FRETS, G. P.: "The growth curves of the dimensions and of the weight of the seeds of Phaseolus vulgaris". (Communicated by Prof. J. BOEKE), p. 215.
FRETS, G. P.: "A second group of observations regarding Dimension and Form with the growth of the seeds of Phaseolus vulgaris". (Communicated by Prof. J. BOEKE), p. 224.

Physics. — *La pression du toit sur le charbon près du front, dans les exploitations par tailles chassantes.* Par F. K. TH. VAN ITERSON.

(Communicated at the meeting of January 28, 1939.)

CHAPITRE PREMIER.

Considérations théoriques.

§ 1. *Introduction.*

Les Mines de l'Etat Néerlandais construisent un grand laboratoire de recherche et occupent un assez grand personnel scientifique. Le besoin se faisait sentir de porter l'exploitation des mines à un niveau supérieur en rapport avec le progrès avancé de la physique. Un des sujets les plus importants proposé à l'étude des mathématiciens et physiciens des mines est le problème de la pression des terrains.

L'art de l'ingénieur des mines consiste, pour une grande partie, dans le combat contre la tendance des terrains environnants à combler les vides créés.

Les exploitants de mines se laissent surtout guider dans l'exercice du métier par leur expérience. Quand ils décrivent les effets de pression, ils parlent de la formation de voûtes et comparent le toit à des poutres encastrées.

D'autre part les physiciens-mathématiciens, qui seraient capables d'éclaircir beaucoup les problèmes qui intéressent tellement les praticiens, n'ont aucun contact avec la réalité, qui se présente dans les exploitations souterraines.

Et pourtant les problèmes de résistance des matériaux posés par le besoin d'entretenir des excavations dans la roche friable requièrent l'attention des adeptes de la théorie pure de l'élasticité. Pour les calculs des travaux d'art, l'ingénieur s'est créé une mécanique technique de résistance, qui donne en général les tensions avec une approximation suffisante. Pour calculer les sollicitations de la matière autour des excavations creusées dans le massif minier au contraire, on applique la théorie pure de l'élasticité, ce qui est considéré comme appartenant plutôt au domaine de la physique mathématique, et donne des solutions élégantes et exactes.

Mais nous allons voir que dans les mines de charbon les parties libérées se détendent, le schiste se brise, la veine est souvent écrasée, le boisage ou le soutènement métallique est comprimé. Pour exprimer en formules ces phénomènes, il faut recourir à d'autres lois physiques de la matière, mais avant d'aborder la question de l'action de la pression des terrains

après rupture, il faut dans une première étude, résoudre le problème de la répartition des tensions selon la théorie pure de l'élasticité.

§ 2. *La distribution radiale des tensions au dessous d'une charge linéaire, selon* FLAMANT.

En étudiant la résistance du terrain à la charge des constructions, nous avions trouvé la solution pour les tensions dans un corps élastique isotrope, qui constitue le sol et s'étend jusqu' à l'infini, chargé d'une goulotte hémicylindrique, de longueur infinie, de rayon r_0, remplie d'un liquide dense, et représentée à la figure 1. [1])

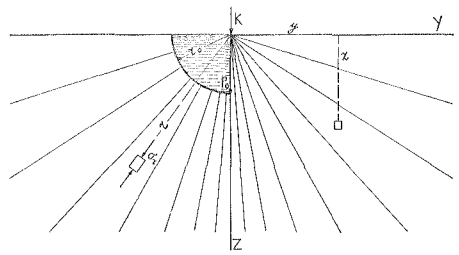

Fig. 1. Distribution radiale des pressions dans le terrain au dessous d'une goulotte hémicylindrique remplie d'un liquide dense ou au dessous d'une charge unique K.

Nous ne savions pas alors que c'était le problème classique de la répartition de la charge au dessous d'une ligne, dont FLAMANT avait déjà donné la solution en 1882. [2]).

Le plus souvent on le désigne comme la distribution radiale des tensions selon MICHELL. [3])

En coordonnées polaires, le résultat de la solution exacte est extrêmement simple.

Quoique nous nous bornions pour le moment au problème à deux dimensions, afin de ne jamais oublier qu'en réalité la longueur de toute galerie ou chantier dans la mine est restreinte, nous disposons l'axe des X-dans le sens de la longueur c'est à dire perpendiculairement au profil étudié, celui des Y-dans le sens horizontal du profil et celui des Z-dans le sens vertical d'action de la pesanteur.

Nous appelons p_0 la pression hydraulique au point le plus bas de la goulotte et K le poids du liquide par unité de longueur, qu'on peut aussi s'imaginer comme une force répartie suivant l'axe.

Ainsi
$$K = \frac{\pi}{2} p_0 r_0.$$

Alors, comme nous avons prouvé et comme on peut lire dans les publications citées la tension radiale au point r, θ est:
$$\sigma_r = -\frac{p_0 r_0}{r} \cos\theta = -\frac{2K}{\pi r} \cos\theta.$$

La tension tangentielle $\sigma_t = 0$, et les tensions de cisaillement $\tau_{r\theta} = 0$ pour tous les points.

[1]) F. K. TH. VAN ITERSON, Résistance du Terrain. Théorie des Fondations Mémoires de la Société des Ingénieurs Civils de France 1928, (bulletin de mars—avril).
[2]) A. FLAMANT, Comptes Rendus **114** (1882).
[3]) J. H. MICHELL, London Math. Soc. Proc. **32**, 35 (1900). Voir aussi A. NÁDAI, Plasticity 1931, p. 244—251.

On peut retrouver directement ces résultats en se rappelant que le calcul exact a démontré que la pression radiale, exercée entre deux rayons de la figure est supportée uniquement par la matière dans le secteur compris entre ces deux rayons.

En coordonnées rectangulaires, on obtient pour le point y, z:

$$\sigma_z = -\frac{2K}{\pi}\frac{z^3}{(y^2+z^2)^2},\ \sigma_y = -\frac{2K}{\pi}\frac{y^2 z}{(y^2+z^2)^2},\ \tau_{yz} = \frac{2K}{\pi}\frac{y z^2}{(y^2+z^2)^2}.$$

Pour démontrer que ces tensions sont partout en équilibre et que les déplacements varient d'une manière continue, il est utile de mentionner que ces tensions peuvent être déduites de la fonction, dite: fonction d'Airy, $F = -\frac{K}{\pi} y \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{z}$, de cette manière:

$$\sigma_z = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \qquad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}, \qquad \tau = -\frac{\partial^2 F}{\partial y\, \partial z}.$$

Pour la solution du problème, qui nous occupe, nous avons besoin de connaître l'inclinaison $\frac{\partial w}{\partial y}$, de la surface du sol, à une distance y de l'axe. Les déplacements d'un point $x\,y\,z$ dans le sens des axes des X, des Y et des Z, sont nommés respectivement u, v et w.

Comme nous l'avons déjà remarqué dans notre introduction le traitement mathématique des problèmes d'élasticité ressort plutôt des physiciens que des ingénieurs, aussi nous référons nous pour les formules à appliquer à un manuel de physique. [1])

Il est cependant facile d'établir par un raisonnement simple et tout ingénieur a appris les relations suivantes:

$$\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\tau_{yz}}{G},\ \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\sigma_x + \sigma_z}{mE},\ \sigma_x = \frac{\sigma_z + \sigma_y}{m}.$$

En éléminant σ_x des deux dernières relations on obtient

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{m-1}{mE}\sigma_y - \frac{m+1}{m^2 E}\sigma_z.$$

On sait que

$$G = \frac{m}{2(m+1)} E.$$

En substituant à τ, σ_y et σ_z les valeurs données tout en haut à cette page et en différenciant

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y\, \partial z} = -\frac{4(m+1)K}{m\pi E}\frac{z^4 - 3y^2 z^2}{(y^2+z^2)^3}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y\, \partial z} = -\frac{2K}{\pi E}\left\{\frac{m-1}{m}\frac{y^4 - 3y^2 z}{(y^2+z^2)^3} + \frac{m+1}{m^2}\frac{3y^2 z^2 - z^4}{(y^2+z^2)^3}\right\}$$

[1]) Handbuch der Physik. Mechanik der elastischen Körper. Band VI Kap. 2. E. TREFFTZ. Mathematische Elastizitätstheorie, 1928, p. 112. Der ebene Verzerrungszustand.

soustraire

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\frac{2K}{\pi E}\left\{-\frac{m-1}{m}\frac{y^4 - 3y^2 z^2}{(y^2+z^2)^3} + \frac{2m^2+3m+1}{m^2}\frac{z^4 - 3y^2 z^2}{(y^2+z^2)^3}\right\}.$$

Après intégration:

$$\frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{2K}{\pi E}\left\{-\frac{m-1}{m}\frac{y^3}{(y^2+z^2)^2} + \frac{2m^2+3m+1}{m^2}\frac{y z^2}{(y^2+z^2)^2}\right\} + C.$$

La constante est nulle, car pour $y = \infty$ $\frac{\partial w}{\partial y} = 0$.

A la surface du sol, pour $z = 0$, on a:

$$\frac{\partial w}{\partial y}\ (\text{surface}) = -\frac{2(m-1)}{\pi m E}\frac{K}{y}.$$

Avant de continuer, nous donnons dans un paragraphe spécial:

§ 3. *Quelques applications de la solution trouvée par* FLAMANT *que tout ingénieur, surtout l'ingénieur des mines, doit connaître.*

Pour bien connaître les tensions régnant autour d'un tunnel cylindrique, commençons par appliquer la distribution trouvée, dite des tensions radiales, pour le rocher infini, mais sans pesanteur propre, chargé d'une masse cylindrique de liquide dense. La pression au niveau O est supposée nulle, de manière que les pressions sont positives dans l'hémi-espace inférieur et négatives dans l'hémi-espace supérieur. Il est clair que nous avons alors comme auparavant en coordonnées polaires:

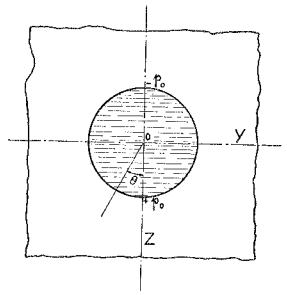

Fig. 2. Le massif rocher infini chargé d'une masse cylindrique et horizontale.

$$\sigma_r = -\frac{p_0 r_0}{r}\cos\theta = -\frac{2K}{\pi r}\cos\theta,\ \sigma_t = 0,\ \tau_{r\theta} = 0.$$

Dans cette formule $p_0 = \gamma_l r_0$ et $K = \frac{\pi}{2} r_0^2 \gamma_l$.

γ_l = densité du liquide.

Pour ne pas compliquer trop nos calculs suivants, nous supposons qu'à la profondeur h dans le terrain houiller règne dans tous les sens la pression $p = h\gamma$, γ étant le poids spécifique moyen du terrain superposé. Cette supposition est assez proche de la vérité. Dans les terrains récemment déposés, il est vrai que théoriquement on n'aurait cette pression que dans le sens vertical et seulement $\frac{p}{m}$ dans le sens horizontal (m = coëfficiënt de contraction latérale, dit coëfficiënt de POISSON). Mais il faut tenir compte qu'après la formation du terrain houiller quel-

ques milliers de mètres ont disparu par érosion. La détente n'était possible que dans le sens vertical et il ne faut pas perdre de vue que, sous les pressions très élevées, la matière en transformation métamorphique était plus ou moins plastique. En outre, on observe des failles remplies de débris pétrifiés, formées dans la période jurassique.

On pourrait aussi penser à une poussée ou un étirage dans l'écorce terrestre, mais après formation, notre terrain a été fortement ébranlé à plusieurs reprises, il est capable de transmettre des ondes sismiques.

Mais la preuve la plus directe qu'il n'existe jamais de tension dans le terrain houiller vierge et que les pressions y sont à peu près égales dans tous les sens, résulte de l'observation journalière que les séparations d'éclats et les boursouflements se produisent de la même façon dans les beurtias, les bowettes, les galeries à travers banc et autant au toit qu'aux parois et qu'au mur [1]).

Il serait du reste facile d'introduire une différence entre la pression verticale et la pression horizontale. On le fait [2]), souvent mais nous considérons cette complication comme inutile, sinon erronée.

Si l'on creuse un tunnel ou un puits vertical de rayon r_0 dans le rocher homogène où règne la pression uniforme p, on a selon LAMÉ en coordonnées polaires, comme chaque ingénieur l'a appris [3]):

$$\sigma_r = p\left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right) \quad , \quad \sigma_t = p\left(1 + \frac{r_0^2}{r^2}\right).$$

Maintenant, superposons l'influence de la pesanteur en supposant que p soit la pression au niveau du centre de notre tunnel ou galerie cylindrique et que celle-ci soit remplie d'un liquide, de la même densité γ qu'a le rocher environnant, alors les pressions sont

$$\sigma_r = p\left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right) + \gamma\, r \cos\theta, \quad \sigma_t = p\left(1 + \frac{r_0^2}{r^2}\right) + \gamma\, r \cos\theta.$$

Et à présent imaginons nous qu'on ôte le liquide, c'est à dire déduisons les tensions calculées d'après FLAMANT, alors nous avons les vraies tensions autour du tunnel creusé à une profondeur suffisante au dessous de la surface pour que l'on puisse négliger la différence entre l'épaisseur de la couche au sommet et aux retombées de la voûte.

$$\sigma_r = p\left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right) + \gamma\left(r - \frac{r_0^2}{r}\right)\cos\theta, \quad \sigma_t = p\left(1 + \frac{r_0^2}{r^2}\right) + \gamma\, r \cos\theta.$$

Pour discuter le résultat obtenu, considérons qu'on ait creusé le tunnel

[1]) Dans les charbonnages, on entend par le "mur" le sol, c. à d. ce qu'on a sous les pieds ou les genoux.

[2]) Untersuchungen zur Erkenntnis des Gebirgdrucks von R. FENNER. Glückauf **74** 681 705 (1938).

Statische Probleme des Tunnel- und Druckstollenbaues von Dr. HANNS SCHMID 1926.

[3]) Hütte I Band 1936 p. 675.

dans une matière dépourvue de toute résistance à la traction. Nous présumons que le danger d'effondrement viendra du toit et nous demandons s'il existe des tensions dans le toit ou bien s'il subsiste partout des pressions autour de la galerie souterraine.

Posons $\theta = 180^\circ$ et $p = \gamma h$ alors on a

$$\sigma_r = \gamma\,(h - r)\left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right) \quad , \quad \sigma_t = \gamma\,(h - r) + \gamma\, h\, \frac{r_0^2}{r^2}.$$

Et dans le toit, à l'endroit où l'on pouvait craindre en premier lieu la tension, pour $r = r_0$ on a $\sigma_r = 0$ et $\sigma_t = \gamma\,(2h - r_0)$, ce qui est toujours une pression.

Pourvu que le terrain résiste à la pression, même s'il céderait à la moindre tension, il n'y a aucun danger à creuser un tunnel; le diamètre n'a même pas beaucoup d'influence sur la sollicitation de la roche. C'est l'ouvrage du renard, du lapin, de la taupe, de la souris, du ver, qui doit servir de modèle à quiconque creuse la terre.

Il n'y a que l'écrasement du matériau qui soit à craindre. Pour les mines de charbon, h est toujours grand comparé à r_0 et σ_t devient maximum pour $r = r_0$. On a donc uniquement à vérifier si $2\,p < K_d$, K_d étant la résistance du terrain à la pression.

On peut prouver que pour les sections non circulaires, il y a encore moins de raison de s'occuper de la différence dans l'action de la pesanteur au sommet et au bas du profil. On s'en rendra compte en étudiant les tensions autour d'un chantier large et peu haut dans la mine.

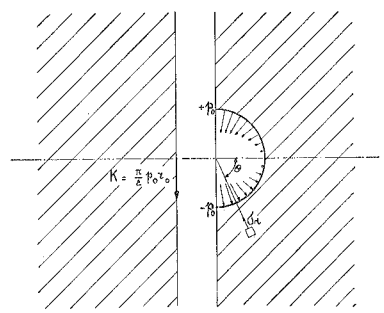

Fig. 3. Distribution radiale des tensions dans l'hémi-espace sollicité par une résultante parallèle à la surface libre.

Coupons maintenant notre tunnel cylindrique, foré dans l'espace indéfini, par un plan vertical.

Par le raisonnement on peut prouver que du fait qu'il n'y a pas d'efforts horizontaux à transmettre, qu'il n'y a pas de tension tangentielle, il n'y a pas non plus de déplacement horizontal dans le plan de symétrie; les deux hémi-espaces existent indépendamment. D'ailleurs, la solution exacte en donne la preuve et la tension unique est une tension radiale $\sigma_r = -p_0 \frac{r_0}{r} \sin\theta$ pour la moitié représentée à droite ou $\sigma_r = -\frac{2K}{\pi r} \sin\theta$ pour la moitié à gauche dans la figure 3.

La figure 1 donne la répartition des tensions pour une force unique, agissant perpendiculairement à la surface. Dans la figure 4 nous avons tourné la moitié gauche de la figure 3 et représentons une force parallèle

à la surface. Ainsi nous connaissons l'effet des deux composantes. C'est encore utile à l'ingénieur, parceque l'intégration pour les forces agissant à la surface du sol ou dans l'intérieur de la masse rocheuse dans des directions quelconques, donne les tensions en un point choisi dans le terrain.

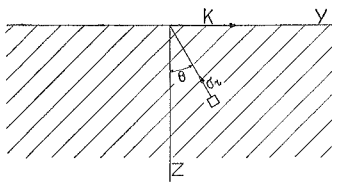

Fig. 4. Force unique agissant dans la surface de l'hémi-espace. Problème à deux dimensions.

Mais la solution du problème, dit de la répartition radiale des tensions, donne aussi les efforts pour un secteur de l'espace, chargé selon son arête, soit par une pression variant selon le sinus d'un angle et agissant dans une goulotte (fig. 6) soit par la résultante de deux forces K_1 et K_2 (fig. 5).

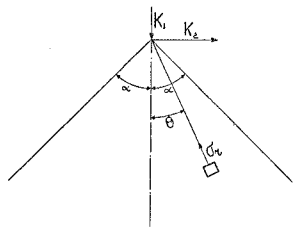

Fig. 5. Secteur de l'espace infini, ou coin d'un angle de matière mince, sollicité dans une direction quelconque.

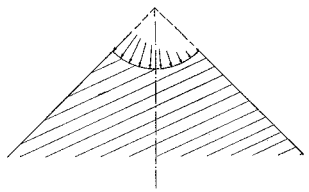

Fig. 6. Secteur sollicité dans le coin par une pression distribuée selon une loi de sinus.

Dans ce cas on obtient

$$\sigma_r = \frac{K_1}{r}\,\frac{\cos\theta}{\alpha + \sin\alpha\cos\alpha} + \frac{K_2}{r}\,\frac{\sin\theta}{\alpha - \sin\alpha\cos\alpha}$$

$$\sigma_t = 0 \qquad \tau_{rt} = 0.$$

La solution est exacte. Nous l'utilisons pour vérifier la formule technique pour les poutres de largeur b, encastrées à une extrémité (fig. 7). Calculons la tension dans une section, de hauteur $h = 2e$ à une distance l de

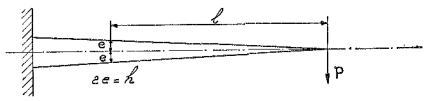

Fig. 7. Controle de la formule $\sigma_b = \dfrac{\text{Moment flexion}}{\text{Module de flexion}}$

l'autre extrémité chargée par le poids P. Le moment de flexion est alors Pl.

En substituant en notre formule

$$K_1 = 0 \text{ et } K_2 = P$$

on obtient

$$\sigma = \frac{P}{bl}\,\frac{\sin\theta}{\alpha - \sin\alpha\cos\alpha}.$$

Or $\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2}\sin 2\alpha$ et pour les petits angles

$$\sin 2\alpha = \frac{2\alpha}{1!} - \frac{8\alpha^3}{3!} + \frac{32\alpha^5}{5!} - etc.$$

En négligéant dès le troisième terme on a

$$\sigma = \frac{P}{bl}\,\frac{\sin\theta}{4\,\frac{\alpha^3}{6}}$$ Pour les petits angles $\alpha = \frac{e}{l} = \frac{h}{2l}$.

$$\sigma = \frac{Pl^2}{b}\,\frac{\sin\theta}{\frac{h^2}{12}}$$ Selon notre notation, $\sin\theta = \frac{y}{l}$.

$$\sigma = Pl\,\frac{y}{\frac{1}{12}bh^2}$$ Pour les parties de la section les plus éloignées de l'axe neutre, pour $y = \frac{h}{2}$.

$$\sigma = \frac{Pl}{\frac{1}{6}bh^2} = \frac{M}{W}$$ c. q. f. d.

§ 4. *L'hémi-espace chargé d'une bande indéformable.*

Imaginons nous (fig. 8) qu'on a laissé inexploitée une bande dans la veine de charbon, par exemple comme le prescrit le règlement des mines, sur la limite qui sépare deux concessions voisines. Ou bien, ce qui revient à la même repartition des tensions, posons le problème du massif semi infini, chargé sur la bande indéformable de largeur $2b$ soumise

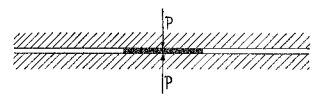

Fig. 8. Bande inexploitée dans la veine de charbon.

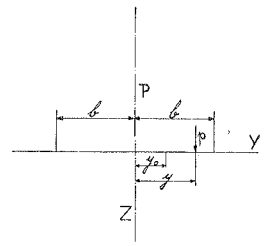

Fig. 9. Hémi-espace, chargé sur une bande indéformable de largeur $2b$.

à la pression P par unité de longueur. On peut aussi s'imaginer une bande infiniment large tirée dans le sens de sa longueur, munie de deux incisions minces, qui ne laissent intact le corps que sur la largeur $2b$. Notre problème est 1° de trouver la répartition de la pression p en fonction de y sur la largeur de la bande (fig. 9) et 2° d'indiquer la distribution des tensions au dessous de la bande. Quant à p en fonction de y, cette fonction doit satisfaire à deux conditions:

I. $$\int_{y=-b}^{y=+b} p\,dx = P$$

et

II. Pour chaque point y_0 l'inclinaison $\frac{\partial w}{\partial y} = 0$.

Nous avons trouvé à la page 4 que la contribution à l'inclinaison $\frac{\partial w}{\partial y}$

d'une force $p\,dy$ agissant à la distance $y-y_0$ du point y_0 peut être exprimée par

$$d\frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{2(m-1)}{\pi m E}\,\frac{p\,dy}{(y_0-y)}.$$

Pour satisfaire à la deuxième condition, il faut trouver une fonction $p=f(y)$, qui annule $\frac{\partial w}{\partial y}$

$$\text{II.}\qquad \int_{y=-b}^{y=+b} \frac{p\,dy}{y-y_0} = 0.$$

La fonction est connue [1]) $p=\frac{P}{\pi\sqrt{b^2-y^2}}$ et nous pouvons nous borner à en donner une preuve nouvelle, si la validité était mise en doute.

Quant à la condition I la preuve est simple

$$\text{I.}\qquad \frac{P}{\pi}\int_{y=-b}^{y=+b}\frac{dy}{\sqrt{b^2-y^2}} = \frac{P}{\pi}\Big|_{-b}^{+b} \arcsin\frac{y}{b} = P.$$

L'intégration imposée par la deuxième condition est un peu plus difficile.

$$\text{II.}\qquad \int_{y=-b}^{y=+b}\frac{dy}{(y-y_0)\sqrt{b^2-y^2}}.$$

Posons d'abord $y=(y-y_0)+y_0$, alors

$$\frac{dy}{(y-y_0)\sqrt{b^2-y^2}} = \frac{d(y-y_0)}{(y-y_0)\sqrt{(b^2-y_0^2)-2y_0(y-y_0)-(y-y_0)^2}}.$$

Maintenant introduisons une nouvelle variable $t=\frac{1}{y-y_0}$, $d(y-y_0)=-\frac{dt}{t^2}$ et nous obtenons une intégrale dont la solution entre les limites données par le problème est connue

$$\int\frac{dt}{\sqrt{(b^2-y^2)t^2-2yt-1}} = \frac{1}{\sqrt{b^2-y_0^2}}\arccosh\frac{-y_0+(b^2-y^2)t}{\sqrt{y_0^2+(b^2-y_0^2)}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{b^2-y_0^2}}\Big|_{y=-b}^{y=+b}\arccosh\frac{-yy_0+b^2}{b(y-y_0)} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{b^2-y_0^2}}\left\{\arccosh\frac{b^2-by_0}{b(b-y_0)} - \arccosh\frac{b^2+by_0}{b(-b-y_0)}\right\}.$$

[1]) M. SADOWSKI. Zeitschr. f. angew. Math. und Mech. **8** 107 (1928).
G. MESMER. Techn. Mech. u. Thermodynamik **1** 89 (1930). Vergleichende spannungsoptische Untersuchungen und Fließversuche unter Konzentriertem Druck.

Or $\cosh\varphi = \cosh -\varphi$, de manière que notre intégrale II est nulle pour chaque valeur de y_0.

La répartition de la pression dans une bande de charbon inexploitée est représentée à la figure 10

$$p=\frac{P}{\pi\sqrt{b^2-y^2}}.$$

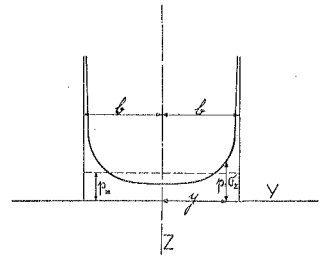

Fig. 10: Repartition de la pression au dessous d'une bande ou poinçon indéformable. (Problème à deux dimensions).

Au centre pour $y=0$ la pression $p_0=\frac{P}{\pi b}$ reste au dessous de la pression moyenne $p_m=\frac{P}{2b}$. Par contre les pressions tendent vers l'infini quand on se rapproche des bords.

Maintenant qu'on connait la répartition de la pression selon l'axe des Y, il est possible de calculer aussi la pression $\sigma_y=q$ en fonction de z selon l'axe des Z en appliquant la formule pour la tension σ_y de FLAMANT.

$$d\sigma_y = \frac{2p\,dy}{\pi}\,\frac{zy^2}{(y^2+z^2)^2} \quad\text{ou}\quad d\sigma_y = \frac{2Py^2\,dy}{\pi^2}\,\frac{z}{(y^2+z^2)^2(b^2-y^2)^2}$$

et intégrant entre les limites $y=-b$ et $y=+b$ on obtient:

$$q=\sigma_{y\,(\text{pour } y=0)}=0.$$

Il n'y a pas de tension σ_y le long de l'axe des Z. Il était nécessaire de le constater, pour le contraste avec le problème suivant.

Il est utile de prendre connaissance des expèriences faites par MESMER (voir note page 9), qui a confirmé par la méthode optique, avec des modèles en celluloid, la concentration des tensions aux bords, mais a démontré aussi qu'un leger arrondissement des bords suffit pour donner une repartition prèsque égale de la pression au dessous de la bande.

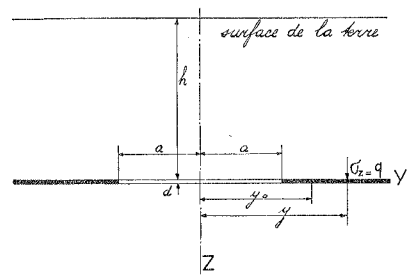

Fig. 11. Représentation schématique d'un chantier d'abatage dans une veine de charbon.

§ 5. *La pression sur le front du charbon.*

L'épaisseur des bonnes couches de charbon, 1,5 m en moyenne, est très petite, comparée à la profondeur où l'on les exploite, disons de l'ordre de 500 m. Il est impossible de la représenter assez mince à l'échelle de la figure 11. Nous supposons qu'à la profondeur h dans le une région inexploitée du terrain houiller règne la pression uniforme p. Appelons q la pression σ_z exercée par le toit sur la couche de charbon. q étant fonction de y. Nous croyons pour la

première fois avoir trouvé cette fonction. Pour $z=0$ la pression sur le charbon

$$\sigma_z = q = \frac{y}{\sqrt{y^2-a^2}}\,p.$$

On voit que pour $y=\pm a$ sur le front du charbon $\sigma_z = q = \infty$. La pression devient infiniment grande au ras de la veine. Si l'on ne prend pas des mesures spéciales, la cassure des bancs du toit part verticalement des points $y=\pm a$.

Pour $y=\infty$ $\sigma_z = q = p$, à l'infini la pression devient p.

Pour prouver que notre solution est exacte, il faut calculer l'inclinaison $\frac{\partial w}{\partial y}$ pour un point quelconque sur l'axe des Y et démontrer que partout cette inclinaison est nulle.

Nous la calculons pour y_0

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{2(m-1)}{\pi m E}\,p\left\{\int_{y=a}^{y=\infty}\frac{y\,dy}{(y-y_0)\sqrt{y^2-a^2}} + \int_{y=-\infty}^{y=-a}\frac{y\,dy}{(y-y_0)\sqrt{y^2-a^2}}\right\}$$

et trouvons $\frac{\partial w}{\partial y}=0$.

Il est intéressant de se rendre compte de quelle manière cette intégrale devient nulle pour toute valeur de y_0. Plus instructif encore est de se rendre compte de ce que devient l'équilibre des pressions dans le sens vertical.

Maintenant que la distribution de la pression selon l'axe des Y est connue $\sigma_z = q = \frac{y}{\sqrt{y^2-a^2}}\,p$ on peut calculer la distribution selon l'axe des Z en fonction de z et on trouve

$$\sigma_y\ (pour\ y=0) = \frac{z(z^2+2a^2)}{(z^2+a^2)^{3/2}}\,p.$$

Cette fonction a un maximum. On voit que pour $z=0$ $\sigma_y=0$; pour $z=\infty$ $\sigma_y=p$ et on trouve le maximum

$$\sigma_{y\,max} = \frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}\,p = 1{,}091\ p \quad pour\ z=\pm a\sqrt{2}.$$

On peut encore procéder au calcul des autres tensions selon les axes des Y et des Z, c'est à dire chercher l'autre tension principale σ_y en fonction de y selon l'axe des Y. On trouve encore une fois

$$\sigma_y\ (pour\ z=0) = \frac{y}{\sqrt{y^2-a^2}}\,p = \sigma_z$$

et pour la tension σ_z selon l'axe des Z en fonction de z

$$\sigma_z\ (pour\ y=0) = \frac{z^3}{(z^2+a^2)^{3/2}}\,p.$$

Toutes ces tensions sont représentées dans le premier quadrant de la figure 12.

Pour donner une représentation complète des tensions autour d'une fente dans le massif minier, et sur le charbon, supposé comme résistant à la pression, nous avons calculé les tensions dans les intersections des coordonnées elliptiques et hyperboliques dont INGLIS a fait usage dans sa remarquable étude [1]). Avec les tensions de compression et de cisaillement selon

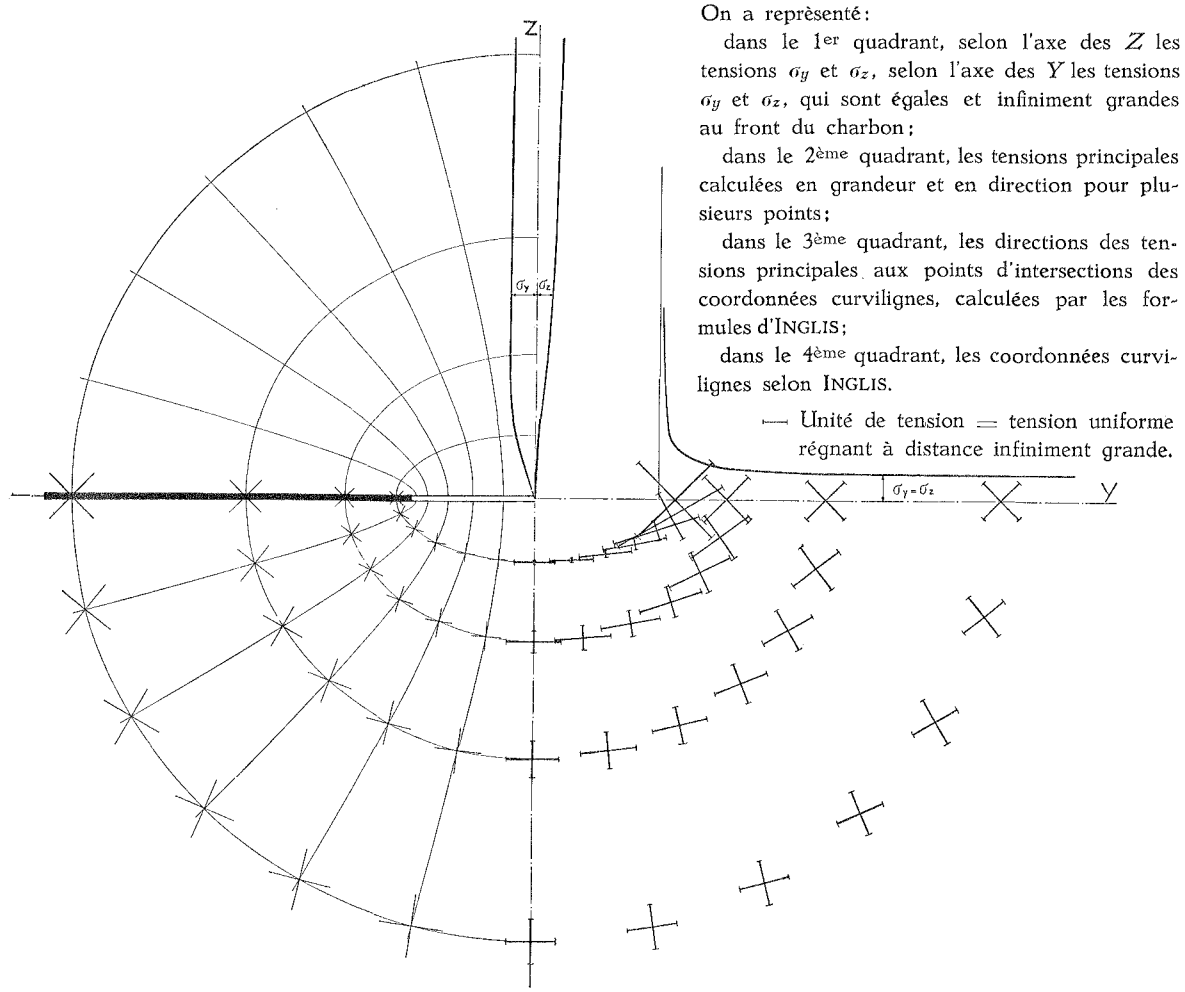

Fig. 12. Etude théorique de la distribution des pressions autour d'une fente dans le massif minier. On a représenté:

dans le 1er quadrant, selon l'axe des Z les tensions σ_y et σ_z, selon l'axe des Y les tensions σ_y et σ_z, qui sont égales et infiniment grandes au front du charbon;

dans le 2ème quadrant, les tensions principales calculées en grandeur et en direction pour plusieurs points;

dans le 3ème quadrant, les directions des tensions principales aux points d'intersections des coordonnées curvilignes, calculées par les formules d'INGLIS;

dans le 4ème quadrant, les coordonnées curvilignes selon INGLIS.

— Unité de tension = tension uniforme régnant à distance infiniment grande.

[1]) C. E. INGLIS. Stresses in a plate due to the presence of cracks and sharp corners. Transactions of the Institution of Naval Architects 1931 Part I p. 219.

les directions des coordonnées nous avons construit les tensions principales et trouvé leur direction avec des cercles de MOHR.

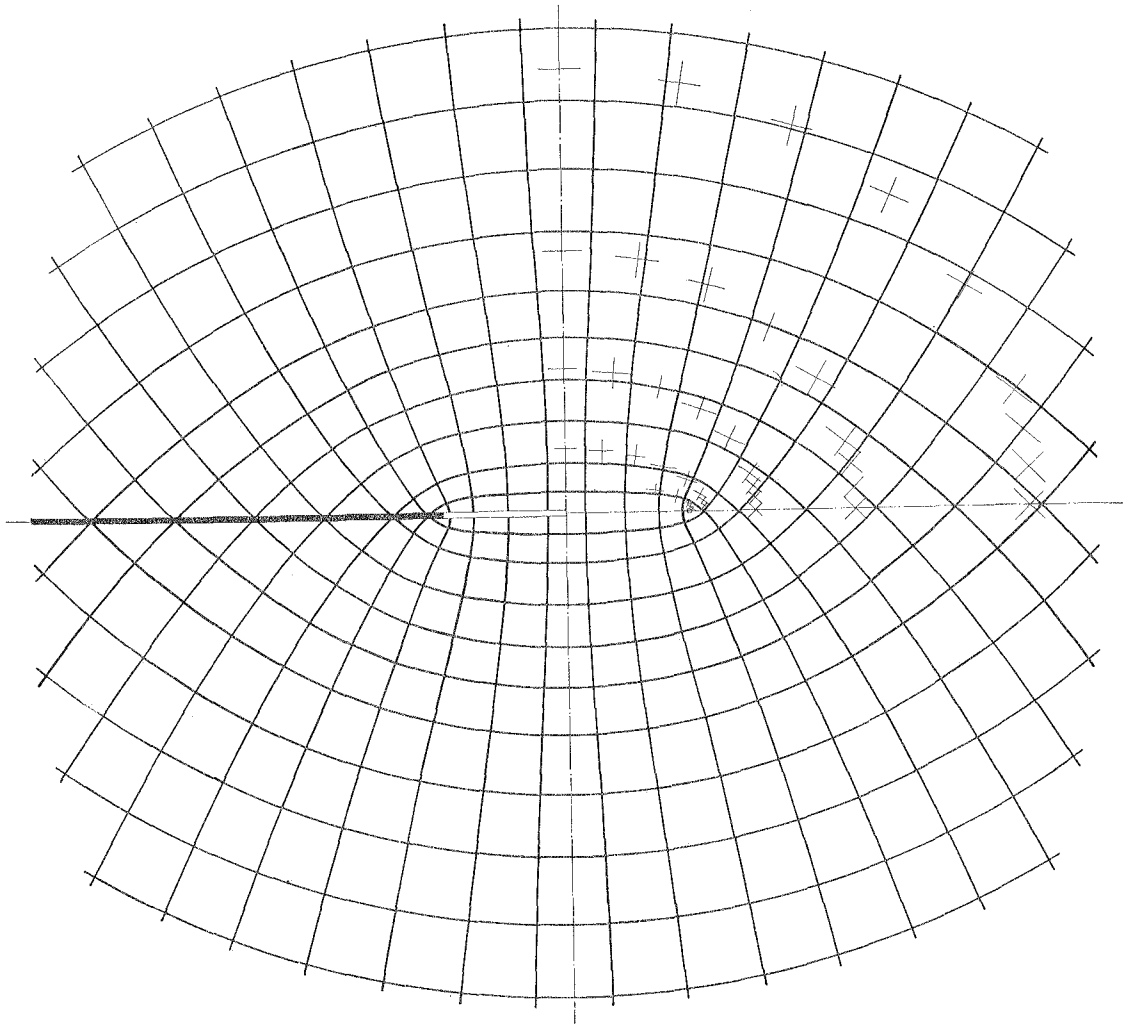

Fig. 13. Trajectoires des tensions (directions principales) autour d'une fente dans le rocher, ou des pressions théoriques autour du vide créé par l'exploitation de la veine de charbon sur l'étendue indiquée. Dans le premier quadrant, quelques unes des directions qui ont servi pour le tracé des trajectoires sont figurées.

A gauche en haut dans le 4ème quadrant de la figure 12 nous avons indiqué le système de coordonnées curvilignes employé par INGLIS.

Un trait noir représente le charbon. On peut aussi s'imaginer qu'on a séparé le rocher supérieur du rocher inférieur par des tôles en acier graissées.

A droit en bas dans le 2ème quadrant de la même figure nous avons donné pour les intersections des coordonnées les tensions principales en grandeur et en direction. Pour le point le plus intéressant, le front même du charbon,

ces tensions deviennent infiniment grandes et cela dans tous les sens.

A gauche dans le 3ème quadrant de la figure 12 sont représentées les directions des tensions principales pour les intersections des coordonnées qui ont servi pour la construction de la figure 13.

Nous nous sommes rendus compte que la méthode de calcul d'INGLIS pour la distribution des tensions autour d'un trou elliptique d'axes principaux a et b, appliquée au cas de l'ellipse d'axe $b = 0$ et aux coordonnées indiquées dans la figure donne les mêmes résultats que la nôtre pour tous les points des axes des Y et des Z. De cette manière on a la preuve que les calculs sont exacts [1]).

Plus spécialement nous avons payé attention à la direction des tensions principales dans les points situés sur l'axe des Y. Pour les trous de forme elliptique ces directions sont selon et perpendiculaire à cette axe, mais pour la fente, pour $b = 0$, quand les tensions sont égales dans tous les sens, il n'y a plus de directions principales, mais par le calcul infinitisimal on trouve que les directions touchent l'axe des Y selon 45°.

La figure 13 représente les trajectoires des tensions c. à. d. uniquement les directions des tensions principales. Pour l'infini nous avons pris à peu près des carrés. Il ne faut pas penser que le rapprochement des trajectoires est une mesure pour la grandeur des tensions, il n'existe aucune analogie entre lignes de courant et intensité de la sollicitation d'une construction aux mêmes contours, ni entre ligne de courant et trajectoires de tensions.

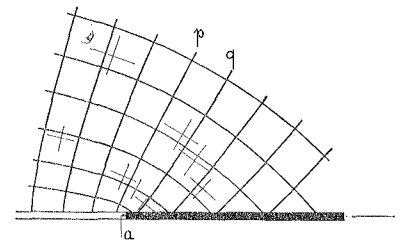

Fig. 14. Trajectoires des Tensions à échelle quintuple de celle de la figure 13 dans le voisinage du point critique a. Au front du charbon, en a, les trajectoires des types p et q se confondent.

A droit en haut dans le premier quadrant nous avons indiqué dans plusieurs points les directions principales qui ont servi pour la construction de la figure.

On s'intéresse surtout au point critique, le front du charbon où les tensions tombent pour le cas théorique d'infiniment grandes à nulle.

Dans la figure 14 nous avons représenté les trajectoires à une échelle quintuple de celle de la figure 13. Le saut dans les types des trajectoires y est à peine remarquable. Pour le point a même on a une trajectoire partant selon l'axe des Z et l'autre partant sous l'angle de 45° mais on ne pourra par les distinguer.

§ 6. *Conclusion.*

Les résultats de cette étude sont:

[1]) Il faut aussi consulter: Kerbspannungslehre von H. NEUBER, Berlin 1937. D'après ce livre, en appliquant les formules pour les incisions hyperboliques et les transformant pour notre cas des incisions aigues, nous avons fait le controle des calculs du § 4.

1°. Qu'il est erroné de comparer les pressions exercées par le toit sur le front du charbon à celles d'une poutre encastrée.

2°. Qu'il est quelque peu permis de comparer cette pression à celle exercée par la poussée d'une voûte, quoiqu'il soit difficile de comprendre de cette manière la pression infinie sur le bord du front.

3°. Que seule la théorie mathématique de l'élasticité est capable de nous donner une idée exacte, de ce qui doit arriver quand le charbon n'est pas écrasé et ne glisse de lui même sur ses limés.

Il faut encore bien remarquer que pour toute la surface libre du toit et du mur (le sol) les tensions σ_y autant que σ_z sont nulles.

Quand on s'éloigne de la surface d'une petite distance, on doit ajouter ou soustraire de σ_z calculé le poids de la pierre supportée. Abstraction a été faite dans le calcul de l'action de la gravité autour du vide, nous n'avons tenu compte que de la pression uniforme p. Mais on se rendra compte que comparée aux tensions au bord du vide, cette influence de la pesanteur est négligeable, elle l'est plus que dans l'exemple du tunnel de section circulaire où nous l'avons exprimée en formule.

Nous nous proposons de traiter dans une étude suivante l'action du remblai et des divers soutènements sur la pression du toit sur le bord de la veine de charbon et d'indiquer la distribution générale des tensions après dislocation de la masse rocheuse brisée et de nous approcher ainsi des phenomènes réels qui se manifestent dans les travaux souterrains d'une mine de charbon.

Physics. — *Remarks on the paper of* V. ZWETKOFF, *„Ueber die Lichtzerstreuung in anisotropen Flüssigkeiten". Acta Physicochimica U.R.S.S. Vol. IX, 1938, p. 111.* By L. S. ORNSTEIN and W. DE BRAAF.

(Communicated at the meeting of January 28, 1939.)

We should like to make some remarks on the important paper of ZWETKOFF.

1. On page 114 the author says that our work shows an increase of the dipolarisation in a magnetic field. However, we have not specially measured the dipolarisation and only mentioned that its existence can cause an error in the measurement of the transmission (p. 442 Kolloidbeihefte). ZWETKOFF proves by his measurements that the dipolarisation for the transmitted light diminishes strongly when the magnetic field is strengthened. This phenomenon can be explained by the swarm hypothesis. If the swarms occur in all possible orientations, the anisotropy of the swarms will cause scattering by reflection and double refraction; at the same time strong polarisation effects will set in, as the beams in the swarms will show directions of polarisation which are given by pseudocrystalline structure. If now a magnetic field produces orientation of the swarms, the difference in refractive index of neighbouring swarms is diminishing and so the polarisation effects are diminished at the same time as the scattering. The way in which the dipolarisation depends on the field can be calculated from the swarm theory. It would be most interesting if this quantity was measured for different wavelengths; the curves obtained would form a group with the quantity $n_e - n_o$ as a parameter.

2. ZWETKOFF remarks that our conception of the effect of strong fields is wrong. We agree with him that his measurements make sure that no orientation of the particles in the swarms occurs in strong fields. He ascribes the phenomenon to orientation of the layers at the walls; we fully agree with this assumption.

3. In a second paper he discusses the dipolarisation of the light scattered in high fields. The fact that dipolarisation occurs for the light scattered by the isotropic phase leads him to the supposition that the molecules show anisotropy. Now it is a well-known fact that substances which show a nematic phase ought to be oblongated. The strong dipolarisation in the nematic phase for strong fields is partly due to that of light