with a much smaller abundance than indicated by DEMPSTER. We found the ratio of the intensities of $^{61}Ni : ^{64}Ni$, as 1 : 10.

For nickel is found:

Mass number	58	60	61	62	64
% abundance	68.0	27.2	0.1	3.8	0.9

For Chromium:

The existence of the new isotope of chromium ^{56}Cr is indicated as very probable.

Laboratory "Physica" of the University of Amsterdam.

February 1939.

Mathematics. — *Ueber eine Differentialinvariante zweiter Ordnung der binären kubischen Differentialform.* Von P. G. MOLENAAR. (Communicated by Prof. R. WEITZENBÖCK).

(Communicated at the meeting of February 25, 1939.)

Die binäre kubische Differentialform $f = a^3_{dx}$ besitzt vier relative lineare Differentialkovarianten l, L_1, L_2 und L_3. [1]).

Mit Hilfe der Diskriminante R kann man hieraus absolute Kovarianten formen. Die Rotation dieser Kovarianten erzeugt dann *Differentialinvarianten zweiter Ordnung.*

Auf diese Weise wird hier aus l eine Invariante J^* abgeleitet. $J^* = 0$ ist die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass a^3_{dx} in die Form $K(x_1\, x_2) \cdot \{dx_1^3 + dx_2^3\}$ transformiert werden kann.

Die Differentialkovariante

$$l_{dx} = (\varphi\,\psi)\,(\varphi\, a)^2\,(a\,\alpha)\,\alpha_{dx} - (\varphi\,\alpha)^2\,(\varphi\, a)\,(\psi\, a)\, a_{dx} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

oder

$$l_{dx} = \left(-\, a_{122}\,\alpha_{22}\,\frac{\partial a_{111}}{\partial x_1} + \ldots\right) dx_1 + \left(-\, a_{222}\,\alpha_{22}\,\frac{\partial a_{111}}{\partial x_1} + \ldots\right) dx_2$$

ist vom Gewichte 6.

Die Diskriminante $R = (\alpha\,\beta)^2$ ist ebenfalls vom Gewichte 6.

Der Quotient

$$l^*_{dx} = \frac{l_{dx}}{R} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

ist also eine *absolute* Differentialkovariante. Ihre Rotation

$$J^* = \frac{\partial l_1^*}{\partial x_2} - \frac{\partial l_2^*}{\partial x_1} = \frac{1}{R}\left(\frac{\partial l_1}{\partial x_2} - \frac{\partial l_2}{\partial x_1}\right) - \frac{1}{R^2}\left(l_1\,\frac{\partial R}{\partial x_2} - l_2\,\frac{\partial R}{\partial x_1}\right) . \; . \quad (3)$$

ist daher eine *Differentialinvariante zweiter Ordnung.*

[1]) Vgl. P. G. MOLENAAR, Proc. Kon. Ned. Akad. v. Wetensch., Amsterdam, **42**, 158—166 (1939).

Wegen der wiederholten Differentiation ist es zweckmässig die folgenden Symbole zu gebrauchen:

$$\frac{\partial a_{ikl}}{\partial x_m} = \dot{a}_i\, \dot{a}_k\, \dot{a}_l\, \lambda_m = \dot{b}_i\, \dot{b}_k\, \dot{b}_l\, \mu_m = \ldots = \dot{a}_{ikl}\, \lambda_m = \dot{b}_{ikl}\, \mu_m = \ldots$$

$$\frac{\partial \alpha_{ik}}{\partial x_m} = \dot{\alpha}_i\, \dot{\alpha}_k\, \sigma_m = \dot{\beta}_i\, \dot{\beta}_k\, \tau_m = \dot{\gamma}_i\, \dot{\gamma}_k\, \nu_m = \ldots = \dot{\alpha}_{ik}\, \sigma_m = \dot{\beta}_{ik}\, \tau_m = \dot{\gamma}_{ik}\, \nu_m = \ldots$$

$$\frac{\partial Q_{ikl}}{\partial x_m} = \dot{Q}_i\, \dot{Q}_k\, \dot{Q}_l\, \varrho_m = \dot{Q}_{ikl}\, \varrho_m = \ldots$$

$$\frac{\partial^2 a_{ikl}}{\partial x_m \partial x_n} = \ddot{a}_i\, \ddot{a}_k\, \ddot{a}_l\, \lambda_m\, \lambda_n = \ddot{a}_{ikl}\, \lambda_m\, \lambda_n = \ldots \qquad \text{u. s. w.}$$

Mit dieser Bezeichnung wird z. B.:

$$\alpha_{ik} = (a\, b)^2\, a_i\, b_k \qquad Q_{ikl} = (b\, \alpha)\, b_{ik}\, \alpha_l \qquad (Q\, a)^3 = (b\, \alpha)\, (b\, a)^2\, (\alpha\, a)$$

$$\dot{\alpha}_{ik}\, \sigma_m = (\dot{a}\, b)^2\, \dot{a}_i\, b_k\, \lambda_m + (a\, \dot{b})^2\, a_i\, \dot{b}_k\, \mu_m = (\dot{a}\, b)^2\, (\dot{a}_i\, b_k + \dot{a}_k\, b_i)\, \lambda_m$$

$$\dot{Q}_{ikl}\, \varrho_m = (\dot{b}\, \alpha)\, \dot{b}_{ik}\, \alpha_l\, \mu_m + (b\, \dot{\alpha})\, b_{ik}\, \dot{\alpha}_l\, \sigma_m,$$

also

$$(\dot{Q}\, \dot{a})^3\, (\varrho\, \lambda) = (\dot{b}\, \alpha)\, (\dot{b}\, \dot{a})^2\, (\alpha\, \dot{a})\, (\mu\, \lambda) + (b\, \dot{\alpha})\, (b\, \dot{a})^2\, (\dot{\alpha}\, \dot{a})\, (\sigma\, \lambda) =$$

$$= (\dot{a}\, \alpha)\, (\dot{a}\, \dot{b})^2\, (\alpha\, \dot{b})\, (\lambda\, \mu) - (\dot{a}\, b)^2\, (\dot{a}\, \dot{\alpha})\, (b\, \dot{\alpha})\, (\sigma\, \lambda) =$$

$$= 0 - \tfrac{1}{2}\, (\dot{\beta}\, \dot{\alpha})\, (\dot{\beta}\, \dot{\alpha})\, (\sigma\, \tau) = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

oder nicht-symbolisch:

$$\left(\frac{\partial Q_0}{\partial x_1}\frac{\partial a_3}{\partial x_2} - \frac{\partial Q_0}{\partial x_2}\frac{\partial a_3}{\partial x_1}\right) - 3\left(\frac{\partial Q_1}{\partial x_1}\frac{\partial a_2}{\partial x_2} - \frac{\partial Q_1}{\partial x_2}\frac{\partial a_2}{\partial x_1}\right) +$$

$$+ 3\left(\frac{\partial Q_2}{\partial x_1}\frac{\partial a_1}{\partial x_2} - \frac{\partial Q_2}{\partial x_2}\frac{\partial a_1}{\partial x_1}\right) - \left(\frac{\partial Q_3}{\partial x_1}\frac{\partial a_0}{\partial x_2} - \frac{\partial Q_3}{\partial x_2}\frac{\partial a_0}{\partial x_1}\right) = 0.$$

Mit Hilfe dieser Symbole findet man für (1)

$$l_{dx} = (\dot{a}\, \lambda)\, (\dot{a}\, b)^2\, (b\, \alpha)\, \alpha_{dx} - (\dot{a}\, \alpha)^2\, (\dot{a}\, b)\, (\lambda\, b)\, b_{dx}.$$

Nun ist weiter:

$$(\dot{a}\, \lambda)\, (\dot{a}\, b)^2\, (b\, \alpha)\, \alpha_{dx} =$$

$$= \tfrac{1}{2}\, (\dot{a}\, b)^2\, (\dot{a}\, \lambda)\, (b\, \alpha)\, \alpha_{dx} + \tfrac{1}{2}\, (\dot{a}\, b)^2\, (b\, \lambda)\, (\dot{a}\, \alpha)\, \alpha_{dx} - \tfrac{1}{2}\, (\dot{a}\, b)^2\, (b\, \dot{a})\, (\lambda\, \alpha)\, \alpha_{dx} =$$

$$= \tfrac{1}{2}\, (\dot{a}\, b)^2\, \{(\dot{a}\, \lambda)\, (b\, \alpha) + (b\, \lambda)\, (\dot{a}\, \alpha)\}\, \alpha_{dx} + \tfrac{1}{2}\, (\dot{a}\, b)^3\, (\lambda\, \alpha)\, \alpha_{dx} =$$

$$= \tfrac{1}{2}\, (\dot{\beta}\, \tau)\, (\dot{\beta}\, \alpha)\, \alpha_{dx} + \tfrac{1}{2}\, (\dot{a}\, b)^3\, (\lambda\, \alpha)\, \alpha_{dx} = \tfrac{1}{2}\, (\dot{\alpha}\, \sigma)\, (\dot{\alpha}\, \beta)\, \beta_{dx} + \tfrac{1}{2}\, (\dot{a}\, b)^3\, (\lambda\, \alpha)\, \alpha_{dx}.$$

Da $(a\, \alpha)^2\, a_i \equiv 0\ (i = 1, 2)$, ist ferner

$$(\dot{a}\, \alpha)^2\, (\dot{a}\, b)\, (\lambda\, b)\, b_{dx} = -\, (a\, \dot{\alpha})^2\, (a\, b)\, (\sigma\, b)\, b_{dx} =$$

$$= -\, (a\, \dot{\alpha})\, (\sigma\, \dot{\alpha})\, (a\, b)^2\, b_{dx} + (a\, \dot{\alpha})\, (\sigma\, a)\, (a\, b)\, (\dot{\alpha}\, b)\, b_{dx} =$$

$$= -\, (\beta\, \dot{\alpha})\, (\sigma\, \dot{\alpha})\, \beta_{dx} - \tfrac{1}{2}\, (a\, b)\, (\dot{\alpha}\, a)\, (\dot{\alpha}\, b)\, \{(\sigma\, a)\, b_{dx} - (\sigma\, b)\, a_{dx}\} =$$

$$= -\, (\dot{\alpha}\, \sigma)\, (\dot{\alpha}\, \beta)\, \beta_{dx} + \tfrac{1}{2}\, (\dot{\alpha}\, \beta)^2\, \sigma_{dx},$$

also

$$l_{dx} = \tfrac{3}{2}\, (\dot{\alpha}\, \beta)\, (\dot{\alpha}\, \sigma)\, \beta_{dx} - \tfrac{1}{2}\, (\dot{\alpha}\, \beta)^2\, \sigma_{dx} + \tfrac{1}{2}\, (\dot{a}\, b)^3\, (\lambda\, \alpha)\, \alpha_{dx} \quad . \; . \; . \quad (5)$$

Dem letzten Glied von (5) kann man eine andere Gestalt geben, denn wir haben

$$(\dot{a}\, b)^3\, (\lambda\, \alpha)\, \alpha_{dx} = (\dot{a}\, b)^2\, (\lambda\, b)\, (\dot{a}\, \alpha)\, \alpha_{dx} - (\dot{a}\, b)^2\, (\lambda\, \dot{a})\, (b\, \alpha)\, \alpha_{dx} =$$

$$= (\dot{Q}\, b)^2\, (\varrho\, b)\, \dot{Q}_{dx} - (a\, b)^2\, (\sigma\, b)\, (a\, \dot{\alpha})\, \dot{\alpha}_{dx} - (\dot{a}\, Q)^2\, (\lambda\, \dot{a})\, Q_{dx} =$$

$$= (a\, \dot{Q})^2\, (\varrho\, a)\, \dot{Q}_{dx} - (\dot{a}\, Q)^2\, (\lambda\, \dot{a})\, Q_{dx} - (\sigma\, \beta)\, (\beta\, \dot{\alpha})\, \dot{\alpha}_{dx} =$$

$$= (\dot{a}\, Q)^2\, (\dot{a}\, \lambda)\, Q_{dx} - (a\, \dot{Q})^2\, (a\, \varrho)\, \dot{Q}_{dx} + (\dot{\alpha}\, \beta)^2\, \sigma_{dx} - (\dot{\alpha}\, \beta)\, (\dot{\alpha}\, \sigma)\, \beta_{dx},$$

also

$$l_{dx} = (\dot{\alpha}\, \beta)\, (\dot{\alpha}\, \sigma)\, \beta_{dx} + \tfrac{1}{2}\, (\dot{a}\, Q)^2\, (\dot{a}\, \lambda)\, Q_{dx} - \tfrac{1}{2}\, (a\, \dot{Q})^2\, (a\, \varrho)\, \dot{Q}_{dx} \quad . \; . \quad (6)$$

Man findet nun leicht

$$\frac{\partial l_1}{\partial x_2} - \frac{\partial l_2}{\partial x_1} = (\ddot{\alpha}\, \beta)\, (\ddot{\alpha}\, \sigma)\, (\beta\, \sigma) + (\dot{\alpha}\, \dot{\beta})\, (\dot{\alpha}\, \sigma)\, (\dot{\beta}\, \tau) + \tfrac{1}{2}\, (\ddot{a}\, Q)^2\, (\ddot{a}\, \lambda)\, (Q\, \lambda) +$$

$$+ \tfrac{1}{2}\, (\dot{a}\, \dot{Q})^2\, (\dot{a}\, \lambda)\, (\dot{Q}\, \varrho) - \tfrac{1}{2}\, (\dot{a}\, \dot{Q})^2\, (\dot{a}\, \varrho)\, (\dot{Q}\, \lambda) - \tfrac{1}{2}\, (a\, \ddot{Q})^2\, (a\, \varrho)\, (\ddot{Q}\, \varrho) =$$

$$= (\ddot{\alpha}\, \beta)\, (\ddot{\alpha}\, \sigma)\, (\beta\, \sigma) + \tfrac{1}{2}\, (\ddot{a}\, Q)^2\, (\ddot{a}\, \lambda)\, (Q\, \lambda) - \tfrac{1}{2}\, (a\, \ddot{Q})^2\, (a\, \varrho)\, (\ddot{Q}\, \varrho) +$$

$$+ \tfrac{1}{2}\, (\dot{a}\, \dot{Q})^2\, \{(\dot{a}\, \lambda)\, (\dot{Q}\, \varrho) - (\dot{a}\, \varrho)\, (\dot{Q}\, \lambda)\} =$$

$$= (\ddot{\alpha}\, \beta)\, (\ddot{\alpha}\, \sigma)\, (\beta\, \sigma) + \tfrac{1}{2}\, (\ddot{a}\, Q)^2\, (\ddot{a}\, \lambda)\, (Q\, \lambda) - \tfrac{1}{2}\, (a\, \ddot{Q})^2\, (a\, \varrho)\, (\ddot{Q}\, \varrho) +$$

$$+ \tfrac{1}{2}\, (\dot{a}\, \dot{Q})^3\, (\lambda\, \varrho),$$

also wegen (4)

$$\frac{\partial l_1}{\partial x_2} - \frac{\partial l_2}{\partial x_1} = (\ddot{\alpha}\, \beta)\, (\ddot{\alpha}\, \sigma)\, (\beta\, \sigma) + \tfrac{1}{2}\, (\ddot{a}\, Q)^2\, (\ddot{a}\, \lambda)\, (Q\, \lambda) - \tfrac{1}{2}\, (a\, \ddot{Q})^2\, (a\, \varrho)\, (\ddot{Q}\, \varrho). \quad (7)$$

Aus $R = (\alpha\, \beta)^2 = (\gamma\, \vartheta)^2$ folgt $\dfrac{\partial R}{\partial x_i} = 2\, (\dot{\alpha}\, \beta)^2\, \sigma_i = 2\, (\dot{\gamma}\, \vartheta)^2\, \nu_i$ also nach (6)

$$l_1 \frac{\partial R}{\partial x_2} - l_2 \frac{\partial R}{\partial x_1} = 2\, (\dot{\alpha}\, \beta)\, (\dot{\alpha}\, \sigma)\, (\beta\, \nu)\, (\dot{\gamma}\, \vartheta)^2 +$$

$$+ (\dot{a}\, Q)^2\, (\dot{a}\, \lambda)\, (Q\, \sigma)\, (\dot{\alpha}\, \beta)^2 - (a\, \dot{Q})^2\, (a\, \varrho)\, (\dot{Q}\, \sigma)\, (\dot{\alpha}\, \beta)^2 \quad . \; . \; . \; . \quad (8)$$

somit ergibt sich die Differentialinvariante (3)

$$J^* = \frac{1}{R}\ \{(\ddot{\alpha}\,\beta)\,(\ddot{\alpha}\,\sigma)\,(\beta\,\sigma) + \tfrac{1}{2}\,(\ddot{a}\,Q)^2\,(\ddot{a}\,\lambda)\,(Q\,\lambda) - \tfrac{1}{2}\,(a\,\ddot{Q})^2\,(a\,\varrho)\,(\ddot{Q}\,\varrho)\} -$$

$$- \frac{1}{R^2}\,\{2\,(\dot{\alpha}\beta)\,(\dot{\alpha}\sigma)\,(\beta\,\nu)\,(\dot{\gamma}\,\vartheta)^2 + (\dot{a}\,Q)^2\,(\dot{a}\,\lambda)\,(Q\,\sigma)\,(\dot{\alpha}\beta)^2 - (a\,\dot{Q})^2\,(a\,\varrho)\,(\dot{Q}\,\sigma)\,(\dot{\alpha}\beta)^2\}\,. \quad (9)$$

Es sei bemerkt, dass $l_1\,\frac{\partial R}{\partial x_2} - l_2\,\frac{\partial R}{\partial x_1}$ keinen Faktor R enthält, denn der Koeffizient von $\left(\frac{\partial a_0}{\partial x_1}\right)^2$ ist $4\,a_3\,a_{22}\,(3\,a_1\,a_2\,a_3 - 2\,a_2^3 - a_0\,a_3^2)$ und dieser ist nicht teilbar durch R.
$J = R^2\,J^*$ ist daher eine ganze rationale Differentialinvariante.

Bringt man $f = a^3_{dx}$ auf die Normalform

$$f_n = a_0\,dx_1^{\,3} + a_3\,dx_2^{\,3}$$

($R \neq 0$ wird vorausgesetzt, da sonst l verschwindet), so findet man aus (7) und (8)

$$\frac{\partial l_1}{\partial x_2} - \frac{\partial l_2}{\partial x_1} = a_0\,a_3^{\,2}\,\frac{\partial^2 a_0}{\partial x_1\,\partial x_2} - a_0^{\,2}\,a_3\,\frac{\partial^2 a_3}{\partial x_1\,\partial x_2} + a_3^{\,2}\,\frac{\partial a_0}{\partial x_1}\,\frac{\partial a_0}{\partial x_2} - a_0^{\,2}\,\frac{\partial a_3}{\partial x_1}\,\frac{\partial a_3}{\partial x_2}$$

$$l_1\,\frac{\partial R}{\partial x_2} - l_2\,\frac{\partial R}{\partial x_1} = 4\,a_0^{\,2}\,a_3^{\,2}\left(a_0^{\,2}\,\frac{\partial a_3}{\partial x_1}\,\frac{\partial a_3}{\partial x_2} - a_3^{\,2}\,\frac{\partial a_0}{\partial x_1}\,\frac{\partial a_0}{\partial x_2}\right)$$

und somit

$$J^* = \frac{1}{-2\,a_0^{\,2}\,a_3^{\,2}}\left(a_0\,a_3^{\,2}\,\frac{\partial^2 a_0}{\partial x_1\,\partial x_2} - a_0^{\,2}a_3\,\frac{\partial^2 a_3}{\partial x_1\,\partial x_2} + a_0^{\,2}\,\frac{\partial a_3}{\partial x_1}\,\frac{\partial a_3}{\partial x_2} - a_3^{\,2}\,\frac{\partial a_0}{\partial x_1}\,\frac{\partial a_0}{\partial x_2}\right) \quad (10)$$

Dies kann auch unmittelbar gefolgert werden aus der Normalform von l^*

$$l^*_n = \frac{l}{R} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_3}\,\frac{\partial a_3}{\partial x_1}\,dx_1 + \frac{1}{a_0}\,\frac{\partial a_0}{\partial x_2}\,dx_2\right) \; . \; . \; . \; . \quad (11)$$

$J^* = 0$ bedeutet für diese Normalform (11)

$$\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{1}{a_3}\,\frac{\partial a_3}{\partial x_1}\right) - \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1}{a_0}\,\frac{\partial a_0}{\partial x_2}\right) = 0,$$

woraus folgt

$$\frac{a_3}{a_0} = F(x_1)\,G(x_2)$$

worin F und G Funktionen von x_1 bzw. x_2 sind. Dann ist aber

$$f_n = a_0\,dx_1^{\,3} + F(x_1)\,G(x_2)\,a_0\,dx_2^{\,3} = H(x_1\,x_2)\,\{A\,(x_1)\,dx_1^{\,3} + B\,(x_2)\,dx_2^{\,3}\}\,.$$

Hieraus folgt, dass es eine Transformation gibt, welche f überführt in

$$\bar{f}_n = K\,(\bar{x}_1\,\bar{x}_2)\,\{d\bar{x}_1^{\,3} + d\bar{x}_2^{\,3}\} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (12)$$

Ist umgekehrt a^3_{dx} von der Beschaffenheit, dass sie in die Gestalt (12) transformiert werden kann, so ist

$$l^*_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{K}\,\frac{\partial K}{\partial x_1}\,dx_1 + \frac{1}{K}\,\frac{\partial K}{\partial x_2}\,dx_2\right)$$

und daher

$$J^* = Rot\,l^*_n = 0.$$

$J^* = 0$ ist also die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die binäre kubische Grundform in die Gestalt (12) *transformiert werden kann.*