Mathematics. — *Sur la méthode des points décisifs.* Par J. G. VAN DER CORPUT.

(Communicated at the meeting of May 20, 1939.)

Il y a quelques années j'ai publié la méthode des points décisifs dans la Compositio Mathematica [1]). Dans le présent article, dans lequel je ne traiterai qu'un cas très particulier, je ferai quelques remarques qui seront compréhensibles aussi pour le lecteur qui ne connaît pas encore la méthode. Elles lui permettront de trouver pour beaucoup d'intégrales non seulement une valeur approximative, mais aussi une borne supérieure numérique pour l'écart. La méthode peut être appliquée aux intégrales de la forme

$$\int_a^b g(u)\cos\varphi(u)\,.\,du \text{ et } \int_a^b g(u)\sin\varphi(u)\,.\,du \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

et même aux intégrales plus générales

$$I = \int_C g(w)\, e^{f(w)}\, dw,$$

où C désigne une courbe continue rectifiable située dans le plan complexe des w (une des extrémités où toutes les deux peuvent être à l'infini). Considérons la dernière intégrale. Supposons que $g(w)$ soit dérivable le long de C, c'est-à-dire que pour tout point w de C la fraction $\dfrac{g(z)-g(w)}{z-w}$ tende vers une limite finie, si le point $z \neq w$ situé sur C tend vers w. Je supposerai que cette limite, que je désignerai par $g'(w)$, soit continue le long de C. Supposons en outre que la dérivée troisième de $f(w)$, prise le long de C, existe et soit continue et qu'enfin la condition suivante, dans laquelle $\sqrt{f''(w)}$ désigne une fonction continue de w le long de C, soit vérifiée:

La courbe C ne contient aucun point w tel que $\dfrac{f'(w)}{\sqrt{f''(w)}}$ soit un nombre réel $\neq 0$ et elle contient au plus un nombre fini de points ζ avec $f'(\zeta)=0$. La dérivée $f''(\zeta)$ n'est $\geqq 0$ en aucun point ζ de C avec $f'(\zeta)=0$.

Un point ζ de C, ne coïncidant avec aucune des extrémités de C,

[1]) Zur Methode der stationären Phase II. Compositio Mathematica **3**, 328—372 (1936).

est appelé un point décisif, lorsque $f'(\zeta)=0$ et que $\Im \dfrac{f'(w)}{\sqrt{f(w)}}$ a des signes opposés [2]) de part et d'autre de ζ sur C.

Si l'on pose $f(u) = i\,\varphi(u)$ et si l'on prend pour C le segment linéaire (a, b), on obtient les intégrales figurant dans (1) et la méthode des points décisifs revient à celle de la phase stationnaire; dans ce cas la phase $\varphi(u)$ est stationnaire aux points décisifs.

La méthode des points décisifs repose essentiellement sur l'intégration par parties. Afin de pouvoir appliquer l'intégration par parties je définis pour chaque point w de C, qui ne coïncide pas avec un point décisif, certaines fonctions $\psi_0(w) = e^{f(w)}$, $\psi_1(w)$, $\psi_2(w), \ldots$ qui possèdent les propriétés suivantes:

I. Pour chaque point w de C, qui n'est pas un point décisif et pour chaque $\sigma \geqq 0$ la fonction $\psi_{\sigma+1}(w)$ est dérivable le long de C et on a [3])

$$\psi_\sigma(w) = -\psi'_{\sigma+1}(w) + \tfrac{1}{2}(\sigma+1)(\sigma+2)\, f'''(w)\, \psi_{\sigma+3}(w) \quad . \quad . \quad (2)$$

et en outre pour tout $\sigma \geqq 1$

$$|\psi_\sigma(w)| < \frac{\sigma\, 2^{\sigma+\frac{1}{2}}}{|f'(w)|^\sigma}\, |e^{f(w)}| \text{ et } < \frac{2^{\frac{1}{2}\sigma+\frac{1}{2}}\, \Gamma\left(\dfrac{\sigma}{2}\right)}{(\sigma-1)!\, |f''(w)|^{\frac{1}{2}\sigma}}\, |e^{f(w)}|. \quad . \quad (3)$$

II. Si un point w situé sur C tend vers un point ζ de C avec $f'(\zeta)=0$ de telle façon que $\Im \dfrac{f'(w)}{\sqrt{f''(w)}}$ possède constamment un signe fixe, $\psi_\sigma(w)$ tend pour chaque nombre naturel σ vers

$$\frac{2^{\frac{1}{2}\sigma-1}\, e^{\sigma i\left(\pm\frac{\pi}{2}-\gamma\right)}\, \Gamma(\frac{1}{2}\sigma)\, e^{f(\zeta)}}{(\sigma-1)!\, |f''(\zeta)|^{\frac{1}{2}\sigma}}; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

on doit prendre le signe $\pm$, selon que $\Im \dfrac{f'(w)}{\sqrt{f''(w)}}$ est constamment positif ou constamment négatif; on a $\gamma = \arg \sqrt{f''(\zeta)}$.

Ces remarques nous permettront de mettre l'intégrale

$$I_\sigma = \int_C g(w)\, \psi_\sigma(w)\, dw,$$

qui prend pour $\sigma = 0$ la valeur I, sous une autre forme. La formule (2) nous apprend

$$I_\sigma = -\int_C g(w)\, \psi'_{\sigma+1}(w)\, dw + \tfrac{1}{2}(\sigma+1)(\sigma+2) \int_C f'''(w)\, g(w)\, \psi_{\sigma+3}(w)\, dw,$$

[2]) Si $z = x + iy$, où x et y sont réels, on écrit $x = \Re z$ et $y = \Im z$.

[3]) Le raisonnement figurant à la page 341 de l'article cité dans le renvoi [1]) nous fournit les inégalités (3) avec les facteurs 8^σ et $24^{\frac{1}{2}\sigma}$, au lieu de $2^{\sigma+\frac{1}{2}}$ et $2^{\frac{1}{2}\sigma+\frac{1}{2}}$.

d'où nous obtenons en integrant par parties

$$\left.\begin{aligned} I_\sigma = &- \Big/_{C} g(w)\,\psi_{\sigma+1}(w) + \int_C g'(w)\,\psi_{\sigma+1}(w)\,dw \\ &+ \tfrac{1}{2}(\sigma+1)(\sigma+2)\int_C f'''(w)\,g(w)\,\psi_{\sigma+3}(w)\,dw. \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Le premier terme du membre de droite est la somme des contributions des extrémités de C et de celles des points décisifs. La relation (4) nous fournit les contributions des points décisifs. Cette formule nous donne aussi celle d'une extrémité, dans le cas particulier où la dérivée de f s'y annule. Si ζ est une extrémité de C, située à l'infini, et si

$$\frac{g(w)\,e^{f(w)}}{|f'(w)|^{\sigma+1} + |f''(w)|^{\frac{1}{2}\sigma+\frac{1}{2}}} \to 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

w parcourant la courbe C et tendant vers ζ, la contribution de cette extrémité ζ vaut zéro en vertu de (3).

Au besoin on peut répéter l'intégration par parties, si du moins les fonctions $f(w)$ et $g(w)$ sont dérivables le long de C un nombre suffisant de fois. On peut écrire ainsi I_σ comme la somme de quelques termes calculables d'une manière élémentaire et de plusieurs intégrales de la forme

$$\int_C \chi(w)\,\psi_\tau(w)\,dw;$$

(3) donne pour la valeur absolue de ces dernières intégrales une borne supérieure numérique.

Passons maintenant à la démonstration. A tout point w de C j'adjoins l'ensemble des points z avec

$$\mathfrak{I}\{f'(w)(z-w) + \tfrac{1}{2}f''(w)(z-w)^2\} = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Cet ensemble est une droite ou une hyperbole équilatère, selon que $f''(w)$ est égal à zéro ou non. Si $f''(w)$ vaut zéro, je désigne par $W(w)$ la partie de cette droite formée par les points z avec

$$f'(w)(z-w) + \tfrac{1}{2}f''(w)(z-w)^2 \leqq 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Lorsque $f''(w) \neq 0$ et que w n'est pas un point décisif, je distingue deux cas différents:

1. Traitons d'abord le cas où $\dfrac{(f'(w))^2}{f''(w)}$ n'est pas réel. L'hyperbole équilatère définie par (7) ne contient pas son centre z_0 qui est défini par

$$f'(w) + f''(w)(z_0 - w) = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

L'hyperbole équilatère n'est donc pas dégénérée et le point w est situé sur une seule branche de l'hyperbole. Par $W(w)$ je désigne la partie de cette branche qui est formée par les points z avec (8).

2. Traitons ensuite le cas où la fraction $\dfrac{(f'(w))^2}{f''(w)}$ est réelle. Les conditions imposées à la fonction $f(w)$ nous apprennent que cette fraction n'est pas > 0, de sorte qu'elle est négative ou nulle. Si elle est négative, l'hyperbole équilatère définie par (7) est formée par deux droites d et d', dont une seule contient w. Soit d la droite contenant w. Je désigne par $W(w)$ la partie de d qui est limitée au point w et qui ne contient pas le point d'intersection z_0 des deux droites d et d'. Ce point z_0 vérifie (9) et donc aussi

$$f'(w)(z-w) + \tfrac{1}{2}f''(w)(z-w)^2 = -\frac{(f'(w))^2}{2f''(w)} > 0,$$

de sorte que (8) vaut par chaque point z de $W(w)$. Si $f'(w) = 0$ et si w n'est pas un point décisif, un point w_1 de C tendant vers w possède la propriété que $W(w_1)$ tend vers une demi-droite (bornée par w) que j'appelle $W(w)$.

La courbe $W(w)$ étant ainsi définie d'une manière univoque pour tout point w de C ne coïncidant pas avec un point décisif, j'introduis les fonctions $\psi_\sigma(w)$ $(\sigma \geqq 1)$ par la définition

$$\psi_\sigma(w) = \frac{1}{(\sigma-1)!}\int_w^\infty (z-w)^{\sigma-1}\, e^{f(w)+f'(w)(z-w)+\frac{1}{2}f''(w)(z-w)^2}\,dz,$$

où l'intégrale est prise le long de $W(w)$.

Démonstration de (2).

Posons pour tout entier $\sigma \geqq 0$

$$F_\sigma(w, z) = \frac{1}{\sigma!}(z-w)^\sigma\, e^{p(w,z)},$$

où

$$p(w, z) = f(w) + f'(w)(z-w) + \tfrac{1}{2}f''(w)(z-w)^2.$$

Si w désigne un point de C ne coïncidant pas avec un point décisif et si $h \neq 0$ est en valeur absolue assez petit, $w+h$ désignant un point de C, on a

$$\int_{w+h}^\infty F_\sigma(w+h, z)\,dz - \int_w^\infty F_\sigma(w+h, z)\,dz = -\int_w^{w+h} F_\sigma(w+h, z)\,dz.$$

En vertu de

$$F_0(w, w) = e^{f(w)} = \psi_0(w) \text{ et } F_\sigma(w, w) = 0 \qquad (\sigma \geqq 1)$$

on obtient pour $h \to 0$

$$\frac{1}{h}\int_{w+h}^\infty F_\sigma(w+h, z)\,dz - \frac{1}{h}\int_w^\infty F_\sigma(w+h, z)\,dz \to -\psi_0(w) \text{ ou } 0,$$

selon que σ est nul ou positif. On a

$$\frac{\partial F_\sigma(w, z)}{\partial w} = \left(\frac{1}{\sigma!}(z-w)^{\sigma+2}\tfrac{1}{2} f'''(w) - \frac{1}{(\sigma-1)!}(z-w)^{\sigma-1}\right) e^{p(w,z)};$$

pour $\sigma = 0$ le terme $\frac{1}{(\sigma-1)!}(z-w)^{\sigma-1}$ n'apparaît pas. Par conséquent on trouve pour $h \to 0$

$$\int_w^\infty \frac{F_0(w+h, z) - F_0(w)}{h}\, dz \to \tfrac{1}{2} f'''(w) \int_w^\infty (z-w)^2 e^{p(z,w)}\, dz = f'''(w)\, \psi_3(w)$$

et en outre pour chaque nombre naturel σ

$$\int_w^\infty \frac{F_\sigma(w+h, z) - F_\sigma(w)}{h}\, dz \to \tfrac{1}{2}(\sigma+1)(\sigma+2) f'''(w)\, \psi_{\sigma+3}(w) - \psi_\sigma(w).$$

Finalement on trouve donc

$$\frac{\psi_{\sigma+1}(w+h) - \psi_{\sigma+1}(w)}{h} = \frac{1}{h}\int_{w+h}^\infty F_\sigma(w+h, z)\, dz - \frac{1}{h}\int_w^\infty F_\sigma(w+h, z)\, dz$$

$$+ \int_w^\infty \frac{F_\sigma(w+h) - F_\sigma(w)}{h}\, dz$$

$$\to -\psi_\sigma(w) + \tfrac{1}{2}(\sigma+1)(\sigma+2) f'''(w)\, \psi_{\sigma+3}(w).$$

Démonstration de (3).

Pour la démonstration de (3), j'ai besoin d'un lemme.

Lemme: *Deux points* $P_1(x_1, y_1)$ *et* $P_2(x_2, y_2)$ *situés sur une même branche de l'hyperbole équilatère* $x^2 - y^2 = c^2$ $(c > 0)$, *vérifient les inégalités*

$$|x_2 y_2 - x_1 y_1| \geqq \tfrac{1}{2}\, O P_1 \,.\, P_1 P_2 \,. \qquad (10)$$

et

$$|x_2 y_2 - x_1 y_1| \geqq \tfrac{1}{2}\, P_1 P_2^2, \qquad (11)$$

où O *désigne l'origine des coordonnées.*

Remarque: Dans aucun des deux membres de droite le facteur $\frac{1}{2}$ ne peut être remplacé par une constante plus grande; en effet, si $x_2 = c$ et $y_2 = o$, les deux fractions

$$\frac{|x_2 y_2 - x_1 y_1|}{O P_1 \,.\, P_1 P_2} \quad \text{et} \quad \frac{|x_2 y_2 - x_1 y_1|}{P_1 P_2^2}$$

tendent vers $\frac{1}{2}$, lorsque x_1 croît indéfiniment.

Démonstration: Sans nuire à la généralité nous pouvons supposer que P_1 et P_2 sont situés à droite de l'axe des y. Si l'on pose

$$x = \tfrac{1}{2} c (e^\alpha + e^{-\alpha}) \quad \text{et} \quad y = \tfrac{1}{2} c (e^\alpha - e^{-\alpha})$$

et si $\alpha = \beta$ et $\alpha = \gamma$ correspondent aux points P_1 et P_2, on a

$$x_2 y_2 - x_1 y_1 = \tfrac{1}{4} c^2 (e^{2\gamma} - e^{-2\gamma} - e^{2\beta} + e^{-2\beta})$$
$$= \tfrac{1}{4} c^2 (e^{-2\beta} - e^{-2\gamma})(e^{2\beta+2\gamma} + 1),$$
$$O P_1^2 = \tfrac{1}{2} c^2 (e^{2\beta} + e^{-2\beta})$$

et

$$P_1 P_2^2 = \tfrac{1}{4} c^2 (e^\gamma + e^{-\gamma} - e^\beta - e^{-\beta})^2 + \tfrac{1}{4} c^2 (e^\gamma - e^{-\gamma} - e^\beta + e^{-\beta})^2$$
$$= \tfrac{1}{2} c^2 (e^\gamma - e^\beta)^2 + \tfrac{1}{2}(e^{-\gamma} - e^{-\beta})^2$$
$$= \tfrac{1}{2} c^2 (e^{-\gamma} - e^{-\beta})^2 (e^{2\beta+2\gamma} + 1).$$

Par conséquent (10) découle de l'inégalité évidente

$$(e^{-\gamma} + e^{-\beta})^2 (e^{2\beta+2\gamma} + 1) \geqq e^{2\beta} + e^{-2\beta}$$

et (11) résulte de

$$e^{-\gamma} + e^{-\beta} \geqq |e^{-\gamma} - e^{-\beta}|.$$

Afin d'obtenir (3) je démontrerai d'abord pour tout point w de C ne coïncidant pas avec un point décisif et pour tout point z de $W(w)$ les inégalités

$$\left.\begin{aligned} \Re\{f'(w)(z-w) + \tfrac{1}{2} f''(w)(z-w)^2\} &\leqq -\tfrac{1}{2}|f'(w)|\,|z-w| \\ \text{et } &\leqq -\tfrac{1}{4}|f''(w)|\,|z-w|^2. \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

Ces inégalités sont évidentes, si $f''(w) = 0$, comme le membre de gauche est alors égal à $-|f'(w)|\,|z-w|$. Traitons ensuite le cas où $f''(w) \neq 0$ et que l'hyperbole équilatère définie par (7) est formée par deux droites. Sans nuire à la généralité on peut supposer que cette hyperbole soit formée par les axes réel et imaginaire et que w soit positif, sinon il suffit d'effectuer une translation et une rotation. Dans ce cas on a $f'(w) \leqq 0$ et $f''(w) \leqq 0$ et $W(w)$ est formé par les points $z \geqq w$, de sorte que les inégalités en question sont évidentes.

Traitons enfin le cas où $f''(w) \neq 0$ et où l'hyperbole equilatère définie par (7) n'est pas dégénérée. Sans nuire à la généralité on peut supposer que l'origine des coordonnées coïncide avec le centre de l'hyperbole et que l'axe réel coïncide avec l'axe focal de l'hyperbole; au besoin on effectue une translation et une rotation. Dans ce cas on a

$$\Im\left(f'(w)(z-w) + \tfrac{1}{2} f''(w)(z-w)^2\right) = \lambda (x^2 - y^2 - c^2),$$

où λ est réel et c positif, d'où il suit

$$f'(w)(z-w) + \tfrac{1}{2} f''(w)(z-w)^2 = i\lambda z^2 + \mu - i\lambda c^2$$

(μ réel), par conséquent

$$\Re\{f'(w)(z-w)+\tfrac{1}{2}f''(w)(z-w)^2\}=-2\lambda xy+\mu.$$

Si les coordonnées de w sont désignées par x_1 et y_1, on a donc $\mu=2\lambda x_1 y_1$ et

$$\begin{aligned}|\Re\{f'(w)(z-w)+\tfrac{1}{2}f''(w)(z-w)^2\}| &= 2|\lambda|\,|xy-x_1y_1|\\ &\geqq |\lambda|\,|w|\,|z-w| \text{ et } \geqq |\lambda|\,|z-w|^2\end{aligned}$$

d'après le lemme précédent. En vertu de $f'(w)=2i\lambda w$ et $f''(w)=2i\lambda$ on obtient de cette manière les inégalités (12), dont le membre de gauche est $\leqq 0$.

Si l'on pose $|z-w|=\varrho$, on a pour tout point $z\neq w$ de $W(w)$, que $\left|\frac{d\varrho}{dz}\right|=\cos\varphi$, où φ est l'angle positif $<\frac{\pi}{4}$ formé au point z par l'hyperbole (7) et la droite joignant z à w; on a donc $\left|\frac{d\varrho}{dz}\right|<\frac{1}{2}\sqrt{2}$ et $|\psi_\sigma(w)|$ est pour chaque nombre naturel σ inférieur à

$$\frac{1}{(\sigma-1)!}\int_0^\infty \varrho^{\sigma-1}\,|e^{f(w)}|\,e^{-\frac{1}{2}|f'(w)|\varrho}\sqrt{2}\,d\varrho$$

et aussi inférieur à

$$\frac{1}{(\sigma-1)!}\int_0^\infty \varrho^{\sigma-1}\,|e^{f(w)}|\,e^{-\frac{1}{2}|f''(w)|\varrho^2}\sqrt{2}\,d\varrho,$$

d'où suit (3).

Démonstration de (4).

Sans nuire à la généralité nous pouvons supposer que le point w situé sur C tend vers ζ de telle façon que $\Im\frac{f'(w)}{\sqrt{f''(w)}}$ soit toujours positif; sinon il suffit de remplacer $\sqrt{f''(w)}$ par $-\sqrt{f''(w)}$ et γ par $\gamma+\pi$.

Pour chaque point z de $W(w)$ on a

$$f'(w)(z-w)+\tfrac{1}{2}f''(w)(z-w)^2=-p, \quad \ldots\ldots \quad (13)$$

où p est $\geqq 0$. Si w et p sont donnés, le point z sur $W(w)$, défini par (13), est déterminé univoquement et, si nous désignons cette valeur de z par $z_p(w)$, nous avons

$$z_p(w)=w-\frac{f'(w)}{f''(w)}+\frac{1}{\sqrt{f''(w)}}\chi_p(w),$$

où $\chi_p(w)$ est une fonction continue de la variable $p\geqq 0$, qui prend pour $p=0$ la valeur $\frac{f'(w)}{\sqrt{f''(w)}}$ et qui possède pour $p\geqq 0$ une des deux valeurs $\pm\sqrt{-2p+\frac{(f'(w))^2}{f''(w)}}$. Comme $\frac{f'(w)}{\sqrt{f''(w)}}$ n'est pas réel, le cas $\frac{(f'(w))^2}{f''(w)}\geqq 0$

est exclu et $-2p+\frac{(f'(w))^2}{f''(w)}$ n'est $\geqq 0$ pour aucune valeur $\geqq 0$ de p. L'argument de $\chi_p(w)$ n'est donc pas égal à un multiple de π. Comme $\chi_p(w)$ est une fonction continue de $p\geqq 0$ et possède pour $p=0$ la valeur $\frac{f'(w)}{\sqrt{f''(w)}}$, dont la partie imaginaire est positive, nous pouvons supposer que cet argument soit situé entre 0 et π. Si p est un nombre positif fixe, et si w tend sur C vers ζ, le nombre $\chi_p(w)$ tend vers le nombre purement imaginaire $\pm\sqrt{-2p}$, dont l'argument est donc égal à $+\frac{\pi}{2}$. Le point $z_p(w)$ tend donc vers un point

$$\zeta+\frac{ih_p}{\sqrt{f''(w)}},$$

où h_p est positif, de sorte que $W(w)$ se transforme en la droite qui joint les deux points ζ et $\zeta+\frac{i\infty}{\sqrt{f''(\zeta)}}$. Par conséquent $\psi_\sigma(w)$ tend pour chaque nombre naturel σ vers

$$\frac{1}{(\sigma-1)!}\int_\zeta^{\zeta+\frac{i\infty}{\sqrt{f''(\zeta)}}}(z-\zeta)^{\sigma-1}\,e^{f(\zeta)+\frac{1}{2}f''(\zeta)(z-\zeta)^2}\,dz$$

$$=\frac{2^{\frac{1}{2}\sigma-1}\,e^{\sigma i\left(\frac{\pi}{2}-\gamma\right)}\,\Gamma(\frac{1}{2}\sigma)\,e^{f(\zeta)}}{(\sigma-1)!\,|f''(\zeta)|^{\frac{1}{2}\sigma}},$$

où $\gamma=arg\sqrt{f''(w)}$.