Mathematics. — *Ueber fünf Erzeugende einer F_2 im R_4.* Von R. WEITZENBÖCK.

(Communicated at the meeting of March 25, 1939.)

Im dreidimensionalen projektiven Raume R_3 wird durch drei Geraden allgemeiner Lage eine Quadrik (= Fläche zweiter Ordnung als Punktort) F_2 bestimmt durch die Forderung, dass die drei Geraden Erzeugende der F_2 sein sollen.

Im vierdimensionalen Raume R_4 gehen durch vier gegebene Gerade als Erzeugende im Allgemeinen ∞^2 Quadriken F_2; denn die Forderung, dass eine Gerade eine Erzeugende sein soll, ist mit drei Bedingungen äquivalent. Da eine F_2 durch 15 Konstante bestimmt ist, müssen fünf Gerade allgemeiner Lage im R_4 einer Bedingung genügen, wenn sie Erzeugende der F_2 sein sollen. Es handelt sich im Folgenden um Aufstellung dieser Bedingung.

Zwei Geraden a_{ik} und α_{ik} bestimmen im R_4 einen Verbindungsraum S'_{12} mit der Gleichung

$$(xS'_{12}) = (xa^2\alpha^2) = 4\,.\,\Sigma \pm x_1 a_{23}\alpha_{45} = x_1 (S'_{12})_1 + x_2 (S'_{12})_2 + \dots + x_5 (S'_{12})_5 = 0. \quad (1)$$

Bei vier Geraden haben wir sechs solche Räume S'_{ik} und damit ergeben sich drei zerfallende Quadriken

$$F_{12,34} = (xS'_{12})(xS'_{34}) = 0,\quad F_{13,42} = (xS'_{13})(xS'_{42}) = 0 \text{ und } F_{14,23} = (xS'_{14})(xS'_{23}) = 0,$$

die alle vier Geraden a, α, p und m enthalten. Dasselbe gilt für jede Quadrik des Büschels

$$F_\lambda = \lambda F_{12,34} + \mu F_{13,42} + \nu F_{14,23} = 0. \quad \dots \dots \quad (2)$$

Man kann leicht beweisen, dass jede Quadrik, die die vier Geraden a, α, p und m enthält, in dieser Gestalt darstellbar ist. Ueberdies besteht der Schnitt aller F_λ aus acht Geraden: den vier genannten und den vier Transversalen durch je drei derselben.

Stellt man die Forderung, dass F_λ durch zwei gegebene Punkte y und z geht, so lassen sich λ, μ und ν aus den aus (2) folgenden Gleichungen eliminieren und man erhält als *Gleichung der Quadrik, die durch die vier Geraden a, α, p, m und durch die zwei Punkte y und z geht:*

$$Q_{xx} = \begin{vmatrix} (xS'_{12})(xS'_{34}) & (xS'_{13})(xS'_{42}) & (xS'_{14})(xS'_{23}) \\ (yS'_{12})(yS'_{34}) & (yS'_{13})(yS'_{42}) & (yS'_{14})(yS'_{23}) \\ (zS'_{12})(zS'_{34}) & (zS'_{13})(zS'_{42}) & (zS'_{14})(zS'_{23}) \end{vmatrix} = 0. \quad \dots \quad (3)$$

Hier ist $Q_{yy} = 0$ und $Q_{zz} = 0$. Fügen wir die Forderung $Q_{yz} = 0$ hinzu, so liegt die Gerade yz ganz auf der Quadrik. Wir erhalten also

$$\triangle = \begin{vmatrix} (yS'_{12})(zS'_{34}) + (zS'_{12})(yS'_{34}) & . & . \\ (yS'_{12})(yS'_{34}) & . & . \\ (zS'_{12})(zS'_{34}) & . & . \end{vmatrix} = 0. \quad \dots \quad (4)$$

Diese Gleichung lässt sich so umgestalten, dass in ihr die Koordinaten

$$\varphi_{ik} = (yz)_{ik} = y_i z_k - y_k z_i$$

der Geraden yz auftreten. Wir spalten $\triangle$ entsprechend den Elementen der ersten Zeile in zwei Determinanten: $\triangle = \triangle_1 + \triangle_2$. Dabei entsteht $\triangle_2$ aus $\triangle_1$ durch Vertauschung von y mit z und Umkehrung des Zeichens. $\triangle_1$ entwickeln wir nach der letzten Zeile:

$$\triangle_1 = (yS'_{12})(yS'_{14})(zy)_{42,23}(zS'_{13})(zS'_{34}) + \dots \quad \dots \quad (5)$$

Hier haben wir

$$(zy)_{42,23} = -(\varphi S'_{42})(\varphi S'_{23}) = -\tfrac{1}{6}(S'_{42}\,S'_{23}\,\varphi'^3);$$

also wird der erste Term der rechten Seite von (5) gleich

$$-\tfrac{1}{6}(S'_{42}\,S'_{23}\,\varphi'^3)(S'_{34}\,z)(S'_{12}\,z)(yS'_{12})(yS'_{14}).$$

Hier formen wir das Produkt der ersten beiden Faktoren um:

$$(S'_{42}\,S'_{23}\,\varphi'^3)(S'_{34}\,z) = (S'_{34}\,S'_{23}\,\varphi'^3)(S'_{42}\,z) - (S'_{34}\,S'_{42}\,\varphi'^3)(S'_{23}\,z) + \\ + 3\,(S'_{34}\,S'_{42}\,S'_{23}\,\varphi'^2)(\varphi'\,z).$$

Der letzte Term verschwindet hier wegen des Faktors $(\varphi'\,z)$ und die beiden ersten Terme lassen sich mit den beiden ersten Gliedern der rechten Seite von (5) zusammenfassen. Man erhält schliesslich:

$$-36\,\triangle_1 = (S'_{23}\,S'_{34}\,\varphi'^3)(yS'_{14})(zS'_{24})(S'_{13}\,S'_{12}\,\psi'^3) + \\ + (S'_{34}\,S'_{42}\,\varphi'^3)(yS'_{13})(zS'_{23})(S'_{14}\,S'_{12}\,\psi'^3).$$

Ebenso bei $\triangle_2$; wenn wir φ als fünfte Gerade durch 5 andeuten, erhalten wir schliesslich

$$\triangle = A_{5,34,23}\,A_{5,13,12}\,A_{5,14,42} + A_{5,42,34}\,A_{5,14,12}\,A_{5,13,23}. \quad \dots \quad (6)$$

wobei z.B.

$$A_{5,34,23} = (\varphi S'_{34})(\varphi S'_{23}) = (\varphi\,p^2\,m^2)(\varphi\,\alpha^2\,q^2)$$

u.s.w. gesetzt ist.

$\triangle = 0$ *stellt die gesuchte Bedingung dar, dass fünf Geraden Erzeugende einer Quadrik im R_4 sind.* Sie ist in den Koordinaten jeder der drei Geraden vom dritten Grade. Die Geraden φ, die mit vier gegebenen zusammen fünf Erzeugende einer Quadrik sein können, bilden also einen Linienkomplex dritten Grades.