Mathematics. — *Sur un problème de* WARING *généralisé.* I. Par J. G. VAN DER CORPUT et CH. PISOT.

(Communicated at the meeting of March 25, 1939.)

§ 1. *Introduction.*

Dans trois récents théorèmes VAN DER CORPUT [1]) a étudié la représentation d'un système $t = (t_1, \ldots, t_m)$ de m entiers t_μ par des expressions de la forme

$$t_\mu = \sum_{\nu=1}^{n} b_{\mu\nu} v_\nu \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

où $b_{\mu\nu}$ sont des entiers donnés et v_ν des entiers possédant certaines propriétés. De ces trois théorèmes qu'il a appelés A, B et C, nous utiliserons dans cette communication seulement le théorème A. Nous nous bornerons au cas où les v_ν sont des polynomes $f_\nu(y_\nu)$ à coefficients entiers dont le degré exact est $k_\nu \geqq 2$; y_ν est un nombre naturel tel que $|f_\nu(y_\nu)| \leqq X$, où X désigne un entier quelconque supérieur à 2. (Dans une communication ultérieure nous nous proposons aussi d'étudier le cas où les y_ν sont des nombres premiers.)

Le théorème A donne sous certaines conditions une valeur approximative du nombre $L(t)$ de représentations du système t sous la forme indiquée. Cette valeur approximative se présente comme un produit $b Z(t) \Lambda(t)$ où b^{-1} est le nombre de systèmes $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m)$ de nombres rationnels γ_μ avec $0 \leqq \gamma_\mu < 1$ tels que les n nombres $\sum_{\mu=1}^{n} b_{\mu\nu} \gamma_\mu$ soient entiers. Pour définir $\Lambda(t)$ nous remarquons qu'il existe une constante c_1 telle que pour tout nombre réel $\eta_\nu \geqq c_1$, chaque dérivée $f_\nu'(\eta_\nu) \neq 0$. Quand η_ν parcourt toutes les valeurs supérieures ou égales à c_1, le nombre $v_\nu = f_\nu(\eta_\nu)$ parcourt un intervalle j_ν et la correspondance entre un $\eta_\nu \geqq c_1$ et un v_ν de j_ν est biunivoque.

Alors $\Lambda(t)$ est la somme

$$\Sigma \frac{1}{|f_1'(\eta_1) \ldots f_n'(\eta_n)|}.$$

étendue aux entiers v_1 de $j_1, \ldots, v_n$ de j_n tels que l'on ait

$$\sum_{\nu=1}^{n} b_{\mu\nu} v_\nu = t_\mu \quad (\mu = 1, \ldots, m) \quad \text{et} \quad |v_\nu| \leqq X \quad (\nu = 1, \ldots, n).$$

[1]) VAN DER CORPUT, Propriétés additives, Acta arithmetica (sous presse).

Enfin $Z(t)$, appelé par VAN DER CORPUT „facteur arithmétique", dépend du caractère arithmétique des nombres t_μ.

On démontre aisément que l'hypothèse E figurant dans le théorème A est vérifiée.

Pour certaines applications il est nécessaire de soumettre le facteur arithmétique à un examen plus détaillé. C'est l'objet du § 3 dû à VAN DER CORPUT. Mais avant de pouvoir appliquer le résultat du § 3, il faut démontrer que, dans certaines conditions, le nombre de solutions de deux certains systèmes n'est pas trop grand. Soit l un nombre naturel inférieur à n et soit N le nombre de solutions [2]) $y_1, \ldots, y_l, z_1, \ldots, z_l$ du système:

$$\left.\begin{array}{ll} \sum_{\lambda=1}^{l} b_{\mu\lambda} (f_\lambda(y_\lambda) - f_\lambda(z_\lambda)) = 0 & (\mu = 1, 2, \ldots, m) \\ |f_\lambda(y_\lambda)| \leqq X, \quad |f_\lambda(z_\lambda)| \leqq X & (\lambda = 1, 2, \ldots, l) \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Pour pouvoir appliquer le théorème A, il est nécessaire de démontrer pour tout nombre positif fixe ε que

$$N \leqq C_1 X^{2\left(\frac{1}{k_1} + \ldots + \frac{1}{k_l}\right) - m + \varepsilon} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Dans cette communication les lettres C désignent toujours des constantes convenables dépendantes de ε, mais indépendantes de X.

En outre on a besoin d'une borne supérieure analogue pour le nombre N^* de solutions du système:

$$\left.\begin{array}{ll} \sum_{\lambda=l+1}^{n-1} b_{\mu\lambda} (f_\lambda(y_\lambda) - f_\lambda(z_\lambda)) & (\mu = 1, 2, \ldots, m) \\ |f_\lambda(y_\lambda)| \leqq X, \ |f_\lambda(z_\lambda)| \leqq X & (\lambda = l+1, \ldots, n-1) \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad (4)$$

à savoir

$$N^* \leqq C_2 X^{2\left(\frac{1}{k_{l+1}} + \ldots + \frac{1}{k_{n-1}}\right) - m + \varepsilon} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Le § 2, dû à PISOT est entièrement consacré au problème de trouver des conditions suffisantes pour que l'inégalité (3) soit vérifiée. PISOT a trouvé deux résultats différents; nous parlerons d'abord de l'un de ces résultats.

Soit $s(k)$ un nombre naturel tel que le système

$$\left.\begin{array}{l} \sum_{\sigma=1}^{s(k)} (f_\lambda(y_\sigma) - f_\lambda(z_\sigma)) = 0 \\ |f_\lambda(y_\sigma)| \leqq X, \ |f_\lambda(z_\sigma)| \leqq X \qquad (\sigma = 1, 2, \ldots, s(k)) \end{array}\right\}$$

possède au plus $C_3 X^{\frac{2}{k} s(k) - 1 + \varepsilon}$ solutions pour chaque λ $(1 \leqq \lambda \leqq l)$ tel que le degré de f_λ soit exactement k.

[2]) Dans cette communication une solution veut toujours dire un système de nombres naturels vérifiant le système de relations en question.

Nous démontrerons que 2^{k-1} est une valeur possible pour $s(k)$. Mais comme on le sait il est possible de prendre pour $s(k)$ une valeur beaucoup plus petite, si k est assez grand.

Supposons que l'on puisse partager la matrice

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & b_{1l} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{m1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & b_{ml} \end{pmatrix}$$

en matrices partielles de rang m chacune, sans colonne commune deux à deux et supposons que dans chacune de ces matrices partielles les polynomes aient tous un même degré dit „associé" à la matrice partielle. Soit $\psi(k)$ le nombre des matrices partielles pour lesquelles le degré associé est égal à k.

Une condition suffisante pour que l'inégalité (3) soit vérifiée est

$$\sum_k \frac{\psi(k)}{s(k)} \geqq 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

où $\sum_k$ est étendu aux nombres k figurant comme degré dans au moins un polynome f_λ $(\lambda = 1, \ldots, l)$.

Cette condition a pour les petites valeurs de k le désavantage que le nombre l qui y figure doit être pris assez grand, à savoir $l \geqq 2^{k-1} m$ dans le cas particulier où tous les polynomes sont de même degré k; de sorte qu'alors le nombre n figurant dans (1) est $\geqq 2^k m + 1$. C'est pourquoi nous démontrerons aussi un autre théorème où l peut prendre une valeur un peu plus petite, à savoir $l \geqq (2^{k-1} - 1)m + 1$. Cette condition a par contre le désavantage que nous devons supposer que tous les polynomes soient de même degré k, de plus elle a l'inconvénient d'être plus difficile à énoncer que la précédente. Cette condition exige d'ailleurs aussi qu'un certain nombre de déterminants de la matrice B ne soient pas nuls.

Pour indiquer les déterminants dont il s'agit, nous allons définir certains ensembles $E_m(r)$ où r est l'une des valeurs $1, 2, \ldots, k$. Soit E un ensemble de systèmes d'entiers $(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_a)$, E' un ensemble de systèmes d'entiers $(\nu'_1, \nu'_2, \ldots, \nu'_b)$. Nous désignerons par EE' l'ensemble de tous les systèmes de la forme $(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_a, \nu'_1, \nu'_2, \ldots, \nu'_b)$, et par $E + E'$ l'ensemble des systèmes appartenant à au moins l'un des ensembles E ou E'.

$E_m(r)$ est un ensemble de systèmes $(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m)$ de m entiers $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m$ défini de la manière récurrente suivante:

Pour $1 \leqq r \leqq k$, $E_1(r)$ désignera tout ensemble formé par 2^{r-1} entiers différents.

Pour $m \geqq 2$, $r = 1$, $E_m(1)$ désignera tout ensemble de la forme $E_1(2)\, E_{m-1}(k-1)$ où aucun entier de $E_1(2)$ ne figure dans $E_{m-1}(k-1)$.

Pour $m \geqq 2$, $2 \leqq r \leqq k$, $E_m(r)$ désignera tout ensemble de la forme $E_1(r-1)E_{m-1}(k) + E_m(r-1)$ où aucun entier de $E_1(r-1)$ ne figure ni dans $E_{m-1}(k)$ ni dans $E_m(r-1)$.

Soit

$$l \geqq (2^{k-1} - 1)\, m + 1 \text{ si } k \geqq 3 \text{ et } l \geqq 2m \text{ si } k = 2 \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Supposons qu'il existe un ensemble $E_m(k)$ tel que pour chaque système $(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m)$ de cet ensemble les entiers $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m$ soient tous inférieurs ou égaux à l et que le déterminant

$$D(\nu_1, \ldots, \nu_m) = \begin{vmatrix} b_{1\nu_1} & b_{1\nu_2} & \cdots & b_{1\nu_m} \\ b_{2\nu_1} & b_{2\nu_2} & \cdots & b_{2\nu_m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{m\nu_1} & b_{m\nu_2} & \cdots & b_{m\nu_m} \end{vmatrix} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

ne s'annule pas.

Le § 2 contient la démonstration que cette condition est suffisante pour que l'inégalité (3) soit vérifiée. Comme nous le verrons, à tout nombre l vérifiant (7) correspond au moins une matrice B pour laquelle cette condition est vérifiée.

Supposons maintenant que les inégalités (3) et (5) soient vérifiées. Dans ce cas nous pouvons appliquer le théorème fondamental A qui nous apprend que le facteur arithmétique $Z(t)$ peut être écrit comme un produit infini $\prod_p Q(p, t)$, étendu à tous les nombres premiers p, qui converge absolument et uniformément par rapport à $t_1, t_2, \ldots, t_m$, et qu'il existe deux nombres positifs fixes c_2 et ω tels que

$$|L(t) - b\, Z(t)\, A(t)| \leqq c_2\, X^{\frac{1}{k_1} + \ldots + \frac{1}{k_n} - m - \omega} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

S'il est impossible de trouver n entiers $v_1, v_2, \ldots, v_n$ tels que

$$\sum_{\nu=1}^{n} b_{\mu\nu} v_\nu = t_\mu \qquad (\mu = 1, \ldots, m) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

il est clair que le système

$$\sum_{\nu=1}^{n} b_{\mu\nu} f_\nu(y_\nu) = t_\mu \qquad (\mu = 1, \ldots, m) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

n'est pas résoluble. Ceci est aussi le cas s'il existe une puissance p^β d'un nombre premier p telle que le système

$$\sum_{\nu=1}^{n} b_{\mu\nu} f_\nu(y_\nu) \equiv t_\mu \,(mod.\, p^\beta) \qquad (\mu = 1, \ldots, m) \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

ne possède aucune solution.

Supposons donc dorénavant qu'il existe n entiers v_ν avec (10) et que le système de congruences (12) soit résoluble pour chaque puissance β d'un

nombre premier quelconque p. Sans nuire à la généralité nous pouvons supposer que le coefficient du terme de plus haut degré de $f_\nu(y_\nu)$ soit positif.

Distinguons maintenant deux cas.

I. Supposons que le système de relations

$$\sum_{\nu=1}^{n} b_{\mu\nu} u_\nu = 0 \quad (\mu = 1, \ldots, m) \qquad u_\nu > 0 \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n) \quad . \quad . \quad (13)$$

possède $n-m$ solutions linéairement indépendantes. Dans ce cas on peut prendre les entiers fixes $t_1, t_2, \ldots, t_m$ arbitrairement, sous la condition que les systèmes (10) et (12) soient résolubles. Il suit du résultat général trouvé par VAN DER CORPUT dans l'article cité au renvoi [1]) que le facteur arithmétique est dans ce cas compris entre deux nombres positifs indépendants de X.

Le nombre $\Lambda(t)$ est de l'ordre de $X^{\frac{1}{k_1}+\ldots+\frac{1}{k_n}-m}$. Il résulte donc de l'inégalité (9) que $L(t)$ est aussi de l'ordre de $X^{\frac{1}{k_1}+\ldots+\frac{1}{k_n}-m}$ et croît indéfiniment avec X. Nous avons ainsi démontré le théorème suivant:

Théorème I: *Supposons vérifiées les inégalités (3) et (5) pour tout nombre positif fixe ε. Supposons que le système (13) possède $n-m$ solutions linéairement indépendantes.*

Chaque système t pour lequel (10) et (12) sont résolubles, p^β étant une puissance quelconque d'un nombre premier p arbitraire, peut être écrit d'une infinité de manières sous la forme (11) où $y_1, \ldots, y_n$ désignent des nombres naturels.

II. Le cas où on ne sait pas si le système (13) possède $n-m$ solutions linéairement indépendantes est plus difficile, puisqu'alors les nombres $t_1, \ldots, t_m$ ne peuvent peut-être pas être choisis fixes. Pour ce cas le résultat du § 3 est nécessaire. Dans ce § 3 nous nous bornons aux systèmes t tels que (12) possède pour chaque nombre premier p et pour tout nombre naturel β au moins une solution $y = (y_1, \ldots, y_n)$ à laquelle correspondent m nombres naturels différents $\nu_1, \ldots, \nu_m$ tous $\leq n$, avec la propriété que le déterminant (8) ne s'annule pas et que chacune des m dérivées $f'_\nu(y_\nu)$ $(\nu = \nu_1, \ldots, \nu_m)$ soit divisible par ζ facteurs p au plus, où ζ ne dépend ni de X, ni de $t_1, \ldots$, ni de t_m. Nous supposons en outre qu'au système t peuvent être associés n entiers v_ν avec (10). Nous montrerons alors que le facteur arithmétique est compris entre deux nombres positifs indépendants de X et de $t_1, \ldots, t_m$.

Nous ne pouvons pas nous attendre dans ce cas à trouver toujours pour $\Lambda(t)$ l'ordre de $X^{\frac{1}{k_1}+\ldots+\frac{1}{k_n}-m}$. Au contraire, l'ordre de $\Lambda(t)$ dépend de l'ordre de grandeur des entiers $X, t_1, \ldots, t_m$. Nous pouvons cependant

choisir ces nombres de façon que $\Lambda(t)$ possède effectivement l'ordre indiqué. Supposons remplie l'inégalité moins exigeante

$$\Lambda(t) > C_4 X^{\frac{1}{k_1}+\ldots+\frac{1}{k_n}-m-\varepsilon} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

quel que soit le nombre positif fixe ε. Dans ce cas il résulte de (9) que $L(t)$ est du même ordre que $\Lambda(t)$, donc positif, et que l'on obtient le résultat suivant:

Théorème II: *Supposons vérifiées les inégalités (3), (5) et (14) pour tout nombre positif ε; supposons que (10) soit résoluble et que le système (12) possède pour chaque nombre premier p et pour tout nombre naturel β au moins une solution $y = (y_1, \ldots, y_n)$ à laquelle correspondent m nombres naturels différents $\nu_1, \ldots, \nu_m$, tous $\leq n$, avec la propriété que le déterminant (8) ne s'annule pas et que chacune des m dérivées $f'_\nu(y_\nu)$ $(\nu = \nu_1, \ldots, \nu_m)$ soit divisible par ζ facteurs p au plus, ζ étant indépendant de $X, t_1, \ldots, t_m$.*

Si X est assez grand, le système t considéré peut être écrit sous la forme (11), où $y_1, \ldots, y_n$ désignent des nombres naturels.

Remarque: Le théorème de WARING que tout nombre assez grand est la somme de n puissances $k^{\text{ièmes}}$, où n est un nombre naturel dépendant uniquement de k, est un cas très particulier du théorème II, si nous pouvons démontrer que la congruence

$$1 + \sum_{\nu=1}^{n-1} y_\nu^k \equiv t \quad (mod.\ p^\beta)$$

est résoluble si n est assez grand. Cette démonstration se fait en quelques lignes [3]).

§ 2. *Démonstration de l'inégalité (3).*

Dans ce paragraphe nous cherchons la borne supérieure (3) pour le nombre N de solutions du système (2).

Posons

$$S_\lambda = \sum_{y_\lambda} e^{2\pi i(\alpha_1 b_{1\lambda} + \alpha_2 b_{2\lambda} + \ldots + \alpha_m b_{m\lambda}) f_\lambda(y_\lambda)}$$

où $\sum_{y_\lambda}$ est étendu aux entiers positifs y_λ tels que $|f_\lambda(y_\lambda)| \leq X$; $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ sont des variables réelles et nous posons $d\alpha_1\, d\alpha_2 \ldots d\alpha_m = d\alpha$.

Il est immédiat que

$$N = \int_0^1 \int_0^1 \ldots \int_0^1 |S_1 S_2 \ldots S_l|^2\, d\alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

---

[3]) E. LANDAU, Vorlesungen über Zahlentheorie, T 1 (1927), p. 290.

Lemme 1: *Le nombre N^{**} de solutions $(y_1, z_1, \ldots, y_{\lambda-1}, z_{\lambda-1}, y_{\lambda+1}, z_{\lambda+1}, \ldots, y_l, z_l)$ du système obtenu en supprimant la colonne d'indice λ dans le système (2) vérifie l'inégalité $N \leqq c_3 X^{\frac{2}{k_\lambda}} N^{**}$, c_3 étant un nombre indépendant de X.*

Le lemme 1 résulte de la formule (15) en remarquant qu'il existe une constante c_4 telle que $|S_\lambda| \leqq c_4 X^{\frac{1}{k_\lambda}}$.

Le lemme 1 montre que, si l'inégalité (3) est démontrée pour une certaine valeur de l, elle l'est pour toutes les valeurs de l plus grandes.

Démontrons d'abord que la condition (6), énoncée dans l'introduction, est suffisante pour que l'inégalité (3) soit vérifiée. Le lemme 1 nous permet de nous placer dans le cas où les matrices partielles de rang m de la matrice B ont toutes m colonnes. Désignons par Φ_h le produit des m quantités S_λ où λ parcourt les indices des colonnes de la $h^{\text{ième}}$ matrice carrée partielle et soit Ψ_k le produit des $\psi(k)$ quantités Φ_h où h correspond aux matrices partielles dont le degré associé est k. Alors

$$N = \int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1 \prod_k |\Psi_k|^2 \, d\alpha,$$

où le produit $\prod_k$ est étendu aux valeurs de k associées à au moins une des matrices partielles.

En vertu des hypothèses il correspond à chacune de ces valeurs k un nombre $m(k) \geqq s(k)$ avec

$$\sum_k \frac{\psi(k)}{m(k)} = 1.$$

L'inégalité de SCHWARZ généralisée donne alors:

$$N \leqq \prod_k \left(\int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1 |\Psi_k|^{\frac{2m(k)}{\psi(k)}} \, d\alpha \right)^{\frac{\psi(k)}{m(k)}} \quad \ldots\ldots \quad (16)$$

D'après la définition de Ψ_k on a

$$|\Psi_k| \leqq \sum_h |\Phi_h|^{\psi(k)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

Ces formules montrent qu'il suffit de connaître une borne supérieure convenable du nombre

$$\int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1 |\Phi_h|^{2m(k)} \, d\alpha$$

pour toutes les valeurs de h qui entrent en considération. Comme

$m(k) \geqq s(k)$ nous pouvons nous contenter de chercher une borne supérieure convenable du nombre

$$N' = \int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1 |\Phi_h|^{2s(k)} \, d\alpha.$$

Ce nombre N' est le nombre de solutions d'un système dont la matrice des coefficients

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1m} & a_{11} & \ldots & a_{1m} & \ldots\ldots & a_{11} & \ldots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mm} & a_{m1} & \ldots & a_{mm} & \ldots\ldots & a_{m1} & \ldots & a_{mm} \end{pmatrix}$$

se compose de $s(k)$ matrices carrées de rang m toutes égales à la $h^{\text{ième}}$ matrice partielle de B. Le déterminant

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1m} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & \ldots & a_{mm} \end{vmatrix}$$

n'est pas nul par hypothèse, car c'est le déterminant de la $h^{\text{ième}}$ matrice carrée partielle de B. Il existe donc m^2 entiers $\zeta_{\varrho\mu}$ $(\varrho = 1, 2, \ldots, m;$ $\mu = 1, 2, \ldots, m)$, dont le déterminant n'est pas nul, tels que l'on ait

$$a'_{\varrho\tau} = \zeta_{\varrho 1} a_{1\tau} + \zeta_{\varrho 2} a_{2\tau} + \ldots + \zeta_{\varrho m} a_{m\tau} \; (\tau = 1, 2, \ldots, m)$$

avec

$$a'_{\varrho\tau} = a' \neq 0 \text{ si } \varrho = \tau \text{ et } a'_{\varrho\tau} = 0 \text{ si } \varrho \neq \tau.$$

Posons

$$a'_{\varrho\varkappa} = a'_{\varrho\tau} \text{ si } \varkappa \equiv \tau \; (mod.\ m).$$

Toute solution du système considéré (dont le nombre de solutions est N') est alors aussi solution du système suivant:

$$\left.\begin{array}{ll} \sum_{\varkappa=1}^{ms(k)} a'_{\varrho\varkappa} (f_\lambda(y_\varkappa) - f_\lambda(z_\varkappa)) = 0 & (\varrho = 1, 2, \ldots, m) \\ |f_\lambda(y_\varkappa)| \leqq X, \; |f_\lambda(z_\varkappa)| \leqq X & (\varkappa = 1, 2, \ldots, ms(k)) \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad (18)$$

λ étant l'indice de la colonne de la $h^{\text{ième}}$ matrice partielle pour laquelle on a $\lambda \equiv \varkappa$ $(mod\ m)$.

Si N'' est le nombre de solutions du système (18) on a donc $N' \leqq N''$.

Or les valeurs des coefficients $a'_{\varrho\varkappa}$ montrent que le système (18) se décompose en m systèmes

$$\left.\begin{array}{ll} \sum_{\sigma=1}^{s(k)} (f_\lambda(y_\sigma) - f_\lambda(z_\sigma)) = 0 & \\ |f_\lambda(y_\sigma)| \leqq X, \; |f_\lambda(z_\sigma)| \leqq X & (\sigma = 1, 2, \ldots, s(k)) \end{array}\right\}$$

pour les m valeurs des indices λ des colonnes de la $h^{\text{ième}}$ matrice partielle de B.

En vertu de la définition de $s(k)$ on a alors:

$$N'' \leqq \left(C_5 X^{\frac{2}{k} s(k) - 1 + \frac{\varepsilon}{m}}\right)^m = C_6 X^{\frac{2}{k} m s(k) - m + \varepsilon}.$$

D'après $N' \leqq N''$ on a par conséquent

$$N' \leqq C_6 X^{\frac{2}{k} m s(k) - m + \varepsilon}.$$

Comme $m(k) \geqq s(k)$, on obtient

$$\int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1 |\Phi_h|^{2m(k)} \, da \leqq C_7 X^{\frac{2}{k} m m(k) - m + \varepsilon}.$$

Enfin les formules (16) et (17) donnent

$$N \leqq \prod_k \left(\psi(k) C_7 X^{\frac{2}{k} m m(k) - m + \varepsilon}\right)^{\frac{\psi(k)}{m(k)}} \leqq C_1 \prod_k X^{\frac{2\psi(k)}{k} m - \frac{\psi(k)}{m(k)}(m - \varepsilon)}.$$

En tenant compte de la définition de $m(k)$ et de ce que

$$\sum_k \frac{m\psi(k)}{k} = \frac{1}{k_1} + \ldots + \frac{1}{k_l}$$

il vient:

$$N \leqq C_1 X^{2\left(\frac{1}{k_1} + \ldots + \frac{1}{k_l}\right) - m + \varepsilon}$$

et nous avons démontré que l'inégalité (6) est suffisante pour que l'inégalité (3) soit vérifiée.

Mathematics. — *Zur Theorie der hypergeometrischen Funktionen.* Von C. S. MEIJER. (Communicated by Prof. J. G. VAN DER CORPUT.)

(Communicated at the meeting of March 25, 1939.)

§ 1. In der von $z = 1$ bis $z = \infty$ längs der reellen Achse aufgeschnittenen z-Ebene gelten bekanntlich für die hypergeometrische Funktion ${}_2F_1(a, b; c; z)$ die Integraldarstellungen

$$\left.\begin{aligned} {}_2F_1(a, b; c; z) &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)\,\Gamma(a)} \int_0^1 (1 - z u)^{-b} (1-u)^{c-a-1} u^{a-1} \, du \\ &\qquad [\Re(c) > \Re(a) > 0] \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (1)$$

und

$$\left.\begin{aligned} {}_2F_1(a, b; c; z) &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-b)\,\Gamma(b)} \int_0^1 (1 - z u)^{-a} (1-u)^{c-b-1} u^{b-1} \, du \\ &\qquad [\Re(c) > \Re(b) > 0]. \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (2)$$

Im Gegensatz zu den linken Seiten bekommen die rechten Seiten bei Verwechselung von a und b eine andere Gestalt. ERDÉLYI [1]) aber hat neuerdings die folgende, beiderseits symmetrische Erweiterung von (1) und (2) abgeleitet

$$\left.\begin{aligned} {}_2F_1(a, b; c; z) &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-\sigma)\,\Gamma(\sigma)} \int_0^1 {}_2F_1(a, b; \sigma; z u) (1-u)^{c-\sigma-1} u^{\sigma-1} \, du \\ &\qquad [\Re(c) > \Re(\sigma) > 0]. \end{aligned}\right\} \quad . \quad (3)$$

Es ist leicht einzusehen, dass (1) und (2) Spezialfälle von (3) sind; denn wegen

$${}_2F_1(\lambda, \mu; \lambda; w) = (1-w)^{-\mu} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

geht (3) für $\sigma = a$ in (1), für $\sigma = b$ aber in (2) über.

Ich habe eine andere Erweiterung von (1) und (2) konstruiert, nämlich

$$\left.\begin{aligned} {}_2F_1(a, b; c; z) &= \frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(c)}{\Gamma(\alpha + c - a - b)\,\Gamma(a)\,\Gamma(b)} \int_0^1 (1 - z u)^{-\alpha} \\ &\times {}_2F_1(\alpha - b, c - b; \alpha + c - a - b; 1 - u) (1-u)^{\alpha + c - a - b - 1} u^{a-1} \, du. \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (5)$$

[1]) ERDÉLYI, [5], 203.