Mathematics. — *Sur la discrépance modulo un.* (Première communication.)
Par J. G. VAN DER CORPUT et CH. PISOT.

(Communicated at the meeting of May 20, 1939.)

Soit U un système de n nombres réels $u_1, u_2, \ldots, u_n$. Nous attachons à chaque suite U un nombre $D(U)$ que nous appelons la *discrépance modulo un* de U et que nous définissons de la manière suivante:

Soient α et λ des nombres réels quelconques, nous désignons par $N(\alpha, \alpha+\lambda)$ le nombre des u_ν de la suite U compris modulo un entre α et $\alpha+\lambda$, c'est-à-dire de façon précise $N(\alpha, \alpha+\lambda)$ est le nombre des u_ν de la suite U qui vérifient les inégalités:

$$0 \leqq u_\nu - \alpha - [u_\nu - \alpha] < \lambda - [\lambda],$$

où $[a]$ désigne l'entier de a.

Posons

$$N(\alpha, \alpha+\lambda) = (\lambda - [\lambda] + D(\alpha, \alpha+\lambda))\, n.$$

Par définition $D(U)$ est le plus petit nombre tel que l'on ait:

$$|D(\alpha, \alpha+\lambda)| \leqq D(U)$$

pour toutes les valeurs de α et de λ.

Remarquons que $N(\alpha, \alpha+\lambda)$ et $D(\alpha, \alpha+\lambda)$ sont des fonctions périodiques de période 1 en α et en λ, nulles pour $\lambda = 0$. Comme $N(\alpha, \alpha+\lambda) \leqq n$, on a $|D(\alpha, \alpha+\lambda)| \leqq 1$ et par suite $D(U) \leqq 1$. D'autre part étant donné un nombre ε aussi petit que l'on veut, il y a toujours au moins un nombre α tel que $N(\alpha, \alpha+\varepsilon) \geqq 1$, donc pour lequel $D(\alpha, \alpha+\varepsilon) \geqq \frac{1-\varepsilon}{n}$; on a donc aussi $D(U) \geqq \frac{1}{n}$.

Enfin la fonction $D(\alpha, \beta)$ possède la propriété additive suivante: Quels que soient les nombres α, β, γ, on a

$$D(\alpha, \beta) + D(\beta, \gamma) = D(\alpha, \gamma).$$

En effet, en vertu de la périodicité en β de $D(\alpha, \beta)$ et en γ de $D(\beta, \gamma)$. nous pouvons supposer que

$$\alpha \leqq \beta < \alpha + 1 \quad \text{et} \quad \beta \leqq \gamma < \beta + 1,$$

de sorte que $\alpha \leqq \gamma < \alpha + 2$. Dans ces conditions

$$N(\alpha, \beta) = n(\beta - \alpha + D(\alpha, \beta)),\ N(\beta, \gamma) = n(\gamma - \beta + D(\beta, \gamma));$$
$$N(\alpha, \gamma) = n(\gamma - \alpha + D(\alpha, \gamma)) \text{ si } \alpha \leqq \gamma < \alpha + 1$$

et

$$N(\alpha, \gamma) = n(\gamma - \alpha - 1 + D(\alpha, \gamma)) \text{ si } \alpha + 1 \leqq \gamma < \alpha + 2.$$

Or si

$$\alpha \leqq \gamma < \alpha + 1, \text{ on a } N(\alpha, \beta) + N(\beta, \gamma) = N(\alpha, \gamma)$$

et si

$$\alpha + 1 \leqq \gamma < \alpha + 2, \text{ on a } N(\alpha, \beta) + N(\beta, \gamma) = n + N(\alpha, \gamma),$$

la propriété est donc démontrée.

En particulier pour $\gamma = \alpha$ on obtient la relation $D(\alpha, \beta) = -D(\beta, \alpha)$ valable pour tous les nombres α et β.

Désignons par U_2 le système des n^2 nombres $u_\nu - u_\varrho$ ($\nu = 1, 2, \ldots, n$; $\varrho = 1, 2, \ldots, n$). M. VINOGRADOW [1]) a montré que si les n nombres $nu_1, \ldots, nu_n$ sont entiers, la connaissance de $D(U_2)$ permet de trouver une borne supérieure pour $D(U)$, à savoir:

$$D(U) < C \sqrt[3]{D(U_2)}$$

où C est une constante absolue convenable.

VAN DER CORPUT a amélioré le résultat de M. VINOGRADOW en démontrant l'inégalité plus forte

$$D(U) < 2^{5+\sqrt{2|\log D(U_2)|}} \sqrt{D(U_2)}$$

et cela sans supposer les nombres $nu_1, \ldots, nu_n$ entiers [2]). Dans cette communication nous démontrerons dans les mêmes conditions l'inégalité plus précise

$$D(U) < 2^{\frac{7}{2}+\sqrt{\frac{|\log D(U_2)|}{\log 2}}} \sqrt{D(U_2)}. \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

Nous en déduirons l'inégalité équivalente

$$D(U) < 2^{\frac{7}{2}+\frac{1}{4\varepsilon}} (D(U_2))^{\frac{1}{2}-\varepsilon}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

valable pour tout $\varepsilon > 0$. L'inégalité de M. VINOGRADOW s'obtient en prenant $\varepsilon = \frac{1}{6}$ dans l'inégalité (2). On trouve ainsi que 2^5 est une valeur possible pour la constante absolue C.

Comme nous le démontrerons dans les communications suivantes, le même raisonnement permet d'obtenir pour la répartition modulo un des polynômes les mêmes résultats que par la méthode de WEYL et de baser la théorie de la répartition uniforme modulo un sur des considérations élémentaires.

---

[1]) Ueber die Bruchteile eines ganzen Polynoms. Bull. Acad. Sci. U.R.S.S., (6) T. 20, p. 585—600 (1926).

[2]) La démonstration de cette inégalité n'a pas encore paru, mais le résultat a déjà été publié par J. F. KOKSMA: Diophantische Approximationen (1936). Ergebnisse der Mathematik, Band 4, Julius Springer, 157 p., voir p. 95.

Dans la démonstration nous allons introduire un entier $k \geqq 2$. Nous désignerons, quels que soient les nombres réels α et β, la quantité $D\left(\frac{\alpha}{k}, \frac{\beta}{k}\right)$ par $\triangle(\alpha, \beta)$. D'autre part nous désignerons par $N_2(\alpha, \beta)$, $D_2(\alpha, \beta)$, $\triangle_2(\alpha, \beta)$ les quantités $N(\alpha, \beta)$, $D(\alpha, \beta)$, $\triangle(\alpha, \beta)$ relatives à la suite U_2. La démonstration se fera en six étapes.

1°) **Identité de Vinogradow** [3]. *Soit $k \geqq 2$ entier et supposons les n nombres $ku_1, \ldots, ku_n$ entiers. Pour tout entier t on a*

$$\sum_{h=0}^{k-1} (\triangle(h, h+t))^2 = \sum_{l=0}^{\tau-1} \triangle_2(-l, l+1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

où τ désigne la valeur absolue de la différence entre t et le multiple entier de k le plus voisin de t, et où par convention le symbole $\sum_{l=0}^{-1}$ représente 0.

Remarque: Si k augmente indéfiniment, l'identité devient

$$\int_0^1 (D(\alpha, \alpha+\lambda))^2 \, d\alpha = \int_0^{\mu} D_2(-\alpha, \alpha) \, d\alpha$$

où μ est la valeur absolue de la différence entre λ et l'entier le plus voisin de λ. Cette relation est valable pour toute suite U et tout nombre λ. Comme nous voulons donner une démonstration élémentaire nous n'utiliserons pas cette relation entre intégrales.

L'identité (3) est vérifiée pour $t=0$, les deux membres de l'identité étant nuls. En vertu de la périodicité en λ de $D(\alpha, \alpha+\lambda)$ le premier membre de (3) est une fonction périodique en t de période k; le deuxième membre de (3) est aussi périodique en t avec la période k, car il en est ainsi de τ. Il suffit donc de démontrer l'idendité pour $0 < t < k$.

Posons $E(h) = \triangle(h, h+1)$, alors en vertu de la propriété additive de la fonction $\triangle$ on a pour tout entier z

$$\sum_{h=0}^{k-1} E(h+z) = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Le nombre des u_ν avec

$$u_\nu \equiv \frac{h}{k} \pmod 1$$

est aussi le nombre des u_ν vérifiant les inégalités:

$$0 \leqq u_\nu - \frac{h}{k} - \left[u_\nu - \frac{h}{k}\right] < \frac{1}{k}$$

c'est-à-dire $N\left(\frac{h}{k}, \frac{h+1}{k}\right) = \left(\frac{1}{k} + E(h)\right) n.$

[3]) M. VINOGRADOW a démontré cette identité dans le cas particulier où $k = n$.

Posons $E_2(h) = \triangle_2(h, h+1)$. Si y et l sont des entiers quelconques, le nombre des éléments $u_\nu - u_\varrho$ du système U_2 avec

$$u_\nu - u_\varrho \equiv \frac{y-l}{k} \pmod 1. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

est donc $n^2\left(\frac{1}{k} + E_2(y-l)\right)$. D'autre part le nombre des u_ν avec

$$u_\nu \equiv \frac{y+h}{k} \pmod 1$$

est $n\left(\frac{1}{k} + E(y+h)\right)$ et à chacun de ces u_ν correspondent $n\left(\frac{1}{k} + E(l+h)\right)$ nombres u_ϱ avec

$$u_\varrho \equiv \frac{l+h}{k} \pmod 1.$$

Le nombre des éléments $u_\nu - u_\varrho$ du système U_2 avec (5) est donc aussi:

$$\sum_{h=0}^{k-1} \left\{ n\left(\frac{1}{k} + E(y+h)\right) . \, n\left(\frac{1}{k} + E(l+h)\right) \right\}.$$

En vertu de la relation (4) appliquée avec $z = y$ et avec $z = l$, cette expression peut s'écrire:

$$n^2 \left\{ \frac{1}{k} + \sum_{h=0}^{k-1} (E(y+h) E(l+h)) \right\},$$

et on a donc:

$$E_2(y-l) = \sum_{h=0}^{k-1} (E(y+h) E(l+h)). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

La propriété additive de la fonction $\triangle_2$ permet d'écrire pour tout entier $t \geqq 1$:

$$\sum_{y=0}^{t-1} \triangle_2(y-l, y-l+1) = \triangle_2(-l, t-l),$$

d'où en vertu de (6)

$$\triangle_2(-l, t-l) = \sum_{y=0}^{t-1} E_2(y-l) = \sum_{y=0}^{t-1} \sum_{h=0}^{k-1} (E(y+h) E(l+h))$$

et de ce que

$$\sum_{l=0}^{t-1} \triangle_2(-l, l+1) - \sum_{l=0}^{t-1} \triangle_2(-l, t-l) = \sum_{l=0}^{t-1} \triangle_2(t-l, l+1)$$

$$= \sum_{z=0}^{t-1} \triangle_2(z+1, t-z) = -\sum_{z=0}^{t-1} \triangle_2(t-z, z+1) = 0,$$

on a

$$\sum_{l=0}^{t-1} \triangle_2(-l, l+1) = \sum_{l=0}^{t-1} \triangle_2(-l, t-l) = \sum_{l=0}^{t-1} \sum_{y=0}^{t-1} \sum_{h=0}^{k-1} (E(y+h)\, E(l+h))$$

$$= \sum_{h=0}^{k-1} \left(\sum_{y=0}^{t-1} E(y+h) \right)^2 = \sum_{h=0}^{k-1} (\triangle(h, h+t))^2.$$

Enfin remarquons que $\triangle_2(-l', l'+1) = -\triangle_2(-l, l+1)$ lorsque $l + l' = k-1$. Il en résulte que

$$\sum_{l=0}^{t-1} \triangle_2(-l, l+1) = \sum_{l=0}^{\tau-1} \triangle_2(-l, l+1)$$

et l'identité (3) est démontrée.

2°) *Soit $k \geqq 2$ entier et supposons les nombres $k u_\nu$ $(\nu = 1, \ldots, n)$ entiers. Pour tout entier r et tout entier $q > 0$ on a l'inégalité:*

$$\sum_{u=r}^{r+k-1} \sum_{v=u-q}^{u+q} (\triangle(u, v))^2 \leqq q(q+1)\, D(U_2). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Posons $u = v + w$; comme $\triangle(u, v) = -\triangle(v, u)$ le premier membre de (7) peut s'écrire

$$\sum_{w=-q}^{q} \sum_{v=r-w}^{r-w+k-1} (\triangle(v, v+w))^2.$$

En vertu de la périodicité en α de $\triangle(\alpha, \alpha + \lambda)$ on a

$$\sum_{v=r-w}^{r-w+k-1} (\triangle(v, v+w))^2 = \sum_{v=0}^{k-1} (\triangle(v, v+w))^2.$$

L'idendité (3) appliquée avec $t = w$ donne par conséquent:

$$\sum_{u=r}^{r+k-1} \sum_{v=u-q}^{u+q} (\triangle(u, v))^2 = \sum_{w=-q}^{q} \sum_{l=0}^{\omega-1} \triangle_2(-l, l+1),$$

où ω est la valeur absolue de la différence entre w et le multiple de k le plus voisin de w. Le deuxième membre est en valeur absolue inférieur à

$$D(U_2) \sum_{w=-q}^{q} \omega = 2\, D(U_2) \sum_{w=1}^{q} \omega \leqq q(q+1)\, D(U_2).$$

3°) *Soit $k \geqq 2$ entier et supposons les nombres $k u_\nu$ $(\nu = 1, \ldots, n)$ entiers. Soient r et s des entiers arbitraires avec $|s - r| < k$, alors*

$$|\triangle(r, s)| \leqq Max \left\{ 4 \frac{|s-r|}{k}, 2^4 \sqrt{D(U_2)} \right\}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

On peut supposer $s \neq r$, car pour $s = r$ le premier membre de (8) s'annule. De même nous pouvons supposer

$$|\triangle(r, s)| > 4 \frac{|s-r|}{k}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Soit j l'intervalle fermé d'extrémités r et s. Pour chaque entier u de j, l'une au moins des quatre inégalités suivantes est vérifiée:

$$\triangle(u, s) \geqq \tfrac{1}{2} |\triangle(r, s)| \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

$$\triangle(u, s) \leqq -\tfrac{1}{2} |\triangle(r, s)| \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

$$\triangle(r, u) \geqq \tfrac{1}{2} |\triangle(r, s)|$$

$$\triangle(r, u) \leqq -\tfrac{1}{2} |\triangle(r, s)|.$$

En effet dans le cas contraire on aurait

$$|\triangle(r, u)| + |\triangle(u, s)| < |\triangle(r, s)|.$$

Comme j contient $|s-r| + 1$ entiers, l'une au moins de ces quatre inégalités est vérifiée par au moins $\frac{1}{4}(|s-r| + 1)$ valeurs de u. Puisque $\triangle(\alpha, \beta) = -\triangle(\beta, \alpha)$, on peut même supposer que (10) ou (11) soit vérifiée par au moins $\frac{1}{4}(|s-r| + 1)$ entiers u de j, sinon on changerait r en s et s en r. Lorsqu'il en est ainsi pour l'inégalité (10) respectivement (11), nous dirons que nous sommes dans le cas (10) respectivement (11).

Nous désignerons par j^* l'intervalle fermé de longueur $|s-r|$, d'extrémité s et situé à droite de s dans le cas (10) et à gauche de s dans le cas (11).

Soient h et w des entiers avec

$$h \leqq w \leqq h + |s-r|, \text{ alors } N\left(\frac{h}{k}, \frac{w}{k}\right) \geqq 0$$

donc

$$\triangle(h, w) \geqq -\frac{w-h}{k} \geqq -\frac{|s-r|}{k}$$

et d'après (9)

$$\triangle(h, w) > -\tfrac{1}{4} |\triangle(r, s)|. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Soit v un entier de j^*. Dans le cas (10) on a $s \leqq v \leqq s + |s-r|$; l'inégalité (12) avec $h = s$, $w = v$ donne

$$\triangle(s, v) > -\tfrac{1}{4} |\triangle(r, s)|.$$

Dans le cas (11) on a $v \leqq s \leqq v + |s-r|$; l'inégalité (12) avec $h = v$, $w = s$ donne

$$\triangle(v, s) > -\tfrac{1}{4} |\triangle(r, s)|.$$

Il y a donc au moins $\frac{1}{4}(|s-r| + 1)$ entiers u de j tels que pour tout v de j^* on ait (en vertu de la propriété additive de la fonction $\triangle$) dans le cas (10):

$$\triangle(u, v) = \triangle(u, s) + \triangle(s, v) > (\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4}) |\triangle(r, s)|,$$

et dans le cas (11):

$$\triangle(u, v) = \triangle(u, s) - \triangle(v, s) < (-\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4}) |\triangle(r, s)|.$$

On a donc pour au moins $\frac{1}{4}(|s-r|+1)$ entiers u de j et pour $|s-r|+1$ entiers v de j^* l'inégalité:

$$|\triangle(u,v)| > \tfrac{1}{4}|\triangle(r,s)|.$$

L'inégalité (7) peut être appliquée avec $q = 2|s-r|$, et comme

$$|u-v| \leqq 2|s-r|,$$

elle donne:

$$\tfrac{1}{4}(|s-r|+1)(|s-r|+1)\tfrac{1}{16}|\triangle(r,s)|^2 < 2|s-r|(2|s-r|+1)D(U_2)$$

d'où

$$|\triangle(r,s)| < 16\sqrt{D(U_2)}$$

et l'inégalité (8) est démontrée.

4°) *Soit $k \geqq 2$ entier et supposons les nombres ku_ν $(\nu = 1, \ldots, n)$ entiers. Pour tout nombre réel $\sigma > 0$, tout entier $m \geqq 1$ et pour chaque couple d'entiers r et s avec $|s-r| < k$ on a l'inégalité:*

$$|\triangle(r,s)| \leqq Max\left\{\varphi(m,\sigma)\left(\frac{|s-r|}{k}(D(U_2))^{m-1}\right)^{\frac{1}{2m-1}};\ 2^{m+3}(1-2^{-\sigma})^{-m+1}\sqrt{D(U_2)}\right\} \quad (13)$$

où

$$\varphi(m,\sigma) = \{2^{m^2+(2\sigma+1)m-2\sigma}(1-2^{-\sigma})^{-(m-1)^2}\}^{\frac{1}{2m-1}}.$$

L'inégalité (13) est vérifiée pour $m = 1$ car elle se réduit alors à (8). Nous pouvons donc supposer que $m \geqq 2$ et que l'inégalité (13) soit déjà démontrée pour $m-1$ au lieu de m.

On peut admettre que $r \neq s$, le premier membre de (13) étant nul pour $r = s$. De plus nous pouvons supposer que

$$|\triangle(r,s)| > 2^{m+3}(1-2^{-\sigma})^{-m+1}\sqrt{D(U_2)}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

Enfin nous pouvons supposer que le nombre d'entiers u de l'intervalle j avec

$$|\triangle(u,s)| \geqq \tfrac{1}{2}|\triangle(r,s)| \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

est au moins $\frac{1}{2}(|s-r|+1)$; on échangerait dans le cas contraire r et s.

Soient alors v les entiers de j pour lesquels on a

$$|s-v| \leqq k\left\{\frac{(1-2^{-\sigma})}{2\varphi(m-1,\sigma)}|\triangle(r,s)|\right\}^{2m-3}(D(U_2))^{-m+2}. \quad . \quad . \quad (16)$$

Nous désignerons le second membre de cette inégalité par g.

En appliquant à un entier v vérifiant (16) l'inégalité (13) avec $m-1$ à la place de m et v à la place de r, il vient:

$$|\triangle(v,s)| < Max\left\{\varphi(m-1,\sigma)\left(\frac{|s-v|}{k}(D(U_2))^{m-2}\right)^{\frac{1}{2m-3}};\ 2^{m+2}(1-2^{-\sigma})^{-m+2}\sqrt{D(U_2)}\right\}$$

ce qui d'après (16) donne:

$$|\triangle(v,s)| < Max\{\tfrac{1}{2}(1-2^{-\sigma})|\triangle(r,s)|;\ 2^{m+2}(1-2^{-\sigma})^{-m+2}\sqrt{D(U_2)}\}$$

et enfin en tenant compte de (14)

$$|\triangle(v,s)| < \tfrac{1}{2}(1-2^{-\sigma})|\triangle(r,s)|. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

Comme $\frac{1}{2}(1-2^{-\sigma}) < \frac{1}{2}$ parce que $\sigma > 0$, l'inégalité (17) n'est pas vérifiée pour $v = r$, donc $v = r$ ne satisfait pas (16). Il en résulte que $g < |s-r|$ et le nombre d'entiers v qui entrent en considération est le plus grand entier ne dépassant pas $g+1$, donc est supérieur à g.

Par suite pour au moins $\frac{1}{2}(|s-r|+1)$ entiers u de j et au moins g entiers v de j on a les inégalités (15) et (17), et par conséquent

$$|\triangle(u,v)| \geqq |\triangle(u,s)| - |\triangle(v,s)| > (\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}(1-2^{-\sigma}))|\triangle(r,s)|$$

c'est-à-dire

$$|\triangle(u,v)| > 2^{-\sigma-1}|\triangle(r,s)|.$$

L'inégalité (7) peut être appliquée avec $q = |s-r|$, et comme

$$|u-v| \leqq |s-r|,$$

elle donne:

$$\tfrac{1}{2}(|s-r|+1)g\,2^{-2(\sigma+1)}|\triangle(r,s)|^2 < |s-r|(|s-r|+1)D(U_2)$$

c'est-à-dire

$$|\triangle(r,s)|^{2m-1} < 2^{2\sigma+3+2m-3}(1-2^{-\sigma})^{-2m+3}(\varphi(m-1,\sigma))^{2m-3}\frac{|s-r|}{k}(D(U_2))^{m-1}.$$

En tenant compte de la valeur de $\varphi(m-1,\sigma)$ on voit que l'on obtient:

$$|\triangle(r,s)| < \varphi(m,\sigma)\left(\frac{|s-r|}{k}(D(U_2))^{m-1}\right)^{\frac{1}{2m-1}}$$

et l'inégalité (13) est démontrée.

5°) *Démonstration des inégalités (1) et (2) lorsque $k \geqq 2$ est entier et que les nombres ku_ν $(\nu = 1, \ldots, n)$ sont entiers.*

Posons $D(U_2) = 2^{-d}$, alors $d = \dfrac{|\log D(U_2)|}{\log 2}$ est un nombre positif, car $D(U_2) \leqq 1$.

Nous appliquerons la formule (13) où nous avons posé $\sigma = \dfrac{m}{2}$ et

remplacé $|s-r|$ par k. La formule (13) devient alors:

$$D(U) \leqq Max \left\{ 2^{\frac{1}{2(2m-1)}} \left(1-2^{-\frac{m}{2}}\right)^{-\frac{(m-1)^2}{2m-1}} 2^{m+\frac{1}{2}+\frac{d}{2(2m-1)}} \sqrt{D(U_2)}; \left(1-2^{-\frac{m}{2}}\right)^{-m+1} 2^{m+3} \sqrt{D(U_2)} \right\} . \quad (18)$$

On vérifie que, quel que soit l'entier $m \geqq 1$, on a

$$2^{\frac{1}{2(2m-1)}} \left(1-2^{-\frac{m}{2}}\right)^{-\frac{(m-1)^2}{2m-1}} < 2$$

et

$$\left(1-2^{-\frac{m}{2}}\right)^{-m+1} < 2^{\frac{3}{2}} .$$

Il suffit pour cela de constater que la dérivée par rapport à m de chacune de ces expressions est positive pour $1 \leqq m \leqq 3$ et négative pour $m \geqq 4$. La substitution des valeurs $m=3$ et $m=4$ fournit les inégalités écrites.

L'inégalité (18) devient alors:

$$D(U) < Max \left\{ 2^{m+\frac{3}{2}+\frac{d}{2(2m-1)}}; 2^{m+\frac{9}{2}} \right\} \sqrt{D(U_2)} .$$

Supposons d'abord $d \geqq 36$ et prenons pour m l'entier défini par les inégalités

$$1+\sqrt{d} \leqq 2m < 3+\sqrt{d} .$$

Alors

$$m+\frac{3}{2}+\frac{d}{2(2m-1)} < 3+\sqrt{d} \text{ et } m+\frac{9}{2} < 6+\frac{1}{2}\sqrt{d} .$$

Or pour $d \geqq 36$ on a $3+\sqrt{d} \geqq 6+\frac{1}{2}\sqrt{d}$, donc dans ce cas on a

$$D(U) < 2^{3+\sqrt{d}} \sqrt{D(U_2)} .$$

Supposons maintenant $d < 36$ et prenons pour m l'entier défini par les inégalités

$$1+\frac{d}{6} \leqq 2m < 3+\frac{d}{6} .$$

Alors

$$m+\frac{3}{2}+\frac{d}{2(2m-1)} < 6+\frac{d}{12} \text{ et } m+\frac{9}{2} < 6+\frac{d}{12} .$$

On a donc dans ce cas

$$D(U) < 2^{6+\frac{d}{12}} \sqrt{D(U_2)} .$$

On voit facilement que pour $\frac{72}{5} < d < 36$ on a $6+\frac{d}{12} < \frac{7}{2}+\sqrt{d}$. Si d est $\leqq \frac{72}{5}$, on a $\frac{7}{2}+\sqrt{d}-\frac{1}{2}d > 0$, de sorte que l'on a:

$$D(U) < 2^{\frac{7}{2}+\sqrt{d}-\frac{1}{2}d} = 2^{\frac{7}{2}+\sqrt{d}} \sqrt{D(U_2)}$$

inégalité évidente, car le second membre est supérieur à 1. On a donc pour toutes les valeurs de d

$$D(U) < 2^{\frac{7}{2}+\sqrt{d}} \sqrt{D(U_2)}$$

et l'inégalité (1) est démontrée pour la suite U.

Pour démontrer l'inégalité (2) nous écrivons, $\varepsilon > 0$ étant un nombre arbitraire:

$$D(U) < 2^{\frac{7}{2}+\sqrt{d}-\frac{d}{2}} = 2^{\frac{7}{2}+\sqrt{d}-\varepsilon d-\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)d} = 2^{\frac{7}{2}+\sqrt{d}-\varepsilon d} (D(U_2))^{\frac{1}{2}-\varepsilon} .$$

Or $\frac{7}{2}+\sqrt{d}-\varepsilon d$ prend sa plus grande valeur pour $\sqrt{d} = \frac{1}{2\varepsilon}$ et par suite:

$$D(U) < 2^{\frac{7}{2}+\frac{1}{2\varepsilon}-\frac{1}{4\varepsilon}} (D(U_2))^{\frac{1}{2}-\varepsilon} = 2^{\frac{7}{2}+\frac{1}{4\varepsilon}} (D(U_2))^{\frac{1}{2}-\varepsilon}$$

et l'inégalité (2) est démontrée.

L'inégalité (2) est équivalente à (1) car on retrouve (1) en prenant dans (2) pour ε la valeur particulière $\frac{1}{2\sqrt{d}}$.

6°) *U étant un système de n nombres réels $u_1, \ldots, u_n$ quelconques et U^* un système de n nombres réels $u_1^*, \ldots, u_n^*$ tels que $|u_\nu - u_\nu^*| \leqq \eta$ $(\nu = 1, \ldots, n)$, où η est une constante indépendante de ν, on a l'inégalité:*

$$|D(U) - D(U^*)| \leqq 2\eta . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

Désignons par $N^*(\alpha, \alpha+\lambda)$ le nombre des éléments u_ν^* de U^* avec

$$0 \leqq u_\nu^* - \alpha - [u_\nu^* - \alpha] < \lambda - [\lambda] .$$

Si $0 \leqq \lambda < 1-2\eta$, on a

$$N(\alpha, \alpha+\lambda) \leqq N^*(\alpha-\eta, \alpha+\lambda+\eta) \leqq n(\lambda+2\eta+D(U^*)),$$

donc

$$D(\alpha, \alpha+\lambda) \leqq 2\eta + D(U^*) .$$

Si $1-2\eta \leqq \lambda < 1$, on a

$$N(\alpha, \alpha+\lambda) \leqq n + N^*(\alpha-\eta, \alpha+\lambda-1+\eta) \leqq n(1+\lambda-1+2\eta+D(U^*)),$$

donc

$$D(\alpha, \alpha+\lambda) \leqq 2\eta + D(U^*).$$

En vertu de la périodicité en λ de $D(\alpha, \alpha+\lambda)$ on a par conséquent pour tout couple α et λ

$$D(\alpha, \alpha+\lambda) \leqq 2\eta + D(U^*),$$

c'est-à-dire on a

$$D(U) \leqq 2\eta + D(U^*).$$

En échangeant les rôles des suites U et U^* on obtient de même:

$$D(U^*) \leqq 2\eta + D(U)$$

et l'inégalité (19) est démontrée.

Fin de la démonstration.

Soit U un système de n nombres réels $u_1, \ldots, u_n$ quelconques et soit k un entier arbitraire. Définissons un système U^* de n nombres $u_1^* \ldots, u_n^*$ par la propriété que $k u_\nu^*$ est l'entier le plus voisin de $k u_\nu$ pour $\nu = 1, \ldots, n$. Ainsi $k u_\nu^*$ est entier et $|u_\nu - u_\nu^*| \leqq \frac{1}{2k}$.

On a démontré pour le système U^* l'inégalité (2) quel que soit $\varepsilon > 0$, c'est-à-dire on a

$$D(U^*) < 2^{\frac{7}{2}+\frac{1}{4\varepsilon}} (D(U_2^*))^{\frac{1}{2}-\varepsilon}.$$

L'inégalité (19) peut être appliquée aux systèmes U et U^* avec $\eta = \frac{1}{2k}$ et aux systèmes U_2 et U_2^* avec $\eta = \frac{1}{k}$. Par suite

$$D(U) < \frac{1}{k} + 2^{\frac{7}{2}+\frac{1}{4\varepsilon}} \left(\frac{2}{k} + D(U_2)\right)^{\frac{1}{2}-\varepsilon}.$$

Cette inégalité a lieu pour tout k; en faisant augmenter indéfiniment k il vient

$$D(U) \leqq 2^{\frac{7}{2}+\frac{1}{4\varepsilon}} (D(U_2))^{\frac{1}{2}-\varepsilon}.$$

On peut même remplacer le signe $\leqq$ par $<$ car on aurait pu prendre au lieu de $\frac{7}{2}$ dans l'exposant une constante absolue un peu plus petite. L'inégalité (2), et par suite aussi l'inégalité (1), sont donc démontrées pour la suite U.

Mathematics. — *On a theorem in the geometry of numbers and a property of mass distributions in n-dimensional space.* By CORNELIS VISSER. (Communicated by Prof. J. G. VAN DER CORPUT).

(Communicated at the meeting of May 20, 1939.)

§ 1. *Introduction.*

Let R_n be the n-dimensional Cartesian space. By $x+y$, where $x = (x_1, \ldots, x_n)$ and $y = (y_1, \ldots, y_n)$ are points in R_n, we denote the point $(x_1+y_1, \ldots, x_n+y_n)$ and by $E+y$, where E is a set and y a point in R_n, the set of all points $x+y$ with x belonging to E. $E+y$ will be called a translation of E.

We shall indicate by H_N^a the cube

$$a_j - N \leqq x_j \leqq a_j + N \qquad (j = 1, \ldots, n).$$

Let $\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \ldots$ be a sequence of points; the number

$$\limsup_{a \text{ arbitrary}, N \to \infty} \frac{\text{number of } \xi^{(i)} \text{ in } H_N^a}{(2N)^n}$$

will be called the *upper density* of the sequence $\xi^{(i)}$.

The following theorem, which is a generalization of a well-known theorem of BLICHFELDT [1]), is due to JESSEN [2]).

Theorem 1. *Let $\xi^{(i)}$ be a sequence of points with upper density $> \lambda$. Let E be a measurable set of finite* LEBESQUE *measure $m(E)$. Then there exists a translation of E which contains more than $\lambda m(E)$ of the points $\xi^{(i)}$.*

In this note we shall prove a further generalization of BLICHFELDT's theorem, which includes Theorem 1 as a special case.

Instead of a sequence of points we consider an arbitrary mass distribution. By this we mean a non-negative set function $\sigma(E)$ which is completely additive over a field of sets that includes at least all BOREL sets. The sets of this field will be referred to as the sets which are measurable with respect to σ. Further we shall call $\sigma(E)$ the amount of mass contained in E. It is understood that σ has a finite value for all bounded sets.

---

1) H. F. BLICHFELDT: A new principle in the geometry of numbers, with some applications. Trans. Am. Math. Soc. **15**, 227—235 (1914).

2) See the "Zusatz bei der Korrektur" in WERNER FENCHEL: Verallgemeinerungen einiger Sätze aus der Geometrie der Zahlen. Acta Arithmetica **2**, 230—241 (1937).