Fur $\lambda = \frac{1}{2} m - \frac{1}{2} k + \frac{1}{2}$ geht (16) infolge (8) in

$$W_{k,m}(z) = 2^{-2k+\frac{1}{2}} z^{-k+\frac{1}{2}} \int\limits_0^\infty e^{-\frac{1}{2} z \cosh 2t} P^{2k+\frac{1}{2}}_{2m-\frac{1}{2}} (\cosh t) (\sinh t)^{-2k+\frac{1}{2}} \, dt \quad . \quad . \quad (20)$$

über. Auf analoge Weise liefert (17) mit $\lambda = \frac{1}{2} m - \frac{1}{2} k + 1$

$$W_{k,m}(z) = 2^{-2k+3/2} z^{-k+3/2} \int\limits_0^\infty e^{-\frac{1}{2} z \cosh 2t} P^{2k-\frac{1}{2}}_{2m-\frac{1}{2}} (\cosh t) (\sinh t)^{-2k+3/2} \cosh t \, dt; \quad (21)$$

ebenso (18) mit $\alpha = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} m$

$$W_{k,m}(z) = 2z \int\limits_0^\infty e^{-\frac{1}{2} z \cosh 2t} P^{k}_{m-\frac{1}{2}} (\cosh 2t) (\sinh t)^{1-k} (\cosh t)^{1+k} \, dt. \quad . \quad . \quad (22)$$

Aus

$$K_\nu(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} \, W_{0,\nu}(2z)$$

und (19) mit $k = 0$ folgt endlich

$$K_\nu(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \, z^{\nu+2\alpha} \int\limits_0^\infty e^{-z \cosh v} P^{\frac{1}{2}-\nu-2\alpha}_{\nu-\frac{1}{2}} (\cosh v) (\sinh v)^{\nu+2\alpha+\frac{1}{2}} \, dv. \quad (23)$$

Die Integraldarstellungen (20), (21), (22) und (23) kommen auch in der ersten Mitteilung vor, und zwar — ebenso wie in der vorliegenden Mitteilung — als Spezialfälle allgemeinerer Beziehungen [13]).

Formel (23) ist auch von MACROBERT [14]) abgeleitet worden.

[13]) Man vergl. loc. cit. [3]), 1100 und 1102 (das letzte Alinea von § 4).

[14]) T. M. MACROBERT, Derivation of LEGENDRE function formulae from BESSEL function formulae. Philosophical Magazine, (7) **21**, 697—703 (1936), Formel (12*a*).

Mathematics. — *Sur un type d'inégalités diophantiennes.* Par JEAN TEGHEM. (Communicated by Prof. J. G. VAN DER CORPUT.)

(Communicated at the meeting of January 28, 1939.)

A. M. J. F. KOKSMA a recherché des conditions suffisantes pour que des inégalités diophantiennes du type

$$0 < f(x) < \frac{C}{x^\lambda} \qquad (mod.\ 1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

aient une infinité de solutions entières, $f(x)$ désignant un polynôme en x, C une constante réelle ≤ 1, et λ un nombre réel positif [1]). Il a trouvé des résultats fort généraux quant à la nature des coefficients du polynôme $f(x)$. Ne considérons ici que le cas simple où le coefficient de la plus haute puissance de $f(x)$ est un nombre *irrationnel quadratique*. M. KOKSMA donne, pour ce cas, le résultat suivant.

Théorème 1. *Soit $f(x)$ un polynôme de degré k quelconque, dont le coefficient de la plus haute puissance est un nombre irrationnel quadratique. Il suffit alors qu'on ait*

$$\lambda < \frac{1}{3 \cdot 2^{k-1} - 1}$$

pour que l'inégalité (1) ait une infinité de solutions entières positives.

Nous allons renforcer ce résultat par les deux théorèmes suivants.

Théorème 2. *Soit $f(x)$ un polynôme de degré $k \geqq 2$, dont le coefficient de la plus haute puissance est un nombre irrationnel quadratique. Il suffit alors qu'on ait*

$$\lambda < \frac{1}{2^{k-1}}$$

pour que l'inégalité (1) ait une infinité de solutions entières positives.

Théorème 3. *Soit $f(x)$ un polynôme de degré $k \geqq 14$, dont le coefficient de la plus haute puissance est un nombre irrationnel quadratique. Il suffit alors qu'on ait*

$$\lambda < \frac{2}{k^3 (\log k (k-1) + \frac{5}{2} \log \log k (k-1))}$$

pour que l'inégalité (1) ait une infinité de solutions entières positives.

[1]) J. F. KOKSMA, Over Stelsels diophantische Ongelijkheden. Thèse de doctorat, Groningue, 1930.

Dans les cas où les deux théorèmes 2 et 3 sont applicables, le dernier est le plus fort.

Ce théorème 3 n'est qu'un corollaire du premier cas envisagé dans le théorème suivant.

Théorème 4. *Soit $f(x)$ un polynôme de degré $k \geqq 14$, dont le coefficient de la plus haute puissance est un nombre irrationnel α. Associons à chaque nombre naturel X suffisamment grand les deux nombres naturels q et q', définis de la façon suivante: $\frac{p}{q}$ est la première réduite de α pour laquelle on a $q \geqq X$; $\frac{p'}{q'}$ est la réduite précédant immédiatement $\frac{p}{q}$ (on a $q' < X$).*

1⁰. *Supposons qu'on ait*

$$\lim_{X\to\infty} \inf \frac{\log X}{\log q} \geqq \frac{1}{k-1}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Il suffit alors qu'on ait

$$\lambda < \frac{2}{k^3\,(\log k\,(k-1) + \frac{5}{2}\log\log k\,(k-1))}$$

pour que l'inégalité (1) ait une infinité de solutions entières positives.

2⁰. *Supposons que la relation (2) ne soit pas vérifiée, mais que soit vérifiée la relation*

$$\lim_{X\to\infty} \inf \frac{\log X}{\log q} \geqq \frac{1}{k-\tau}, \quad \text{avec} \quad 0 < \tau < 1. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Il suffit alors qu'on ait

$$\lambda < \frac{2\tau}{k^3\left(1 + \frac{5}{2}\frac{\log\log k^2}{\log k^2}\right)\log\frac{k^2}{\tau}}$$

pour que l'inégalité (1) ait une infinité de solutions entières positives.

3⁰. *Supposons que la relation (3) ne soit pas vérifiée. Il suffit alors que l'on ait*

$$\lambda < \frac{1}{k^3} \lim_{X\to\infty} \inf \frac{\log q'}{\log X}$$

pour que l'inégalité (1) ait une infinité de solutions entières positives.

Nous établirons également les propriétés suivantes:

Théorème 5. *Si les conditions énoncées dans le théorème 2 sont remplies, alors à tout nombre*

$$s > 2^{k-1}\lambda$$

correspond une constante positive C, ne dépendant que de s, telle que tout intervalle $(a, a + Ca^s)$, où a désigne un nombre naturel, contienne au moins une solution entière de l'inégalité (1).

Théorème 6. *Si les conditions énoncées dans le théorème 3 sont remplies, alors à tout nombre*

$$s > \frac{\lambda k^3}{2}(\log k\,(k-1) + \tfrac{5}{2}\log\log k\,(k-1))$$

correspond une constante positive C, ne dépendant que de s, telle que tout intervalle $(a, a + Ca^s)$ contienne au moins une solution entière de l'inégalité (1).

Théorème 7. 1⁰. *Si les conditions 1⁰. du théorème 4 sont remplies, alors à tout nombre*

$$s > \frac{\lambda k^3}{2}(\log k\,(k-1) + \tfrac{5}{2}\log\log k\,(k-1))$$

correspond une constante positive C, ne dépendant que de s, telle que tout intervalle $(a, a + Ca^s)$ contienne au moins une solution entière de l'inégalité (1).

2⁰. *Si les conditions 2⁰. du théorème 4 sont remplies, alors à tout nombre*

$$s > \frac{\lambda k^3}{2\tau}\left(1 + \frac{5}{2}\frac{\log\log k^2}{\log k^2}\right)\log\frac{k^2}{\tau}$$

correspond une constante positive C, ne dépendant que de s, telle que tout intervalle $(a, a + Ca^s)$ contienne au moins une solution entière de l'inégalité (1).

3⁰. *Si les conditions 3⁰. du théorème 4 sont remplies, alors à tout nombre*

$$s > \frac{\log k + \frac{5}{2}\log\log k}{2}$$

correspond une constante positive C, ne dépendant que de s, telle que tout intervalle $(a, a + Ca^s)$ contienne au moins une solution entière de l'inégalité (1).

Nous allons démontrer ces différentes affirmations en nous basant sur le théorème fondamental suivant, dû à M. VAN DER CORPUT [2]).

Théorème fondamental. *Soit S une suite d'intervalles $a \leqq x < b$, où a et b sont des nombres entiers tels qu'on ait $a < b$. Soient associés à chacun de ces intervalles deux nombres réels α et β tels qu'on ait*

$$\alpha < \beta \leqq \alpha + 1,$$

[2]) J. F. KOKSMA, Ouvrage cité, p. 6.

et une fonction réelle $f(x)$*, définie en toutes les valeurs entières* x*, situées dans les intervalles de* S*. Soit*

$$T(c) = \sum_h{}' \left| \frac{1}{b-a} \sum_{x=a}^{b-1} e^{2\pi i h f(x)} \right|,$$

où la somme $\sum_h{}'$ *est étendue à toutes les valeurs entières* h *non nulles, telles qu'on ait*

$$|h| < \frac{c}{\beta - \alpha} \log \frac{2}{\beta - \alpha}.$$

Soit $A_4(a, b)$ *le nombre de valeurs entières* x*, situées dans l'intervalle* $a \leq x < b$*, et qui sont solutions de l'inégalité diophantienne*

$$\alpha < f(x) < \beta \quad (\text{mod. } 1). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Si pour toute valeur fixe et positive de c*, la quantité* $T(c)$ *tend vers 0 quand l'intervalle* $a \leq x < b$ *parcourt* S*, alors*

$$\frac{A_4(a, b)}{(b-a)(\beta-\alpha)} \rightarrow 1. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Nous utiliserons, dans l'application de ce théorème fondamental, deux théorèmes sur les sommes DE WEYL, dûs à M. VINOGRADOFF.[3) et 4)] Citons les comme lemmes.

Lemme 1. *Soient* P *un nombre entier,* X *un nombre naturel, et* $f(x)$ *un polynôme de degré* $k \geq 2$*, dont le coefficient de la plus haute puissance est le nombre irrationnel* $\frac{\alpha}{k!}$*. Soit* $\frac{p}{q}$ *une quelconque des fractions irréductibles, à dénominateur positif, telles qu'on ait.*

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{\sigma}{q^2},$$

σ *désignant un nombre* ≥ 1*. On peut, sous ces conditions, associer à tout nombre positif* ε *un nombre* c_1*, dépendant seulement de* ε *et* k*, et tel qu'on ait, pour tout nombre naturel* H*,*

$$\sum_{h=1}^{H} \left| \sum_{x=P+1}^{P+X} e^{2\pi i h f(x)} \right| < c_1 H^{1+\varepsilon} X^{1+\varepsilon} (H^{-1} X^{1-k} + q^{-1})^{\frac{1}{2^{k-1}}} (\sigma + qX^{-1})^{\frac{1}{2^{k-1}}}.$$

Lemme 2. *Soit* k *un nombre entier* ≥ 14*,* P *un nombre entier quelconque,*

3) J. G. VAN DER CORPUT, Sur la méthode DE WEYL dans la théorie des nombres. II. Proc. Kon. Akad. v. Wetensch., Amsterdam, **40**, 761 (1937).

4) I. M. VINOGRADOFF, Travaux de l'Institut Math. Stekloff, Ac. Sc. U.R.S.S., X, 93 (1937).

X *et* m *des nombres naturels,* $f(x)$ *un polynôme de degré* k*,* a_0 *le coefficient de la plus haute puissance de ce polynôme, et* $\frac{p}{q}$ *une fraction irréductible telle que*

$$\left| a_0 - \frac{p}{q} \right| \leq \nu q^{-2}, \quad \text{avec} \quad \nu \geq 1$$

1⁰. Soient

$$1 \leq q \leq c_2 X \quad \text{et} \quad m\nu \leq c_3 q^{\frac{1}{k^3}},$$

où c_2 *et* c_3 *sont des nombres positifs quelconques. On a alors*

$$\left| \sum_{x=P+1}^{P+X} e^{2\pi i m f(x)} \right| \leq c_4 X q^{-\varrho},$$

où c_4 *est un nombre positif ne dépendant que de* k*,* c_2 *et* c_3*, et où*

$$\varrho = \frac{2}{k^3 (\log k + \frac{5}{2} \log \log k)}.$$

2⁰. Soient

$$\frac{1}{c_5} X \leq q \leq c_6 X^{k-1} \quad \text{et} \quad m\nu \leq c_7 X^{\frac{1}{k^3}},$$

où c_5*,* c_6 *et* c_7 *désignent des nombres positifs quelconques. On a alors*

$$\left| \sum_{x=P+1}^{P+X} e^{2\pi i m f(x)} \right| \leq c_8 X^{1-\varrho},$$

où c_8 *est un nombre positif ne dépendant que de* c_5*,* c_6*,* c_7 *et* k*, et où*

$$\varrho = \frac{2}{k^3 (\log k\mu + \frac{5}{2} \log \log k\mu)}, \quad \text{avec}$$

$$\mu = \frac{\log q}{\log X}.$$

3⁰. Soient

$$\frac{1}{c_9} X^{k-1} \leq q \leq c_{10} X^{k-\tau} \quad \text{et} \quad m\nu \leq c_{11} X^{\frac{\tau}{k^3}},$$

où c_9*,* c_{10} *et* c_{11} *sont des nombres positifs quelconques,* τ *étant un nombre positif, inférieur à 1. On a alors*

$$\left| \sum_{P+1}^{P+X} e^{2\pi i m f(x)} \right| \leq c_{12} X^{1-\varrho},$$

où c_{12} est un nombre positif ne dépendant que de c_9, c_{10}, c_{11}, k et τ, et où

$$\varrho = \frac{2\tau}{k^3\left(1+\frac{5}{2}\,\frac{\log\log k^2}{\log k^2}\right)\log\frac{k^2}{\tau}}.$$

Démonstration des théorèmes 2 et 5. Désignons par $\frac{\alpha}{k!}$ le coefficient de la plus haute puissance de $f(x)$. Choisissons un nombre s supérieur à $2^{k-1}\lambda$, mais inférieur à 1. Désignons par a et b des nombres naturels tels qu'on ait

$$a < b, \qquad a \to \infty, \qquad \frac{b-a}{a^s} \to 1 \qquad \left(\text{donc } \frac{b}{a} \to 1\right).$$

Considérons la suite des intervalles $a \leq x < b$, et l'inégalité diophantienne

$$0 < f(x) < \frac{C}{b^\lambda} \quad (\mathit{mod.}\ 1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Toute solution positive et entière de (6), inférieure à b, est solution de (1). Considérons la valeur $T(c)$ correspondant à l'inégalité (6). Le lemme 1 donne

$$T(c) < c_{13}(b-a)^\varepsilon (b^\lambda \log b^\lambda)^{1+\varepsilon}\{(b^\lambda \log b^\lambda)^{-1}(b-a)^{1-k} + q^{-1}\}^{\frac{1}{2^{k-1}}}\{1+q(b-a)^{-1}\}^{\frac{1}{2k-1}},$$

où ε, c_{13} et q désignent respectivement un nombre positif quelconque, un nombre positif ne dépendant que de ε et k, et le dénominateur d'une réduite quelconque de α. Désignons par $a_0, a_1, \ldots$ les quotients incomplets du développement en fraction continue de α, et par $q_0, q_1, \ldots$ les dénominateurs des réduites de α. Ces nombres sont liés par la relation bien connue

$$q_m = a_m q_{m-1} + q_{m-2} \quad (m = 2, 3, \ldots) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Mais α est un nombre irrationnel quadratique. La suite $a_0, a_1, \ldots$ est donc périodique, et il existe par conséquent un nombre A, dépendant de α, mais non de m, tel qu'on ait

$$1 + a_m \leqq A \qquad (m = 1, \ldots).$$

Nous pouvons donc déduire de (7) que

$$q_m \leqq a_m q_{m-1} + q_{m-1} \leqq A\, q_{m-1} \, . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Soit $\frac{p}{q}$ la première réduite de α, telle qu'on ait

$$q \geqq b - a,$$

et soit $\frac{p'}{q'}$ la réduite précédente. Nous avons

$$q' < b - a \leqq q,$$

d'où, en vertu de (8),

$$b - a \leqq q < A\,(b-a).$$

Nous avons donc

$$T(c) < c_{14}\,(b-a)^{\varepsilon - \frac{1}{2^{k-1}}}(b^\lambda \log b)^{1+\varepsilon}$$

c_{14} désignant un nombre positif, qui dépend de ε, k, α et λ. Il résulte de là qu'on a

$$T(c) < c_{15}\, a^{\left(\varepsilon - \frac{1}{2^{k-1}}\right)s + (\lambda+\delta)(1+\varepsilon)},$$

où δ désigne un nombre positif arbitrairement petit. Nous pouvons fixer δ et ε suffisamment petits pour que l'exposant de a soit négatif. $T(c)$ tend donc vers 0 quand l'intervalle $a \leq x < b$ parcourt la suite choisie. Les propriétés annoncées sont par conséquent démontrées, en vertu du théorème fondamental.

Démonstration des théorèmes 4 et 7. 1°. Soit s un nombre inférieur à 1 et supérieur à

$$\frac{\lambda k^3}{2}\left(\log k\,(k-1) + \tfrac{5}{2}\log\log k\,(k-1)\right).$$

Choisissons une suite d'intervalles $a \leqq x < b$, où a et b désignent des nombres naturels tels qu'on ait

$$a < b, \qquad a \to \infty, \qquad \frac{b-a}{a^s} \to 1 \quad \left(\text{donc } \frac{b}{a} \to 1\right).$$

De la relation

$$\log k\,(k-1) + \tfrac{5}{2}\log\log k\,(k-1) > 2\log 13 + \tfrac{5}{2}\log(2\log 13) > 2$$

et du choix de s résulte qu'il existe un nombre positif δ_1 tel qu'on ait

$$\lambda + \delta_1 < \frac{s}{k^3}.$$

Il existe donc un nombre positif c_{16} tel qu'on ait, pour tous les intervalles $a \leqq x < b$,

$$b^\lambda \log b^\lambda \leqq c_{16}\,(b-a)^{\frac{1}{k^3}}.$$

Supposons que X prenne les valeurs $(b-a)$. Du choix de q et de (2) résulte qu'il existe une constante positive c_{17} telle qu'on ait

$$b - a \leqq q \leqq c_{17}\,(b-a)^{k-1}.$$

Le cas 2⁰. du lemme 2 montre donc que la valeur $T(c)$ associée à l'inégalité

$$0 < f(x) < \frac{C}{b^{\lambda}} \quad (mod.\ 1)$$

est bornée par

$$c_{18}\, a^{\lambda + \delta_2 - \frac{2s}{k^3(\log k(k-1) + {}^5/_2 \log\log k(k-1))}},$$

où δ_2 désigne un nombre positif arbitrairement petit. Il est possible de choisir δ_2 suffisamment petit pour que l'exposant de a soit négatif. Il en résulte que $T(c) \to 0$ et les affirmations énoncées dans les cas 1⁰. en découlent immédiatement.

2⁰. La même démonstration conduit aux affirmations énoncées dans les cas 2⁰.

3⁰. Soit s un nombre supérieur à

$$\frac{\log k + \frac{5}{2} \log\log k}{2}.$$

Choisissons une suite d'intervalles $a \leqq x < b$, où a et b sont des nombres naturels tels qu'on ait

$$a < b, \quad a \to \infty, \quad \frac{b-a}{a^s} \to 1 \quad \left(\text{donc } \frac{b}{a^s} \to 1 \text{ et } \frac{b-a}{b} \to 1\right).$$

Supposons que X prenne les valeurs $(b-a)$. Du choix de λ et de la relation $\frac{b-a}{b} \to 1$ résulte qu'il existe un nombre positif c_{19} tel qu'on ait

$$b^{\lambda} \log b^{\lambda} \leqq c_{19}\, q'^{\frac{1}{k^3}}.$$

Du choix de q' résulte qu'on a

$$1 \leqq q' < b-a.$$

Le cas 1⁰. du lemme 2 montre donc que la valeur $T(c)$ associée à l'inégalité

$$0 < f(x) < \frac{c}{b^{\lambda}} \quad (mod.\ 1)$$

est bornée par

$$c_{20}\, a^{\lambda+\delta_3} - \frac{2s\lambda}{\log k + \frac{5}{2}\log\log k},$$

où δ_3 désigne un nombre positif arbitrairement petit. $T(c)$ tend donc vers 0 et les théorèmes 4 et 7 sont donc complètement démontrés.

Démonstration des théorèmes 3 et 6. Nous savons qu'il existe une constante positive A telle qu'on ait

$$X \leqq q < AX$$

(voir la démonstration des théorèmes 2 et 5).

Il en résulte qu'on a

$$\lim_{X\to\infty} \frac{\log X}{\log q} = 1.$$

Nous nous trouvons donc dans les conditions du cas 1⁰. des théorèmes 4 et 7. Les théorèmes 3 et 6 sont donc démontrés.

Remarques. 1. Ces différents théorèmes sont également valables pour l'inégalité diophantienne

$$1 - \frac{C}{x^{\lambda}} < f(x) < 1 \quad (mod.\ 1). \quad \ldots \ldots \quad (9)$$

2. Désignons respectivement par $N_1(X)$ et $N_9(X)$ les nombres de solutions positives et entières de (1) et (9), inférieures au nombre naturel X. Si nous nous trouvons dans les conditions du théorème 2 ou du théorème 3 ou encore des cas 1⁰. et 2⁰. du théorème 4, alors nous avons

$$\lim_{X\to\infty} \frac{N_1(X)(1-\lambda)}{X^{1-\lambda}} = \lim_{X\to\infty} \frac{N_9(X)(1-\lambda)}{X^{1-\lambda}} = 1.$$

Ces relations se démontrent aisément au moyen de la formule (5), en considérant les inégalités diophantiennes

$$0 < f(x) < \frac{C}{a^{\lambda}} \qquad (mod.\ 1),$$

$$0 < f(x) < \frac{C}{b^{\lambda}} \qquad (mod.\ 1).$$

B. Le théorème fondamental permet également l'étude de l'inégalité diophantienne (1), dans des cas où la fonction $f(x)$ n'est pas un polynôme. Considérons par exemple le cas où $f(x) = x^{\alpha} \log x$, α étant un nombre positif quelconque. Nous pouvons établir alors le théorème suivant.

Théorème 8. *Soit C une constante positive $\leqq 1$, soit α une constante positive $\geqq 1$ et soit λ un nombre positif. Il suffit alors qu'on ait* [5])

$$\lambda(2^{[\alpha]+1} - 1) + \alpha - [\alpha] < 1,$$

pour que les inégalités diophantiennes

$$0 < x^{\alpha} \log x < \frac{C}{x^{\lambda}} \quad (mod.\ 1) \quad \ldots \ldots \quad (10)$$

et

$$1 - \frac{C}{x^{\lambda}} < x^{\alpha} \log x < 1 \quad (mod.\ 1) \quad \ldots \ldots \quad (11)$$

[5]) La notation $[\alpha]$ désigne le plus grand nombre entier contenu dans α.

aient chacune une infinité de solutions entières positives. De plus, à tout nombre

$$s > Max\left(2^{[\alpha]}\lambda,\ \frac{\lambda(2^{[\alpha]}-1)-\alpha+[\alpha]+1}{[\alpha]+1}\right)$$

correspond alors une constante positive C *telle que tout intervalle* $(a, a+Ca^s)$, *où* a *désigne un nombre naturel, contienne au moins une solution entière de chacune des inégalités (10) et (11). Les nombres* $N_{10}(X)$ *et* $N_{11}(X)$ *de solutions entières et positives, inférieures au nombre naturel* X, *respectivement de (10) et (11) sont tels qu'on ait*

$$\lim_{X\to\infty}\frac{N_{10}(X)(1-\lambda)}{X^{1-\lambda}} = \lim_{X\to\infty}\frac{N_{11}(X)(1-\lambda)}{X^{1-\lambda}} = 1. \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Nous utiliserons, pour la démonstration, un théorème dû à M. VAN DER CORPUT [6]). Nous le citons comme lemme.

Lemme. *Soient* P *un entier quelconque,* k *un entier* $\geqq 2$, X *un entier* $> k$ *et* r *un nombre positif. Supposons qu'on ait*

$$\Delta^k f(x) \geqq r \quad (x = P+1, \ldots, P+X-k).$$

On a alors

$$\left|\sum_{x=P+1}^{P+X}\right| < 25\,X\,Max.\left\{\left(\frac{r}{R^2}\right)^{-\frac{1}{2^k-2}},\ (rX^k)^{-\frac{1}{2^k-1}},\ \left(\frac{rX}{R}\right)^{-\frac{1}{2^k-1}}\right\},$$

avec

$$R = \frac{\Delta^{k-1}f(P+X-k+1)-\Delta^{k-1}f(P+1)}{X}.$$

Démonstration du théorème 8. Que α soit entier ou non, on a, lorsque a est suffisamment grand,

$$\Delta^{[\alpha]+1}\,h\,f(x) < c_{21}\,h\,a^{\alpha-[\alpha]-1}\log a$$
$$\Delta^{[\alpha]+1}\,h\,f(x) > c_{22}\,h\,b^{\alpha-[\alpha]-1},$$

c_{21} et c_{22} étant des constantes positives. On a donc aussi

$$(b-a)^{-1}\,\{\Delta^{[\alpha]}\,h\,f(b-1-[\alpha])-\Delta^{[\alpha]}\,h\,f(a)\} < c_{21}\,h\,a^{\alpha-[\alpha]-1}\log a.$$

Soit s un nombre inférieur à 1 et supérieur à

$$Max.\left(2^{[\alpha]}\lambda,\ \frac{\lambda(2^{[\alpha]}-1)-\alpha+[\alpha]+1}{[\alpha]+1}\right).$$

[6]) J. G. VAN DER CORPUT, Sur la méthode DE WEYL dans la théorie des nombres. III. Proc. Kon. Akad. v. Wetensch., Amsterdam, **40**, 841 (1937).

Choisissons alors une suite d'intervalles $a \leqq x < b$, avec a suffisamment grand, et telle qu'on ait, lorsque l'intervalle parcourt la suite,

$$a \to \infty \quad , \quad \frac{b-a}{a^s} \to 1 \quad \left(\text{donc } \frac{b}{a} \to 1\right).$$

Considérons la valeur $T(c)$ associée à l'inégalité

$$0 < f(x) < \frac{C}{b^\lambda} \quad (mod.\ 1).$$

On voit facilement, en appliquant le lemme, que $T(c)$ tend vers 0 lorsque l'intervalle $a \leqq x < b$ parcourt la suite choisie. Il existe donc, en vertu du théorème fondamental, une infinité de solutions entières positives de l'inégalité (10). En vertu du même théorème, à tout nombre s choisi comme nous l'avons indiqué, correspond une constante positive C telle que tout intervalle $(a, a+Ca^s)$, où a désigne un nombre naturel, contienne au moins une solution entière de (10).

Ces résultats valent aussi pour l'inégalité (11) car les calculs qui viennent d'être faits pour la fonction $f(x)$ sont valables aussi pour la fonction $f(x)+\frac{C}{x^\lambda}$.

La formule (12) s'obtient encore à partir de la formule (5), par la considération des inégalités diophantiennes

$$0 < f(x) < \frac{C}{b^\lambda} \quad (mod.\ 1),$$

$$0 < f(x) < \frac{C}{a^\lambda} \quad (mod.\ 1).$$

Le théorème 8 est donc démontré.

Exemples. 1. L'inégalité diophantienne

$$0 < x\log x < \frac{1}{x^{\frac{1}{3}-\varepsilon}} \quad (mod.\ 1)$$

a une infinité de solutions entières positives, quel que soit le nombre positif ε, inférieur à $\frac{1}{3}$. De plus, il existe une constante positive C telle que tout intervalle $(a, a+Ca^{\frac{2}{3}})$, où a désigne un nombre naturel, contienne au moins une solution entière.

2. L'inégalité diophantienne

$$0 < x^{\frac{5}{2}}\log x < \frac{1}{x^{\frac{1}{14}-\varepsilon}} \quad (mod.\ 1)$$

a une infinité de solutions entières et positives, quel que soit le nombre positif ε, inférieur à $\frac{1}{14}$. De plus, il existe une constante positive C telle que tout intervalle $(a, a+Ca^{\frac{9}{7}})$, où a désigne un nombre naturel, contienne au moins une solution entière.