Mathematics. — *Contribution à la théorie additive des nombres.* Par J. G. VAN DER CORPUT. (Sixième communication.)

(Communicated at the meeting of March 25, 1939.)

Dans cette communication [1]) je donnerai la démonstration de la proposition 12 (p. 8). Désignons par $c_{100}, c_{101}, \ldots, c_{116}$ des nombres, dépendant uniquement de M, ν, K, U, U', m et du choix du polynome $\psi(x)$, par C_7, C_8, C_9 et C_{10} des nombres dépendant uniquement de M, K, U, U', m et du choix du polynome $\psi(x)$. Comme je l'ai dit dans la communication précédente, cette démonstration est analogue à celle de la proposition 9 (p. 557—566).

Première partie de la démonstration:

Considérons dans cette partie de la démonstration les conditions [2]) de la proposition 1.

1. Je choisis pour V l'intervalle fermé $(2K, N)$, pour V' l'intervalle fermé (A', N) où $A' = N(\log N)^{-\frac{1}{2}gM}$ et pour T l'intervalle fermé $(2, N)$. Posons $r(v) = 1$ ou 0, selon que $\frac{v}{K}$ est un nombre premier $\equiv u \pmod{U}$ ou non. Si nous posons en outre

$$\Gamma = \frac{1}{\log 2} \quad \text{et} \quad \varrho(v) = \frac{1}{K\varphi(U)\log\frac{v}{K}} \quad (2K \leqq v \leqq N),$$

les inégalités (1) sont vérifiées.

Si N est suffisamment grand, chacun de ces trois intervalles V, V' et T renferme au moins un entier et au plus N entiers, A' est $\geqq 2b$ et à chaque $v' \geqq A'$ correspond un seul nombre positif x avec $\psi(x) = v'$.

Pour un entier v' $(A' \leqq v' \leqq N)$ auquel correspond au moins un nombre premier $p' \equiv u' \pmod{U'}$ tel que $\psi(p') = v'$, je pose $r'(v') = 1$ et pour les autres v' je pose $r'(v') = 0$. Je prendrai

$$\Gamma' = c_{100} A'^{-1+\frac{1}{g}}, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (68)$$

où je fixerai c_{100} plus loin. Nous avons

$$\sum_{v} |r'(v')| \leqq \sum_{\substack{A' \leqq v' \leqq N \\ v' = \psi(x)}} 1 \leqq c_{101} N^{\frac{1}{g}} \leqq c_{101} N A'^{-1+\frac{1}{g}} \leqq \Gamma' N,$$

[1]) Voir Proceedings Kon. Ned. Akad. v. Wetenschappen, A'dam, **41**, 227—237; 350—361; 442—453; 556—567 (1938); **42**, 2—12 (1939).

[2]) Voir Proceedings Kon. Ned. Akad. v. Wetenschappen, A'dam, **41**, 229 (1938).

si nous choisissons $c_{100} \geqq c_{101}$. Les nombres

$$\varrho'(v') = \frac{b^{-\frac{1}{g}} v'^{-1+\frac{1}{g}}}{\varphi(U')\log\frac{v'}{b}} \qquad (A' \leqq v' \leqq N)$$

et

$$\sum_{A' \leqq v' \leqq N-1} |\varrho'(v+1) - \varrho'(v')|$$

sont $\leqq c_{102} A'^{-1+\frac{1}{g}} \leqq \Gamma'$, si l'on choisit $c_{100} \geqq c_{102}$.

La première condition de la proposition 1 est donc remplie.

2. Posons $l = 1$ et en outre pour les fractions irréductibles $\frac{a}{q}$ à dénominateur positif

$$\lambda\left(\frac{a}{q}\right) = \frac{\varphi(U)}{\varphi(qU)} \sum_{\substack{h=1 \\ h \equiv u \pmod{U} \\ (h,q)=1}}^{qU} e\left(\frac{aKh}{q}\right) \quad \ldots \ldots \quad (69)$$

et

$$\lambda'\left(\frac{a}{q}\right) = \frac{\varphi(U')}{\varphi(qU')} \sum_{\substack{h=1 \\ h \equiv u' \pmod{U'} \\ (h,q)=1}}^{qU'} e\left(\frac{a\psi(h)}{q}\right) \quad \ldots \ldots \quad (70)$$

où $e(\alpha) = e^{2\pi i\alpha}$. Les nombres $\lambda\left(\frac{a}{q}\right)$ et $\lambda'\left(\frac{a}{q}\right)$ sont en valeur absolue $\leqq q$, de sorte que (3) est valable, si l'on choisit $\gamma_1 \geqq 1$. L'expression

$$\sum_{\substack{A' \leqq v' \leqq N \\ v' \leqq y}} r'(v')\, e\left(\frac{av'}{q}\right) - \lambda'\left(\frac{a}{q}\right) \sum_{\substack{A' \leqq v' \leqq N \\ v' \leqq y}} \varrho'(v') =$$

$$\sum_{\substack{p' | qU' \\ A' \leqq \psi(p') \leqq N \\ p' \equiv u' \pmod{U'} \\ \psi(p') \leqq y}} e\left(\frac{a\psi(p')}{q}\right) + \sum_{\substack{h=1 \\ h \equiv u' \pmod{U'} \\ (h,qU')=1}}^{qU'} e\left(\frac{a\psi(h)}{q}\right) \left\{ \sum_{\substack{A' \leqq \psi(p') \leqq N \\ \psi(p') \leqq y \\ p' \equiv h \pmod{qU'}}} 1 - \frac{b^{-\frac{1}{g}}}{\varphi(qU')} \sum_{\substack{A' \leqq v' \leqq N \\ v' \leqq y}} \frac{v'^{-1+\frac{1}{g}}}{\log\frac{v'}{b}} \right\}$$

est en valeur absolue d'après de lemme 14 (appliqué avec $k = qU'$) pour tout nombre naturel m inférieure à

$$qU' + qC_7 N^{\frac{1}{g}} (\log N)^{-m} \leqq C_8\, q\, N A'^{-1+\frac{1}{g}} (\log N)^{-m}.$$

En remplacant $\psi(x)$ par $K x$, par conséquent g par 1, on obtient donc que

$$\sum_{\substack{2 \leqq v \leqq N \\ v \leqq y}} r(v)\, e\left(\frac{a v}{q}\right) - \lambda\left(\frac{a}{q}\right) \sum_{\substack{2 \leqq v \leqq N \\ v \leqq y}} \varrho(v)$$

est en valeur absolue inférieure à

$$q\, U + q\, C_9\, N (\log N)^{-m} \leqq C_{10}\, q\, N (\log N)^{-m}.$$

Par suite les inégalités (4) et (5) sont valables, si l'on choisit

$$\gamma_m \geqq C_{10}, \quad \gamma_m \geqq C_8 \quad \text{et} \quad c_{100} \geqq 1.$$

3. A chaque $v' \geqq A'$ correspond un seul $x > 0$ tel que $\psi(x) = v'$. Si nous introduisons les nombres positifs α' et β' avec les propriétés $\psi(\alpha') = A'$ et $\psi(\beta') = N$, nous avons

$$\sum_{A' \leqq v \leqq N} r'(v')\, e^{2\pi i \alpha v'} = \sum_{\substack{\alpha' \leqq p' \leqq \beta' \\ p' \equiv u' (mod.\, U')}} e^{2\pi i \alpha \psi(p')} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (71)$$

Posons $\eta_m = 1 + \zeta$, où ζ désigne le nombre figurant dans le lemme 19 (These Proceedings, p. 11). Si N est suffisamment grand, on a

$$N^{-1} (\log N)^{\eta_m} \geqq \beta'^{-g} (\log \beta')^{\zeta} \quad \text{et} \quad (\log N)^{\eta_m} \geqq (\log \beta')^{\zeta}.$$

Pour tout nombre réel α tel que l'intervalle fermé $(\alpha \mp N^{-1} (\log N)^{\eta_m})$ ne contienne aucune fraction à dénominateur $\leqq (\log N)^{\eta_m}$, l'intervalle $(\alpha \mp \beta'^{-g} (\log \beta')^{\zeta})$ ne contient aucune fraction à dénominateur $\leqq (\log \beta')^{\zeta}$ et le lemme 19 nous apprend donc que le membre de droite de (6) est en valeur absolue

$$\leqq c_{103}\, \beta' (\log \beta')^{-m} \leqq c_{104}\, N^{\frac{1}{g}} (\log N)^{-m} \leqq c_{104}\, N A'^{-1+\frac{1}{g}} (\log N)^{-m}$$
$$\leqq \gamma_m\, \Gamma'\, N (\log N)^{-m},$$

si nous choisissons $\gamma_m \geqq c_{104}$ et $c_{100} \geqq 1$.

Ainsi nous avons démontré que les conditions de la proposition 1 sont remplies.

Deuxième proposition de la démonstration:

Considérons maintenant les conditions de la propositions 5. (Proceedings, 41, p. 443). Pour démontrer que la fonction

$$H(q, t) = \sum_{\substack{a=0 \\ (a,q)=1}}^{q-1} \lambda\left(\frac{a}{q}\right) \lambda'\left(\frac{a}{q}\right) e^{-\frac{2\pi i a t}{q}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (72)$$

possède, pour toute paire de nombres naturels q_1 et q_2 qui sont premiers entre eux, la propriété multiplicative $H(q_1, t)\, H(q_2, t) = H(q_1 q_2, t)$, il

suffit, comme nous l'avons vu dans la deuxième communication (p. 354) de déduire les relations

$$\lambda\left(\frac{a_1}{q_1}\right) \lambda\left(\frac{a_2}{q_2}\right) = \lambda\left(\frac{a_1}{q_1} + \frac{a_2}{q_2}\right) \quad \text{et} \quad \lambda'\left(\frac{a_1}{q_1}\right) \lambda'\left(\frac{a_2}{q_2}\right) = \lambda'\left(\frac{a_1}{q_1} + \frac{a_2}{q_2}\right)$$

pour un couple quelconque de fractions irréductibles $\frac{a_1}{q_1}$ et $\frac{a_2}{q_2}$ dont les dénominateurs q_1 et q_2 sont premiers entre eux. Or, ces relations découlent immédiatement du lemme 13 (p. 556) en posant $\chi(x) = K x$ ou $\chi(x) = \psi(x)$.

Posons pour tout nombre premier p et pour tout entier $\sigma \geqq 0$

$$T_\sigma = \frac{p^\sigma \varphi(U')}{\varphi(p^\sigma U')} \sum_{\substack{h=1 \\ h \equiv u' (mod.\, U') \\ (h, p^\sigma) = 1 \\ p^\sigma | \psi(h) - t}}^{p^\sigma U'} 1\,; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (73)$$

T_0 est donc égal à 1. Je dis que pour chaque nombre naturel σ

$$\frac{p^{\sigma-1} \varphi(U')}{\varphi(p^\sigma U')} \sum_{\substack{h=1 \\ h \equiv u' (mod.\, U') \\ (h, p) = 1 \\ p^{\sigma-1} | \psi(h) - t}}^{p^\sigma U'} 1 = T_{\sigma-1}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (74)$$

En effet, dans le cas où σ est égal à 1 et p n'est pas un facteur de U', le premier membre de (74) égale

$$\frac{\varphi(U')}{\varphi(p\, U')} \cdot (p-1) = 1 = T_0.$$

Dans les autres cas à tout nombre naturel $k \leqq p^{\sigma-1} U'$ correspondent précisément p nombres naturels $h \leqq p^\sigma U'$ définis par

$$h \equiv k \qquad (mod.\, p^{\sigma-1} U')\,;$$

les relations

$$k \equiv u' (mod.\, U')\,; \quad (k, p^{\sigma-1}) = 1\,; \quad p^{\sigma-1} / \psi(k) - t$$

entraînent

$$h \equiv u' (mod.\, U')\,; \quad (h, p) = 1\,; \quad p^{\sigma-1} / \psi(h) - t$$

et réciproquement (dans le cas $\sigma = 1$, p est un facteur de U', de sorte que les relations $h \equiv u'$ $(mod.\, U')$ et $(u', U') = 1$ impliquent $(h, p) = 1$); le membre de gauche de (74) est donc égal à

$$\frac{p^{\sigma-1} \varphi(U')}{\varphi(p^\sigma U')} \cdot p \sum_{\substack{k=1 \\ k \equiv u' (mod.\, U') \\ (k, p^{\sigma-1}) = 1 \\ p^{\sigma-1} | \psi(k) - t}}^{p^{\sigma-1} U'} 1 = T_{\sigma-1}.$$

Dans l'évaluation de

$$H(p^\sigma, t) = \frac{\varphi(U')}{\varphi(p^\sigma U')} \sum_{\substack{h=1 \\ h \equiv u' (mod.\, U') \\ (h,p)=1}}^{p^\sigma U'} \sum_{\substack{a=0 \\ (a,p)=1}}^{p^\sigma - 1} \lambda\left(\frac{a}{p^\sigma}\right) e\left(\frac{a}{p^\sigma}(\psi(h) - t)\right)$$

($\sigma \geqq 1$) (comparez (70) et (72)), je distinguerai cinq cas différents.

1. Soit $p \dagger U$ et p^σ / K. La relation (69) nous apprend $\lambda\left(\frac{a}{p^\sigma}\right) = 1$, par suite

$$\left.\begin{aligned} H(p^\sigma, t) &= \frac{\varphi(U')}{\varphi(p^\sigma U')} \sum_{\substack{h=1 \\ h \equiv u' (mod.\, U') \\ (h,p)=1}}^{p^\sigma U'} \sum_{\substack{a=0 \\ (a,p)=1}}^{p^\sigma - 1} e\left(\frac{a}{p^\sigma}(\psi(h) - t)\right) \\ &= \frac{\varphi(U')}{\varphi(p^\sigma U')} \Bigg\{ \sum_{\substack{h=1 \\ h \equiv u' (mod.\, U') \\ (h,p)=1 \\ p^\sigma / \psi(h) - t}}^{p^\sigma U'} (p^\sigma - p^{\sigma - 1}) - \sum_{\substack{h=1 \\ h \equiv u' (mod.\, U') \\ (h,p)=1 \\ p^\sigma \dagger \psi(h) - t \\ p^{\sigma-1} / \psi(h) - t}}^{p^\sigma U'} p^{\sigma - 1} \Bigg\} \\ &= T_\sigma - T_{\sigma - 1} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad (75)$$

en vertu de (73) et (74).

2. Soit $p \dagger U$; $p^\sigma \dagger K$; $p^{\sigma - 1} / K$. Le nombre $\lambda\left(\frac{a}{p^\sigma}\right)$, defini par (69), est égal à $-\frac{\varphi(U)\, p^{\sigma-1}}{\varphi(p^\sigma U)} = \frac{-1}{p-1}$, de sorte qu'on obtient

$$H(p^\sigma, t) = -\frac{T_\sigma - T_{\sigma-1}}{p-1}.$$

3. Dans le cas où $p \dagger U$ et $p^{\sigma-1} \dagger K$, les nombres $\lambda\left(\frac{a}{p^\sigma}\right)$ et $H(p^\sigma, t)$ s'annulent.

4. Soit p / U et $p^\sigma / K U$. On a

$$\begin{aligned} H(p^\sigma, t) &= \frac{\varphi(U')}{\varphi(p^\sigma U')} \sum_{\substack{h=1 \\ h \equiv u' (mod.\, U') \\ (h,p)=1}}^{p^\sigma U'} \sum_{\substack{a=0 \\ (a,p)=1}}^{p^\sigma - 1} e\left(\frac{a}{p^\sigma}(\psi(h) + Ku - t)\right) \\ &= T'_\sigma - T'_{\sigma-1}, \end{aligned}$$

si l'on pose pour $\sigma \geqq 0$

$$T'_\sigma = \frac{p^\sigma \varphi(U')}{\varphi(p^\sigma U')} \sum_{\substack{h=1 \\ h \equiv u' (mod.\, U') \\ (h, p^\sigma)=1 \\ p^\sigma / \psi(h) + Ku - t}}^{p^\sigma U'} 1.$$

5. Dans le cas où p / U et $p^\sigma \dagger K U$ les nombres $\lambda\left(\frac{a}{p^\sigma}\right)$ et $H(p^\sigma, t)$ s'annulent.

Démontrons maintenant qu'il existe un nombre γ dépendant uniquement de K, U, U', G et g tel qu'on ait

$$|H(p^\sigma, t)| < \frac{\gamma}{p^\sigma} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (76)$$

pour tout nombre premier p, pour tout entier t et pour tout nombre naturel σ. Comme nous le savons, G désigne le nombre défini au commencement de la cinquième communication (p. 2), c. à d. G est le produit de tous les nombres premiers P qui ne sont pas un facteur de U' et pour lesquels les congruences

$$\psi(x) \equiv \psi(1) \qquad (mod.\, P)$$

sont valables pour tous les entiers x non divisibles par P. L'inégalité (76) est évidente, si $p^\sigma / K U$ et également si $\sigma \geqq 2$ et $p^{\sigma-1} / K$. Elle est aussi évidente si $H(p^\sigma, t) = 0$. D'après le raisonnement précédent seulement le cas $\sigma = 1$ et $p \dagger K U$ reste. Je puis supposer $p \dagger U'$; sinon (76) avec $\sigma = 1$ est évident. Si tous les coefficients du polynome $\psi(x) - \psi(1)$ sont divisibles par p, ce nombre p est un facteur de G et (76) est immédiat. Si au moins un des coefficients du polynome $\psi(x) - \psi(1)$ n'est pas divisible par p, la congruence $\psi(h) - t \equiv 0\, (mod.\, p)$ possède tout au plus g solutions et

$$T_1 \leqq \frac{p\, \varphi(U')}{\varphi(p U')} \sum_{\substack{h=1 \\ p / \psi(h) - t}}^{p U'} 1 \leqq \frac{p}{p-1} U' g,$$

de sorte que

$$H(p, t) = -\frac{T_1 - 1}{p - 1}$$

est en valeur absolue inférieur à $\frac{\gamma}{p}$, où γ désigne un nombre convenablement choisi. Ainsi (76) est démontré.

D'après la propriété multiplicative de la fonction $H(q, (t)$ on a pour tout nombre naturel q et pour tout entier t

$$H(q,t) = \prod_{p^\sigma / q} H(p^\sigma, t) \leqq \prod_{\substack{p^\sigma / q \\ p^{\frac{\sigma}{m}} < \gamma}} \frac{\gamma}{p^\sigma} \cdot \prod_{\substack{p^\sigma / q \\ p^{\frac{\sigma}{m}} \geqq \gamma}} \frac{1}{p^{\sigma\left(1 - \frac{1}{m}\right)}} < \frac{c_{105}}{q^{1 - \frac{1}{m}}}.$$

Par conséquent les conditions de la proposition 5 (p. 443) sont remplies.

Troisième partie de la démonstration:

Si nous posons

$$L(t) = \sum_{v+v'=t} r(v)\, r'(v'); \qquad \Lambda(t) = \sum_{v+v'=t} \varrho(v)\, \varrho'(v')$$

et

$$\Omega_\nu(t) = \prod_p \Bigl(1 + \sum_{\sigma=1}^{\left[\frac{\nu \log\log t}{\log p}\right]} H(p^\sigma, t)\Bigr),$$

la proposition 5, appliquée avec $m = g\,M$ (ν est donc $> m$) nous apprend

$$\left.\begin{aligned} \sum_{t=2}^{[N]} |L(t) - \Lambda(t)\, \Omega_\nu(t)|^2 &< c_{106}\, \Gamma^2\, \Gamma'^2\, N^3 (\log N)^{-m} \\ &< c_{107}\, A'^{-2+\frac{2}{g}}\, N^3 (\log N)^{-gM} \\ &< c_{108}\, N^{1+\frac{2}{g}} (\log N)^{-gM+\frac{1}{2}gM\left(2-\frac{2}{g}\right)} \\ &= c_{108}\, N^{1+\frac{2}{g}} (\log N)^{-M}. \end{aligned}\right\} \quad (77)$$

en vertu de (68).

Soit p un nombre premier quelconque et désignons par p^ω la puissance la plus élevée de p qui est un diviseur de KU. Si p n'est pas un facteur de U, on a

$$\begin{aligned} 1 + \sum_{\sigma=1}^{\infty} H(p^\sigma, t) &= 1 + \sum_{\sigma=1}^{\omega+1} H(p^\sigma, t) \\ &= 1 + \sum_{\sigma=1}^{\omega} (T_\sigma - T_{\sigma-1}) - \frac{T_{\omega+1} - T_\omega}{p-1} \\ &= T_\omega - \frac{T_{\omega+1}}{p-1} + \frac{T_\omega}{p-1} = \frac{p\,T_\omega - T_{\omega+1}}{p-1} \\ &= \frac{p^{\omega+1}\, \varphi(U')}{(p-1)\, \varphi(p^{\omega+1} U')} \Bigl\{ \sum_{\substack{h=1 \\ h \equiv u' \,(mod.\, U') \\ (h,p)=1 \\ p^\omega | \psi(h)-t}}^{p^{\omega+1} U'} 1 - \sum_{\substack{h=1 \\ h \equiv u' \,(mod.\, U') \\ (h,p)=1 \\ p^{\omega+1} | \psi(h)-t}}^{p^{\omega+1} U'} 1 \Bigr\} \\ &= W(p, t) \end{aligned}$$

d'après la définition de cette dernière fonction (voir p. 6). Si par contre p est un facteur de U, on a

$$\begin{aligned} 1 + \sum_{\sigma=1}^{\infty} H(p^\sigma, t) = 1 + \sum_{\sigma=1}^{\omega} H(p^\sigma, t) &= 1 + \sum_{\sigma=1}^{\omega} (T'_\sigma - T'_{\sigma-1}) = T'_\omega \\ &= \frac{p^\omega\, \varphi(U')}{\varphi(p^\omega U')} \sum_{\substack{h=1 \\ h \equiv u' \,(mod.\, U') \\ (h,p^\omega)=1 \\ p^\omega | \psi(h)+Ku-t}}^{p^\omega U'} 1 = W(p, t). \end{aligned}$$

Supposons maintenant que t soit > 1 et que $(\log t)^\nu$ soit $\geqq K^2 U^2$. Pour un facteur premier p de KU chaque nombre $\sigma > \left[\frac{\nu \log \log t}{\log p}\right]$ satisfait à

$$p^\sigma > (\log t)^\nu \geqq K^2 U^2,$$

d'où il suit $\sigma > 2\,\omega \geqq \omega + 1$, de sorte que $H(p^\sigma, t)$ s'annule. Pour un nombre premier $p \leqq (\log t)^\nu$ qui n'est pas un facteur de KU on a $\omega = 0$, de sorte que $H(p^\sigma, t)$ s'annule pour tout entier $\sigma > 1$, par suite pour tout entier $\sigma > \left[\frac{\nu \log \log t}{\log p}\right]$. Ainsi nous trouvons

$$\begin{aligned} \Omega_\nu(t) = \prod_p \Bigl(1 + \sum_{\sigma=1}^{\left[\frac{\nu \log\log t}{\log p}\right]} H(p^\sigma, t)\Bigr) &= \prod_{p \leqq (\log t)^\nu} \Bigl(1 + \sum_{\sigma=1}^{\infty} H(p^\sigma, t)\Bigr) \\ &= \prod_{p \leqq (\log t)^\nu} W(p, t) = \Omega^*_\nu(t). \end{aligned}$$

en vertu de (62). L'inégalité (77) nous apprend donc

$$\sum_{t=2}^{[N]} | L(t) - \Lambda(t)\, \Omega^*_\nu(t) |^2 < c_{109}\, N^{1+\frac{2}{g}} (\log N)^{-M}, \quad . \quad . \quad . \quad (78)$$

puisque les termes dans lesquels $(\log t)^\nu$ est inférieur à $K^2 U^2$ fournissent une contribution dont la valeur absolue est $< c_{110}$.

Maintenant nous sommes presque prêts, car il suffit de démontrer qu'il est permis de remplacer dans la dernière inégalité $L(t)$ per $F(t)$ et $\Lambda(t)$ par $\Phi(t)$, si nous remplaçons dans le nombre de droite c_{109} par un autre nombre dépendant uniquement de M, ν, K, U, U' et du choix du polynome $\psi(x)$.

Considérons d'abord $W(p, t)$ où le nombre premier p n'est pas un facteur de $K\,U\,U'\,G$. D'après la définition (p. 6) $p - \frac{(p-1)^2}{p}\, W(p, t)$ est le nombre des nombres naturels h tels que

$$h \leqq p\,U'; \qquad h \equiv u' \,(mod.\, U'); \qquad p / h\,(\psi(h) - t).$$

Il est impossible que tous les coefficients du polynome

$$\Psi(X) = (u' + U'\,X)\,(\psi(u' + U'\,X) - t)$$

sont divisible par p. En effet, dans ce cas on aurait pour tout nombre $y \equiv u' \,(mod.\, U')$

$$y\,(\psi(y) - t) \equiv 0 \qquad (mod.\, p);$$

à chaque entier x correspondrait un nombre $y \equiv u'$ (*mod.* U') avec $y \equiv x$ (*mod.* p) et on trouverait pour tout entier x

$$x\,(\psi(x)-t) \equiv 0 \qquad (mod.\ p),$$

par suite pour tout entier x non divisible par p

$$\psi(x) \equiv t\,; \quad \psi(1) \equiv t\,; \quad \psi(x) \equiv \psi(1) \quad (mod.\ p),$$

de sorte que p serait un facteur de G, ce qui est contraire à l'hypothèse. De cette manière nous avous trouvé que les coefficients du polynôme $\Psi(x)$ ne sont pas tous divisibles par p, de sorte que la congruence $\Psi(x) \equiv 0$ (*mod.* p) possède tout au plus $g+1$ solutions. Par suite on a

$$p - \frac{(p-1)^2}{p}\, W(p,t) \geqq 0 \ \text{ et } \ \leqq g+1,$$

d'où il découle

$$|\, W(p,t) - 1\, | \leqq \frac{2g}{p-1}.$$

Le lemme 12 (p. 452) nous apprend pour tout entier $t > e^2$

$$|\, \Omega_\nu^*(t)\, | \leqq c_{111}\, (\log\log t)^{2g}.$$

Traitons ensuite $L(t)$, le nombre des nombres premiers $p \equiv u$ (*mod.* U) avec $p \geqq 2K$ tel que $t - Kp$ soit égal à $\psi(p')$, où p' désigne un nombre premier $\equiv u'$ (*mod.* U') avec $\psi(p') \geqq A'$. On a donc

$$0 \leqq F(t) - L(t) \leqq c_{112}\, A'^{\frac{1}{g}}.$$

Considérons enfin

$$\Lambda(t) = c_{112} \sum_{\substack{v \geqq 2K \\ v' \geqq A' \\ v+v'=t}} \frac{v'^{\,-1+\frac{1}{g}}}{\left(\log \dfrac{v}{K}\right)\left(\log \dfrac{v'}{b}\right)}$$

où

$$c_{112}^{-1} = K\, b^{\frac{1}{g}}\, \varphi(U)\, \varphi(U').$$

Nous avons

$$0 \leqq \Phi(t) - \Lambda(t) = c_{112} \sum_{\substack{v \geqq 2K \\ 2b \leqq v' < A' \\ v+v'=t}} \frac{v'^{\,-1+\frac{1}{g}}}{\left(\log \dfrac{v}{K}\right)\left(\log \dfrac{v'}{b}\right)}$$

$$\leqq \frac{c_{112}}{\log 2} \sum_{\substack{v \geqq 2K \\ 2 \leqq v' < A' \\ v+v'=t}} \frac{v'^{\,-1+\frac{1}{g}}}{\log \dfrac{v}{K}} < \frac{c_{113}\, A'^{\frac{1}{g}}}{\log t}$$

d'après la démonstration donnée à la fin de la quatrième communication (p. 566). Nous obtenons donc

$$|\, F(t) - \Phi(t)\, \Omega_\nu^*(t)\, | < |\, L(t) - \Lambda(t)\, \Omega_\nu^*(t)\, | + c_{114}\, A'^{\frac{1}{g}},$$

d'où il suit en vertu de (78)

$$\sum_{t=2}^{[N]} |\, F(t) - \Phi(t)\, \Omega_\nu^*(t)\, |^2 < 2 c_{109}\, N^{1+\frac{2}{g}} (\log N)^{-M} + c_{115}\, N A'^{\frac{2}{g}}$$

$$= c_{116}\, N^{1+\frac{2}{g}} (\log N)^{-M}.$$

Ainsi la proposition 12 est démontrée.

Bien que nous n'ayons pas encore démontré ainsi tous les résultats annoncés dans l'introduction, nous arrêterons ici cette série de communications, parce que sous peu nous ferons paraître dans les Acta Arithmetica trois théorèmes plus généraux et plus aisés à appliquer que ceux que nous avons obtenus dans les notes précédentes.