JEFFREYS, H., The Earth. Cambridge, 1924.
———, The Earth. 2nd edition. Cambridge, 1929.
KENNEDY, W. G. and E. M. ANDERSON, Crustal layers and the Origin of Magmas. Bull. volcanologique, Série II, tome III, 24—82. Napoli, 1938.
KRÜMMEL, O., Handbuch der Ozeanographie, Bd. I. Stuttgart, 1907.
LITTLEHALES, G. W., The configuration of the Oceanic Basins. In: Physics of the Earth. V: Oceanography, pp. 13—46. Bull. Nat. Research Council. Nr. 85. Washington, 1932.
NIGGLI, P., Die leichtflüchtigen Bestandteile im Magma. Leipzig, 1920.
PENCK, A., Morphologie der Erdoberfläche. I. Stuttgart, 1894.
PICKERING, W. H., The Place of Origin of the Moon. The Volcanic Problem. Journ. Geol., **15**, 23—28. Chicago, 1907.
PROCTOR, R. A., The Moon. London, 1873.
RITTMANN, A., Ueber die Herkunft der Vulkanischen Energie und die Entstehung des Sials. Geol. Rundschau, Bd. **30**, Heft 1/2, 52—60. Stuttgart, 1939.
TAYLOR, F. B., Bearing of the Tertiary Mountain Belt on the Origin of the Earth's plan. Bull. Geol. Soc. Am., XXI, 179—226 (1910).
WASHINGTON, H. S., The Chemical Composition of the Earth. American Journ. Science, 5th series, **9**, Nr. 53, 351—378 (1925).
WEGENER, A., Die Entstehung der Kontinente. Geol. Rundschau, Bd. **3**, Heft 4, 276—292 (1912).
———, Die Entstehung der Kontinente und Ozeane. 4. Auflage. Braunschweig, 1929.
WRIGHT, F. E., The Surface Features of the Moon. The Scientific Monthly, **40**, 101—105. February 1935.

Mathematics. — *Neue Erweiterungs- und Ueberführungssätze.* By HANS FREUDENTHAL. (Communicated by Prof. L. E. J. BROUWER.)

(Communicated at the meeting of January 28, 1939.)

Die im Folgenden mitgeteilten Begriffsbildungen und Ergebnisse ermöglichen eine sehr weitgehende Verallgemeinerung der Hopfschen Erweiterungs- und Ueberführungssätze und gewisser von L. PONTRJAGIN [1]) und H. WHITNEY [2]) angekündigten Sätze.

1. Sei f eine Abbildung der orientierten e-dimensionalen Sphäre S^e in die orientierte d-dimensionale Sphäre S^d. *Hypergrad* (genauer (d^e)-Hypergrad) von f heiszt das durch f bestimmte Element der Homotopiegruppe (d^e) [3]). Ist t^e ein e-dimensionales Simplex, dessen Rand in den Nordpol von S^d abgebildet ist, so definiert man in naheliegender Weise für diese Abbildung einen Hypergrad.

2. Ist P ein Polytop, so sei P^m das Polytop, das aus den höchstens m-dimensionalen Simplexen von P besteht.

3. Auf dem Teilpolytop Q von P sei eine Abbildung $f(Q) \supset S^d$ gegeben; f sei fortsetzbar auf $Q \vee P^{r-1}$ zu einer Abbildung F. Der Komplex, der angibt [4]), mit welchem Hypergrad die Randsphäre eines beliebigen r-dimensionalen Simplexe t^r durch F in die S^d abgebildet wird, heiszt das r-dimensionale *Hindernis* von F. Verschwinden des r-dimensionalen Hindernisses bedeutet Fortsetzbarkeit von F auf $Q \vee P^r$.

4. Das r-dimensionale Hindernis ist ein oberer Zyklus. Man kann es durch jeden in $P \setminus Q$ homologen Zyklus ersetzen, wenn man F unter Aufrechterhaltung von f geeignet abändert. Umgekehrt entspricht, falls $Q \supset P^{r-2}$, einer Abänderung von F unter Aufrechterhaltung von f eine Abänderung des r-dimensionalen Hindernisses in ein (in $P \setminus Q$) homologes. — Diese Tatsachen hat unabhängig auch Herr S. EILENBERG entdeckt, wie er mir schriftlich mitteilt [5]).

5. Sei $Q \supset P^q$ und $f(P^{q-1}) =$ Nordpol (das letzte bedeutet für $q \leq d$ keine wesentliche Einschränkung). Früher von uns gebrauchte Bezeichnungen verallgemeinernd nennen wir $S^d f^q$ den Komplex, der angibt, mit welchem Hypergrad jedes t^q in die S^d abgebildet ist. Notwendig und hin-

[1]) C. R. Paris, **206**, 1436—1438 (1938).
[2]) Proc. Nat. Acad., **23**, 285—291, speziell 285 (1937).
[3]) Wegen aller Bezeichnungen vergl. man: Verf., Compositio Math., **5**, 299—314 (1937).
[4]) Ein Komplex läszt sich bekanntlich als eine Funktion auffassen.
[5]) Erscheint demnächst in den C. R. Paris.

reichend für die Fortsetzbarkeit von f auf $Q_v P^{q+1}$ ist, dasz $S^d f^q$ ein oberer Zyklus ist.

6. Sei $Q = P^q$ und $f(P^{q-1}) =$ Nordpol, ferner f fortsetzbar auf P^{q+1}. Dann ist für jedes $r < 2q$ das r-dimensionale Hindernis (bei beliebiger Fortsetzung) nullhomolog, d.h. dann ist f auch auf P^{2q-1} fortsetzbar. Noch mehr: Sei $Q = P^{q'}$ $(q' \geqq q)$ und $f(P^{q-1}) =$ Nordpol, ferner f fortsetzbar auf $P^{q'+1}$. Dann ist für alle $r < 2q$ das r-dimensionale Hindernis nullhomolog, d.h. dann ist f auch auf P^{2q-1} fortsetzbar.

7. Beim $2q$-dimensionalen Hindernis will ich mich auf den Fall $q = d$ beschränken ($q > d$ erfordert eine Verallgemeinerung der Hopfschen Invariante, auf die ich hier nicht eingehen will). Setzen wir $z = S^d f^d$, so haben wir: Sei $Q \supset P^d$ und f fortsetzbar auf P^{d+1} (also z ein oberer Zyklus). Dann ist das $2d$-dimensionale Hindernis homolog $z \cdot z$ mod $(d^{2d-1})_0$ (d.h. wenn man Elemente von (d^{2d-1}) mit der Hopfschen Invariante 0 wie 0 behandelt, was für $d = 2$ sicher keine Einschränkung bedeutet). Die Multiplikation der Koeffizientenbereiche ist dabei in naheliegender Weise zu definieren.

8. Auf Grund dieser Sätze läszt sich das Erweiterungsproblem für $r \leqq 2d$ und das Ueberführungsproblem für $r < 2d$ vollständig lösen [6]). Wir verzichten auf die explizite Formulierung des Ergebnisses und begnügen uns mit der Angabe folgenden Satzes: Die Borsuksche Gruppe G [7]) der Abbildungen $f(P^{2d-2}) \subset S^d$ besitzt eine absteigende Folge von Untergruppen

$$G = G^{2d-2} \supset \ldots \supset G^q \supset \ldots \supset G^0 = (0)$$

mit den Faktorgruppen

$$G^q / G^{q-1},$$

die isomorph sind den oberen Bettischen Gruppen der Dimension q von P^{2d-2} mit den Koeffizientenbereichen (d^q).

9. Schlieszlich erwähnen wir noch, dasz aus **6** und **7** sehr einfach die Existenz von Elementen mit der Hopfschen Invariante eins in allen Gruppen (d^{2d-1}) (d gerade) folgt. Man nehme nur als P den projektiven Raum mit d komplexen Dimensionen, als Q einen projektiven Unterraum mit $\frac{1}{2}d$ komplexen Dimensionen, bilde Q mit dem Grad eins in die S^d ab, setze die Abbildung fort, wobei man das $2d$-dimensionale Hindernis in ein einziges t^{2d} konzentriere; dann besitzt die Abbildung der Randsphäre dieses t^{2d} die Hopfsche Invariante eins.

10. Der Beweis von **6** erfordert eine recht mühselige explizite Konstruktion der gesuchten Erweiterung. Dagegen ist **7** sehr einfach zu beweisen nach Definition der Hopfschen Invariante für Abbildungen von Simplexen auf Sphären.

---

[6]) genauer: auf die Kenntnis der Gruppen (d^r) (für $r < 2d$) zurückführen.
[7]) C. R. Paris, **202**, 1400—1403 (1936).

Mathematics. — *Integraldarstellungen* WHITTAKER*scher Funktionen*. (Fortsetzung). Von C. S. MEIJER. (Communicated by Prof. J. G. VAN DER CORPUT).

(Communicated at the meeting of January 28, 1939.)

§ 1. In einer früheren Arbeit [1]) habe ich bewiesen, dass die bekannten Relationen

$$W_{k,m}(z) = -\frac{\Gamma(\frac{1}{2}+m+k)\, e^{-\frac{1}{2}z} z^k}{2\pi i} \int_{\infty e^{i\tau}}^{(0+)} e^{-u} \left(1+\frac{u}{z}\right)^{k-m-\frac{1}{2}} (-u)^{-k-m-\frac{1}{2}}\, du \quad (1)$$

und

$$W_{k,m}(z) = \frac{e^{-\frac{1}{2}z} z^k}{\Gamma(\frac{1}{2}-m-k)} \int_0^{\infty e^{i\tau}} e^{-u} \left(1+\frac{u}{z}\right)^{k-m-\frac{1}{2}} u^{-k-m-\frac{1}{2}}\, du, \quad . \quad . \quad (2)$$

wo

$$z \neq 0, \ |\arg z| < \tfrac{3}{2}\pi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

und

$$\operatorname{Max}(-\tfrac{1}{2}\pi, -\pi + \arg z) < \tau < \operatorname{Min}(\tfrac{1}{2}\pi, \pi + \arg z), \quad . \quad . \quad (4)$$

Spezialfälle von

$$W_{k,m}(z) = -\frac{\Gamma(1-\beta)\, e^{-\frac{1}{2}z} z^k}{2\pi i} \int_{\infty e^{i\tau}}^{(0+)} e^{-u} F(\tfrac{1}{2}+m-k, \tfrac{1}{2}-m-k; \beta; -u/z)(-u)^{\beta-1}\, du \quad (5)$$

bezw.

$$W_{k,m}(z) = \frac{e^{-\frac{1}{2}z} z^k}{\Gamma(\beta)} \int_0^{\infty e^{i\tau}} e^{-u} F(\tfrac{1}{2}+m-k, \tfrac{1}{2}-m-k; \beta; -u/z)\, u^{\beta-1}\, du \quad (6)$$

sind [2]).

---

[1]) Ueber die Integraldarstellungen der WHITTAKERschen Funktion $W_{k,m}(z)$ und der HANKELschen und BESSELschen Funktionen. Nieuw Archief voor Wiskunde, (2) **18**, (2tes Heft), 35—57 (1934).

[2]) In (1) wird $\frac{1}{2}+m+k \neq 0, -1, -2, \ldots.$, in (2) $\Re(\frac{1}{2}-m-k) > 0$ vorausgesetzt; in (5) ist β eine beliebige Zahl mit $\beta \neq 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$, in (6) ist β beliebig mit $\Re(\beta) > 0$. Die Relationen (5) und (6) gehen für $\beta = \frac{1}{2}-m-k$ in (1) bezw. (2) über.