitsmengen höchstens zwei gemeinsame Begrenzungspunkte besitzen. Denn hätten sie drei verschiedene Begrenzungspunkte a, b und c gemeinsam, so würden die zwei Translationen, die die zwei Einheitsmengen in N überführen, 6 Begrenzungspunkte a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 von N liefern mit der Eigenschaft, dass die eigentlich-konvexe Menge N drei verschiedene parallele Sehnen a_1a_2, b_1b_2 und c_1c_2 mit derselben Länge haben würde, und das ist unmöglich.

Zwei verschiedene Einheitsmengen, die nur einen oder keinen gemeinsamen Begrenzungspunkt haben, besitzen keinen gemeinsamen inneren Punkt. Denn hätten sie einen gemeinsamen inneren Punkt q, so würde jede von q aus gezogene Halbgerade genau einen Begrenzungspunkt jeder der zwei betrachteten Einheitsmengen enthalten. Bezeichnen wir die Entfernung von q zu diesen zwei Begrenzungspunkten successive mit $\alpha(\varphi)$ und $\beta(\varphi)$, wo φ $(0 \leqq \varphi \leqq 2\pi)$ den Winkel bezeichnet, den die Halbgerade mit einer gegebenen festen Halbgerade bildet, so ist $\alpha(0) = \alpha(2\pi)$, $\beta(0) = \beta(2\pi)$, während im Intervall $0 \leqq \varphi < 2\pi$ höchstens ein φ mit $\alpha(\varphi) = \beta(\varphi)$ zu finden ist. Da $\alpha(\varphi)$ und $\beta(\varphi)$ stetige Funktionen von φ sind, ist im ganzen Intervall $0 \leqq \varphi < 2\pi$ mit höchstens einer Ausnahme entweder stets $\alpha(\varphi) > \beta(\varphi)$ oder stets $\alpha(\varphi) < \beta(\varphi)$. Das Innere der einen Einheitsmenge enthält somit das Innere der andren Einheitsmenge, und das ist nicht möglich, da die Translation, die die erste Einheitsmenge in die zweite überführt, das Innere der ersten Einheitsmenge in das Innere der andren Einheitsmenge überführt.

Betrachten wir nun zwei verschiedene Einheitsmengen E_1 und E_2; es mögen dabei zwei im Innern oder auf der Begrenzung von E_2 liegende Begrenzungspunkte a und b von E_1 gegeben sein. E_1 und E_2 haben dann genau zwei gemeinsame Begrenzungspunkte a_1 und b_1. Das ist nach dem Obigen evident, falls a und b Begrenzungspunkte von E_2 sind. Sonst kann ich annehmen, dass a ein innerer Punkt von E_2 ist; jeder innere Punkt von E_1, der nahe genug bei a liegt, ist dann auch ein innerer Punkt von E_2, sodass E_1 und E_2 auch dann nach dem Obigen genau zwei gemeinsame Begrenzungspunkte haben.

Die zwei gemeinsamen Begrenzungspunkte a_1 und b_1 verteilen die Begrenzung von E_1 in zwei Bogen B und B'. Keiner der offenen Bogen B und B' enthält einen Begrenzungspunkt von E_2; sie liegen somit ganz innerhalb oder ganz ausserhalb E_2. Dass beide innerhalb oder beide ausserhalb E_2 liegen, ist ausgeschlossen. Den offenen Bogen, der ganz innerhalb E_2 liegt, nenne ich B und den anderen also B'. Die Punkte a und b gehören somit zum abgeschlossenen Bogen B. Ich behaupte, dass B echt ist, d.h. dass B keine Sehne besitzt, die dieselbe Richtung und eine grössere Länge als (a_1, b_1) hat. Um das zu beweisen, kann ich sagen, dass die Sehne (a_1, b_1) horizontal läuft und dass B oberhalb dieser Sehne liegt. Wäre B nicht echt, so enthälte er eine oberhalb (a_1, b_1) liegende parallele Sehne (a_2, b_2) mit derselben Länge; die Translation, die E_1 in E_2 überführt, führt (a_2, b_2) in (a_1, b_1) und (a_1, b_1) in eine unterhalb (a_1, b_1) liegende Sehne (a_3, b_3) von E_2 über, so dass dann die eigentlich-konvexe Menge E_2 drei gleiche parallele Sehnen (a_2, b_2), (a_1, b_1) und (a_3, b_3) haben würde, was unmöglich ist. Folglich ist B echt. Wäre dann auch B' echt, so wäre (a_1, b_1) die langste horizontale Sehne von E_1 und dann wären E_1 und E_2 identisch. Hieraus folgt, dass B' nicht echt ist.

Hiermit ist zunächst bewiesen, dass der Durchschnitt von E_1 und E_2 durch zwei echte Bogen begrenzt wird. Der Begrenzungsbogen von E_1 mit den Endpunkten a und b, der teilweise ausserhalb E_2 liegt, enthält den offenen Bogen B' und ist somit nicht echt; der abgeschlossene echte Begrenzungsbogen von E_1 mit den Endpunkten a und b gehört somit vollständig zu E_2.

Ausserdem bemerken wir noch das folgende: sind a_4, b_4, c_4 drei verschiedene Begrenzungspunkte der Einheitsmenge E_1 und ist der den Punkt c_4 nicht enthaltende Begrenzungsbogen B'' von E_1 mit den Endpunkten a_4 und b_4 echt, so ist E_1 die einzige Einheitsmenge, von der a_4, b_4 und c_4 Begrenzungspunkte oder innere Punkte sind. Denn sonst gäbe es eine Translation $\neq 0$, die a_4, b_4 und c_4 in Begrenzungspunkte oder innere Punkte von E_1 überführt. Ist (a_4, b_4) die längste Sehne von E_1 mit dieser Richtung, so führt jede Translation $\neq 0$ diese Sehne über in eine Sehne, von der mindestens einer der Endpunkte ein äusserer Punkt von E ist. Sonst besitzt B'' in a_4 und b_4 zwei Tangenten, die einander in einem Punkt s schneiden; eine Translation $\neq 0$, die a_4 und b_4 in Begrenzungspunkte oder innere Punkte von E_1 überführt, führt s über in einen Punkt t innerhalb des Winkels $< \pi$, den die zwei Tangenten mit einander bilden und in dem das Innere von E_1 liegt, aber jede Translation, die s in einen innerhalb dieses Winkels liegenden Punkt überführt, führt c_4 in einen äusseren Punkt von E_1 über.

Ich betrachte nun zwei beliebige verschiedene Punkte a und b von M, die zu einer Einheitsmenge gehören, so dass die Sehne (a, b) höchstens eben so lang ist wie die längste Sehne von N mit derselben Richtung. Haben diese zwei Sehnen dieselbe Länge, so wähle ich für E und E' die einzige Einheitsmenge mit den Begrenzungspunkten a und b und sonst wähle ich für E und E' die zwei verschiedenen Einheitsmengen mit den Begrenzungspunkten a und b. Dass dann die Axiome I und II gelten, ist evident. Sind a und b innere Punkte oder Begrenzungspunkte einer Einheitsmenge E_1, so enthält E_1 den Durchschnitt EE'; denn sind a und b Begrenzungspunkte von E_1, so ist $E_1 = E$ oder $= E'$ und sonst enthält E_1 nach dem Obigen die beiden echten Bogen, die a und b verbinden, also auch den durch diese zwei echte Bogen begrenzten Durchschnitt EE'. Hiermit ist bewiesen, dass das Axiom III gilt. Um das vierte Axiom zu untersuchen, betrachte ich einen von a und b verschiedenen Punkt c von M, mit der Eigenschaft dass a, b und c in einer Einheitsmenge E_2 liegen, dass a nicht in der mit (b, c) korrespondierenden Linse und b nicht in der mit (a, c) korrespondierenden Linse liegt. Liegen a, b und c auf einer Gerade, so ist es ausgeschlossen, dass a zwischen b und c liegt (sonst gehöre a zu der mit (b, c) korrespondierenden Linse) und es ist auch unmöglich, dass b zwischen a und c liegt, so dass c dann zwischen a und b, also in beiden Mengen E und E' liegt.

Betrachten wir nun den Fall, dass a, b und c nicht auf einer Gerade liegen. Ich darf annehmen, dass der Begrenzungsbogen von E mit den Endpunkten a und b, der in der durch (a, b) begrenzten und c nicht enthaltenden Halbebene liegt, echt ist; denn sonst brauche ich nur E und E' zu vertauschen. Ich werde zeigen, dass c dann zu E gehört. Ist c ein Begrenzungspunkt von E, so ist E nach dem Obigen die einzige Einheitsmenge, die a, b und c als Begrenzungspunkte oder innere Punkte hat, so dass dann E mit E_2 identisch ist, somit c enthält. Ich darf also annehmen, dass c ein äusserer Punkt von E ist. Für den weiteren Beweis kann ich den Beweis von Satz 52 aus der Dissertation von Herrn J. BUTER fest ungeändert übernehmen. Wenigstens eine der offenen Strecken ac und bc enthält einen Begrenzungspunkt von E. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann ich annehmen, dass die offene Strecke ac einen Begrenzungspunkt d von E enthält, da ich sonst nur a und b zu vertauschen brauche. Es sei nun E_3 die Einheitsmenge mit den Begrenzungspunkten a und c und mit der Eigenschaft, dass ihr Begrenzungsbogen, der die Endpunkte a und c hat und in der durch (a, c) begrenzten und b enthaltenden Halbebene liegt, echt ist. Da a ein Begrenzungspunkt und d ein innerer Punkt von E ist, liegt der echte Bogen, der a und d verbindet, vollständig in E_3. Nach unserer Voraussetzung gehört b nicht zu der mit (a, c) korrespondierenden Linse, also auch nicht zu E_3. Der durch b gehende Begrenzungsbogen von E mit den Endpunkten a und d ist also nicht echt, so dass der komplementäre Begrenzungsbogen von E echt ist, also mit seinen Endpunkten a und d (d ist ein innerer Punkt von E_2) in E_2 liegt. Der Begrenzungsbogen von E mit den Endpunkten a und b, der in der durch (a, b) begrenzten und c nicht enthaltenden Halbebene liegt, ist, wie schon gesagt, auch echt und liegt somit gleichfalls in E_2. Der innerhalb des Dreieckes $a\,b\,c$ liegende Begrenzungsbogen von E liegt mit den Eckpunkten a, b und c in der konvexen Menge E_2. Der etwa noch übrig bleibende Begrenzungsbogen von E kann genau so behandelt werden wie der Bogen mit den Endpunkten a und d; man braucht dann nur a und b so vertauschen. Folglich gehört dieser etwa übrig bleibende Begrenzungsbogen, somit die ganze Begrenzung von E zu E_2. Dann sind E und E_2 identisch, so dass c in E liegt.

Hiermit ist bewiesen, dass unter den genannten Voraussetzungen die Axiome I, II, III und IV gelten. Wählt man für M die ganze Ebene, und setzt man ausserdem noch voraus, dass N abgeschlossen ist, einen Euklidischen Mittelpunkt aber keine Ecke besitzt, so bekommt man den durch Herrn A. E. MAYER eingeführten Begriff der Ueberkonvexität, aber der in dieser Arbeit definierte Begriff ist viel allgemeiner.

Ist eine aus mindestens zwei Punkten bestehende Menge M' und ein System von Mengen E' gegeben, die mit Rücksicht auf M' Einheitsmengen sind und verwandelt eine eineindeutige umkehrbar stetige Transformation die Menge M' in eine Menge M und die Mengen E' in eigentlich-konvexe Mengen E, so sind die Mengen E Einheitsmengen mit Rücksicht auf M.

Ich gebe hier ein Beispiel. Ist M die Menge der Punkte, die nicht mit einem gegebenen Punkt q zusammenfallen und deren Entfernung zu q kleiner als $\frac{1}{2\varrho}$ ist, wo ϱ eine gegebene positive Zahl bezeichnet, so bildet jede Kreisperipherie K, die mindestens einen Punkt mit M gemeinsam hat und durch Inversion mit Zentrum q und Potenz 1 in eine Kreisperipherie K' mit Radius ϱ übergeführt wird, mit ihrem Innern eine Einheitsmenge auf M. Denn durch diese Inversion geht M über in die Menge M' der Punkte, deren Entfernung zu q grösser als 2ϱ ist. Die Kreisfläche K', die mindestens einen Punkt von M' enthält und einen Radius ϱ besitzt, enthält also q nicht, so dass die Inversion das Innere von K in das Innere von K' überführt und der Kreis mit dem Rande K durch diese eineindeutige stetige Transformation in eine Einheitsmenge auf M' übergeht.

Ich werde zunächst einige einfache Eigenschaften der überkonvexen Mengen ableiten.

Ist eine Menge A auf M überkonvex, so haben zwei beliebige verschiedene Punkte a und b des Durchschnittes MA die Eigenschaft, dass die Strecke, die a und b verbindet, zu A gehört.

Denn A enthält die mit (a, b) korrespondierende Linse, also die Strecke, die a und b verbindet.

Jede der zwei in den Axiomen genennten Einheitsmengen E und E' ist auf M überkonvex.

Denn enthält sie zwei verschiedene Punkte a' und b' von M, so enthält sie nach dem Axiom III auch die mit (a', b') korrespondierende Linse.

Der Durchschnitt einer Anzahl auf M überkonvexer Mengen ist auf M überkonvex.

Denn enthält dieser Durchschnitt zwei verschiedene Punkte von M, so gehört die mit diesem Punktepaar korrespondierende Linse zu allen betrachteten auf M überkonvexen Mengen, also auch zu ihrem Durchschnitt.

Ich sage, dass eine Teilmenge A von M eine auf M überkonvexe Hülle besitzt, falls A Teilmenge einer auf M überkonvexen Menge ist; der Durchschnitt aller auf M überkonvexen Mengen, die A enthalten ist nach dem Obigen auf M überkonvex und wird die auf M überkonvexe Hülle von A genannt.

Evident ist:

Besitzt eine Teilmenge A von M eine auf M überkonvexe Hülle, so ist A Teilmenge dieser Hülle.

Ich werde nun beweisen:

Besitzen zwei verschiedene Punkte a und b von M eine auf M überkonvexe Hülle, so ist das die mit diesem Punktepaar korrespondierende Linse.

Denn die Hülle enthält mit a und b auch die Linse und die Linse ist nach dem Axiom III auf M überkonvex.

Ist A eine Teilmenge von B, ist B eine Teilmenge von M und besitzt B eine auf M überkonvexe Hülle $B^\star$, so besitzt A eine auf M überkonvexe Hülle, die eine Teilmenge von $B^\star$ ist.

Denn es gibt eine auf M überkonvexe Menge, die B, also A enthält, so dass A eine auf M überkonvexe Hülle $A^\star$ besitzt. Jeder zu M gehörige Punkt von $A^\star$ liegt in allen A enthaltenden auf M überkonvexen Mengen, also erst recht in allen B enthaltenden auf M überkonvexen Mengen, so dass A^* eine Teilmenge von B^* ist.

Hat die Teilmenge A von M eine auf M überkonvexe Hülle A^*, so entsprechen jedem Punkte a von A^* endlich viele Punkte $a_1, a_2, \ldots, a_\sigma$ von A mit der Eigenschaft, dass a zu der auf M überkonvexen Hülle des Systems $(a_1, a_2, \ldots a_\sigma)$ gehört.

Denn die Punkte a, denen ein endliches Teilsystem von A entspricht, dessen auf M überkonvexe Hülle a enthält, bilden eine Menge T, die A enthält und eine Teilmenge von A^* ist. T ist auf M überkonvex, denn liegen in T zwei verschiedene Punkte a und b von M, so gibt es endlich viele Punkte $a_1, \ldots, a_\sigma, b_1, \ldots, b_\tau$ in A mit der Eigenschaft, dass a in der auf M überkonvexen Hülle des Systems $(a_1, \ldots, a_\sigma)$ und dass b in der auf M überkonvexen Hülle des Systems $(b_1, \ldots, b_\tau)$ liegt. Die auf M überkonvexe Hülle des Systems $(a_1, \ldots, a_\sigma, b_1, \ldots, b_\tau)$ enthält die Punkte a und b, also auch die mit diesem Punktepaar korrespondierende Linse, so dass diese Linse zu T gehört. Folglich ist T eine auf M überkonvexe Teilmenge der auf M überkonvexen Hülle A^*, so dass diese Hülle nach ihrer Definition identisch mit T ist.

Für den Beweis der folgenden Sätze brauche ich einen Hilfssatz.

Haben zwei konvexe Punktmengen D und D' mindestens einen inneren Punkt t gemeinsam, liegen alle etwaigen gemeinsamen Begrenzungspunkte von D und D' auf einer Geraden G, die weder D noch D' spaltet und ist mindestens eine der zwei Teilmengen D und D' beschränkt, so enthält wenigstens eine der Menge D und D' alle nicht auf G liegenden Punkte der andern Menge.

Beim Beweis kann ich ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass D beschränkt ist und dass D' mindestens einen nicht zu D gehörigen und nicht auf G liegenden Punkt s enthält. Ich werde zeigen, dass jeder nicht auf G liegende Punkt von D dann zu D' gehört. Es sei C irgend eine beschränkte konvexe Menge, die D, die Begrenzungspunkte von D und s in ihrem Innern enthält. Die konvexen Punktmengen D und CD' haben denn inneren Punkt t gemeinsam und die etwaigen gemeinsamen Begrenzungspunkte von D und CD' sind zugleich Begrenzungspunkte von D und D', liegen also auf der Gerade, die weder D noch CD' spaltet. D und CD' sind beschränkt. Zieht man von t aus irgend eine Halbgerade, so liegt auf dieser Halbgeraden genau ein Begrenzungspunkt von D und genau ein Begrenzungspunkt von CD'; die Abstände dieser zwei Begrenzungspunkte zu t nenne ich successive $\alpha(\varphi)$ und $\beta(\varphi)$, wo φ den Winkel ≥ 0 und $\leq 2\pi$ bezeichnet, den die betrachtete Halbgerade bildet mit der Halbgeraden, die von t aus durch s gezogen wird. Da s zu CD', aber nicht zu D gehört, ist

$$\beta(0) = \beta(2\pi) > \alpha(0) = \alpha(2\pi).$$

Im Intervall $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ sind $\alpha(\varphi)$ und $\beta(\varphi)$ stetige Funktionen von φ. Die etwaigen φ mit $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ und $\alpha(\varphi) = \beta(\varphi)$ entsprechen den gemeinsamen Begrenzungspunkten der konvexen Mengen D und CD' und bilden

somit ein (eventuell leeres) Teilintervall des offenen Intervalles $(0,2\pi)$. Für die übrigen φ im abgeschlossenen Intervall $(0,2\pi)$ folgt also mit Rücksicht auf die obige Ungleichung aus Stetigkeitsgründen $\beta(\varphi) > \alpha(\varphi)$, so dass jeder nicht auf G liegende Punkt von D in CD', also in D' liegt.

Sind die in M liegenden Punkte $a_1, a_2, \ldots, a_\sigma$ $(\sigma \geq 3)$ die successiven Eckpunkte eines konvexen Polygons, bilden sie ein System A mit einer auf M überkonvexen Hülle A^* und liegt keiner der σ Punkte in der auf M überkonvexen Hülle der $\sigma - 1$ übrigen Punkte, so ist A^* die Vereinigungsmenge der Menge K und der Linsen, die mit den n Punktepaaren $a_\varrho\, a_{\varrho+1}$ $(\varrho = 1, 2, \ldots, \sigma)$ korrespondieren; hierin ist $a_{\sigma+1} = a_1$ und K ist die konvexe Hülle von A. Dabei ist A^* konvex.

Sind die Einheitsmengen alle eigentlich-konvex, oder alle abgeschlossen, so ist die auf M überkonvexe Hülle A^* von A eigentlich-konvex, bezw. abgeschlossen.

Für den speziellen von Herrn A. E. MAYER eingeführten Begriff der Ueberkonvexität hat Herr J. BUTER in seiner Dissertation (Satz 52, S. 6 und S. 46; vergl. These Proceedings, S. 761) diesen Satz bewiesen unter der Voraussetzung dass M die ganze Euklidische Ebene ist.

Für den Beweis bemerke ich zunächst, dass A eine auf M überkonvexe Hülle besitzt, somit in einer geeignet gewählten Einheitsmenge liegt. Für $\varrho = 1, 2, \ldots, \sigma$ gibt es also zwei Einheitsmengen E_ϱ und E'_ϱ mit der Eigenschaft, dass die Axiome I, II, III und IV mit a_ϱ, $a_{\varrho+1}$, E_ϱ und E'_ϱ statt a, b, E und E' erfüllt sind.

Die durch a_ϱ und $a_{\varrho+1}$ gehende Gerade G_ϱ verteilt die Ebene in zwei offene Halbebenen, die ich H_ϱ und H'_ϱ nenne und zwar so, dass H_ϱ keinen der Punkte $a_1, a_2, \ldots, a_\sigma$ enthält. Die Durchschnitte von H_ϱ mit E_ϱ und E'_ϱ nenne ich successive D_ϱ und D'_ϱ. Ich behaupte, dass einer dieser zwei Durchschnitte Teilmenge des andern ist. Denn sonst haben diese zwei konvexen Mengen, von der a_ϱ und $a_{\varrho+1}$ Begrenzungspunkte sind, mindestens einen inneren Punkt gemeinsam, so dass E_ϱ und E'_ϱ dann verschiedene Mengen sind, die wenigstens einen inneren Punkt gemeinsam haben. Nach dem Axiom II ist dann wenigstens eine der Mengen E_ϱ und E'_ϱ beschränkt und sind a_ϱ und $a_{\varrho+1}$ die einzigen gemeinsamen Randpunkte von E_ϱ und E'_ϱ. Folglich ist wenigstens eine der Mengen D_ϱ und D'_ϱ beschränkt und liegen die gemeinsamen Begrenzungspunkte von D_ϱ und D'_ϱ auf der Geraden G_ϱ, die weder D_ϱ noch D'_ϱ spaltet. Wir können nun unseren Hilfssatz anwenden und finden so, da weder D_ϱ noch D'_ϱ einen auf G_ϱ liegenden Punkt enthält, dass eine dieser zwei Mengen D_ϱ und D'_ϱ Teilmenge der andern ist.

Ich darf annehmen, dass D_ϱ eine Teilmenge von D'_ϱ ist, da ich sonst nur E_ϱ und E'_ϱ zu vertauschen brauche.

Auf dieselbe Art zeigt man, dass $E'_\varrho H'_\varrho$ eine Teilmenge von $E_\varrho H'_\varrho$ oder umgekehrt $E_\varrho H'_\varrho$ eine Teilmenge von $E'_\varrho H'_\varrho$ ist.

Nehmen wir für einen Augenblick an, dass $E'_\varrho H'_\varrho$ nicht eine Teilmenge von $E_\varrho H'_\varrho$ ist. Dann gehört jeder nicht auf G_ϱ liegende Punkt von E_ϱ zu E'_ϱ. Aber E'_ϱ enthält auch die offene Strecke $(a_\varrho, a_{\varrho+1})$. Nach dem Axiom II enthält E_ϱ dann wenigstens einen Punkt p auf G_ϱ ausserhalb der abgeschlossenen Strecke $(a_\varrho, a_{\varrho+1})$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann ich annehmen, dass a_ϱ zwischen p und $a_{\varrho+1}$ liegt, da ich sonst nur a_ϱ und $a_{\varrho+1}$ zu vertauschen brauche. Nach dem Axion I enthält E_ϱ wenigstens einen inneren Punkt, also auch einen Punkt q, der nicht auf G_ϱ liegt. Das Innere des Dreieckes mit den Eckpunkten $a_{\varrho+1}$, p und q gehört dann zu E_ϱ, also auch zu E'_ϱ. Da aber a_ϱ zwischen p und $a_{\varrho+1}$ liegt und ein Begrenzungspunkt von E_ϱ und E'_ϱ ist, gehört die Strecke, die p und $a_{\varrho+1}$ verbindet, zur Begrenzung von E_ϱ und E'_ϱ, so dass diese zwei Mengen E_ϱ und E'_ϱ mehr als zwei gemeinsame Begrenzungspunkte besitzen. Nach dem Axiom II sind E_ϱ und E'_ϱ dann dieselben Mengen, so dass jedenfalls $E'_\varrho H'_\varrho$ eine Teilmenge von $E_\varrho H'_\varrho$ ist.

Die drei verschiedenen zu M gehörigen Punkte $a_\varrho, a_{\varrho+1}$ und a_ν ($\nu \neq \varrho$; $\nu \neq \varrho + 1$; ist $\varrho = n$, so ist $\nu \neq 1$) liegen, wie schon gesagt, in einer geeignet gewählten Einheitsmenge; da a_ϱ nicht in der mit $(a_{\varrho+1}, a_\nu)$ korrespondierenden Linse liegt und $a_{\varrho+1}$ nicht zu der mit (a_ϱ, a_ν) korrespondierenden Linse gehört, so liegt a_ν nach dem Axiom IV in der Vereinigungsmenge von E_ϱ und E'_ϱ, also in der Vereinigungsmenge von $E_\varrho H_\varrho$ und $E'_\varrho H'_\varrho$, somit in $E_\varrho H'_\varrho$, folglich in E_ϱ. Ist $\overline{E}_\varrho$ die Vereinigungsmenge von E_ϱ, a_ϱ und $a_{\varrho+1}$, so enthält jede der konvexen und auf M überkonvexen Mengen $\overline{E}_1, \overline{E}_2, \ldots, \overline{E}_\sigma$ alle Punkte $a_1, a_2, \ldots, a_\sigma$, also auch die konvexe Hülle K und auch die mit $(a_\varrho, a_{\varrho+1})$ korrespondierende Linse ($\varrho = 1, 2, \ldots, \sigma$).

Jede der Mengen $\overline{E}_1, \overline{E}_2, \ldots, \overline{E}_\sigma$ enthält daher die Vereinigungsmenge V von K und den n genannten Linsen. Umgekehrt, ein Punkt der nicht in V liegt, liegt in wenigstens einer Halbebene H_ϱ und da er nicht zu D_ϱ gehört, liegt er dann nicht in $\overline{E}_\varrho$. Hiermit ist bewiesen, dass V der Durchschnitt der konvexen und auf M überkonvexen Mengen $\overline{E}_1, \overline{E}_2, \ldots, \overline{E}_\sigma$, also selbst konvex und auf M überkonvex ist. Wir wissen auch, dass V die Menge A enthält und in der auf M überkonvexen Hülle A^* von A enthalten ist, so dass V diese Hülle A^* selbst ist.

V ist der Durchschnitt der Mengen $\overline{E}_1, \overline{E}_2, \ldots, \overline{E}_\sigma$. Sind alle Einheitsmengen eigentlich-konvex oder abgeschlossen, so ist also auch V eigentlich-konvex, bezw. abgeschlossen.

Besitzt die aus mindestens zwei Punkten bestehende Teilmenge A von M eine auf M überkonvexe Hülle A^*, so ist diese Hülle konvex.

Sind a und b beliebige Punkte von A^*, so können wir, wie wir wissen, in A endlich viele Punkte $a_1, \ldots, a_\sigma, b_1, \ldots, b_\tau$ finden, so dass a in der über M überkonvexen Hülle des Systems $(a_1, a_2, \ldots, a_\sigma)$ und dass b in der über M überkonvexen Hülle des Systems $(b_1, b_2, \ldots, b_\tau)$ liegt. Wir finden also in A endlich viele Punkte $c_1, c_2, \ldots, c_\nu$, deren auf M überkonvexe Hülle die Punkte a und b enthält. Dabei können wir annehmen, dass keiner der ν Punkte $c_1, \ldots, c_\nu$ in der auf M überkonvexen Hülle der $\nu - 1$ übrigen Punkte liegt, da wir einen solchen Punkt streichen können; denn liegt zum Beispiel c_ν in der auf M überkonvexen Hülle des Systems $(c_1, \ldots, c_{\nu-1})$, so enthält die zuletzt genannte Hülle die ν Punkte $c_1, \ldots, c_\nu$, also auch die auf M überkonvexe Hülle des Systems $(c_1, \ldots, c_\nu)$, so dass die Systeme $(c_1, \ldots, c_{\nu-1})$ und $(c_1, \ldots, c_\nu)$ dieselbe auf M überkonvexe Hülle besitzen.

Ist $\nu = 2$, so enthält die mit (c_1, c_2) korrespondierende Linse die Punkte a und b, also die diese zwei Punkte verbindende Strecke, so dass dann diese Strecke zu A^* gehört. Ist $\nu \geqq 3$, so folgt aus dem vorigen Satz, dass die auf M überkonvexe Hülle des Systems $(c_1, c_2, \ldots, c_\nu)$ konvex, also mit a und b auch die diese zwei Punkte verbindende Strecke enthält, so dass auch in diesem Fall die genannte Strecke zu A^* gehört, womit bewiesen ist, dass A^* konvex ist.

Jetzt gehe ich über zu der Formulierung und dem Beweis des letzten Satzes.

Besitzt eine aus mindestens zwei verschiedenen Punkten bestehende Teilmenge A von M eine auf M überkonvexe Hülle A^*, so kann man jedem Punkt t, der zu A^*, aber nicht zum Innern der konvexen Hülle K von A gehört, zwei verschiedene Punkte a und b zuordnen mit der Eigenschaft, dass die mit diesem Punktepaar korrespondierende Linse den Punkt t enthält.

Wie ich schon bewiesen habe, kann man in A endlich viele Punkte $a_1, a_2, \ldots, a_\sigma$, finden, deren auf M überkonvexe Hülle t enthält; hierbei kann ich annehmen, dass $\sigma \geqq 2$ ist und dass keiner der σ Punkte in der auf M überkonvexen Hülle der $\sigma - 1$ übrigen Punkte liegt. Ist $\sigma = 2$, so gehört t zu der mit (a_1, a_2) korrespondierenden Linse. Ist $\sigma \geqq 3$, so sind $a_1, a_2, \ldots, a_\sigma$ die Eckpunkte eines konvexen Polygons, die ich dann so numerieren kann, dass sie die successiven Eckpunkte dieses Polygons sind. Wir wissen dann, dass t entweder zu einer Linse gehört, die mit einem Punktepaar $(a_\varrho, a_{\varrho+1})$ korrespondiert ($\varrho = 1, \ldots, \sigma$; $a_{\sigma+1} = a_1$) oder im Innern der konvexen Hülle des Systems $(a_1, \ldots, a_\sigma)$, also im Innern der konvexen Hülle von A liegt. Hiermit ist der Satz bewiesen.