Mathematics. — *Sur un problème de* WARING *généralisé*. III. Par J. G. VAN DER CORPUT et CH. PISOT.

(Communicated at the meeting of June 24, 1939.)

§ 4. *Cas des nombres premiers.*

Dans cette communication nous étudierons sous quelles conditions un système

$$\left.\begin{array}{ll} t_\mu = \sum\limits_{\nu=1}^{n} b_{\mu\nu} f_\nu (y_\nu) & (\mu = 1, \ldots, m) \\ \left.\begin{array}{l} y_\nu \equiv a_\nu \quad (mod\ A_\nu) \\ | f_\nu (y_\nu) | \leqq X \end{array}\right\} & (\nu = 1, \ldots, n) \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (37)$$

possède une solution où les y_ν sont des entiers dont certains ou même tous sont premiers. Les nombres t_μ, $b_{\mu\nu}$, a_ν, $A_\nu > 0$ et $X \geqq 3$ sont des entiers donnés où a_ν doit être premier avec A_ν si nous imposons à y_ν la condition d'être premier; $f_\nu (y_\nu)$ désigne un polynôme donné de degré $k_\nu \geqq 2$ en y_ν à coefficients entiers. Les résultats que nous allons démontrer maintenant complètent les théorèmes de la première et de la deuxième communication où tous les y_ν sont des entiers quelconques.

La démonstration sera faite à l'aide du théorème A de VAN DER CORPUT [7]). Pour pouvoir appliquer ce théorème nous devons étudier des systèmes de la forme

$$\left.\begin{array}{ll} \sum\limits_{\lambda=1}^{l} \beta_{\mu\lambda} (\chi_\lambda (\eta_\lambda) - \chi_\lambda (\zeta_\lambda)) = 0 & (\mu = 1, \ldots, m) \\ | \chi_\lambda (\eta_\lambda) | \leqq X; \ | \chi_\lambda (\zeta_\lambda) | \leqq X & (\lambda = 1, \ldots, l) \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (38)$$

où l est un nombre naturel $\leqq n$ et où la matrice

$$\begin{pmatrix} \beta_{11} \chi_1 & \ldots & \beta_{1l} \chi_l \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \beta_{m1} \chi_1 & \ldots & \beta_{ml} \chi_l \end{pmatrix} \quad \ldots \quad (39)$$

se déduit de la matrice

$$\begin{pmatrix} b_{11} f_1 & \ldots & b_{1n} f_n \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{m1} f_1 & \ldots & b_{mn} f_n \end{pmatrix} \quad \ldots \quad (40)$$

en supprimant dans cette dernière $n-l$ colonnes [8]).

[7]) VAN DER CORPUT, Propriétés additives, Acta arithmetica 3, 181—234 (1939).

[8]) Les systèmes (2) et (4) que nous avons étudié dans les deux premières communications jouaient le rôle du système (38), mais il nous semble que cette nouvelle manière d'écrire soit plus claire.

Pour les problèmes traités dans la première communication il suffisait de démontrer que le nombre N de solutions de certains systèmes de la forme (38) vérifiait l'inégalité

$$N \leqq C_{23} X^{2\left(\frac{1}{\varkappa_1} + \ldots + \frac{1}{\varkappa_l}\right) - m + \varepsilon} \quad \ldots \quad (41)$$

quel que soit le nombre positif ε, où C_{23} désigne un nombre indépendant de X, mais dépendant de ε; $\varkappa_\lambda$ désigne le degré du polynôme χ_λ. Parmi les problèmes que nous traiterons dans cette communication il y en a pour lesquels les inégalités citées seraient suffisantes, mais nous ne pouvons pas démontrer avec ces inégalités tous les problèmes que nous voulons aborder, par exemple le cas particulier où nous imposons à tous les y_ν la condition d'être premiers. C'est la raison pour laquelle nous introduisons une condition plus restrictive qui nous permet de traiter alors tous les problèmes que nous avons en vue, à savoir la condition

$$N \leqq c_{18} X^{2\left(\frac{1}{\varkappa_1} + \ldots + \frac{1}{\varkappa_l}\right) - m} x^{\omega_1} \quad \ldots \quad (42)$$

où $x = log\, X$ et où c_{18} et ω_1 sont des nombres indépendants de X.

Si le nombre l et les polynômes $\chi_1, \ldots, \chi_l$ sont donnés, nous dirons que la matrice (39) possède la propriété P lorsqu'il existe des nombres c_{18} et ω_1 indépendants de X tels que le nombre N de solutions du système (38) correspondant vérifie l'inégalité (42) pour tout $X \geqq 3$. L'inégalité (42) nous permet alors d'appliquer le théorème A dans le cas appelé faible, tandis que l'inégalité (41) n'est utilisable que dans le cas fort. Or c'est le cas faible qui se présente presque toujours dans la théorie des nombres premiers, tandis que dans le problème de WARING généralisé, où les nombres y_ν sont des entiers quelconques, les conditions du cas fort sont remplies.

En effet il résulte des découvertes de M. M. SIEGEL, WALFISZ et VINOGRADOW [9]) que la condition E figurant dans le théorème A est vérifiée.

Lorsque certains systèmes de la forme (38) vérifient l'inégalité (42), le théorème A nous donne une valeur approximative pour le nombre $L(t)$ de représentations du système $t = (t_1, \ldots, t_m)$ sous la forme (37). Cette valeur approximative a encore la forme $b\, Z(t)\, \Lambda(t)$ où b^{-1} est le nombre de systèmes $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_m)$ de nombres rationnels γ_μ avec $0 \leqq \gamma_\mu < 1$ tels que les n nombres $\sum\limits_{\mu=1}^{m} b_{\mu\nu} \gamma_\mu$ soient entiers. Pour définir dans ce cas $\Lambda(t)$ nous remarquons qu'il existe une constante $c_{19} \geqq 2$ telle que pour

[9]) C. SIEGEL, Ueber die Klassenzahl quadratischer Zahlkörper. Acta arithmetica 1, 83—86 (1935).

WALFISZ, Zur additiven Zahlentheorie II. Math. Zeitschrift 40, 592—607 (1936).

VINOGRADOW, Einige allgemeine Primzahlsätze. Travaux de l'Institut Math. de Tbilissi 3, 35—67 (1938).

tout nombre $z_\nu \geqq c_{19}$ chaque dérivée $f_\nu'(z_\nu) \neq 0$. Quand z_ν parcourt toutes les valeurs supérieures ou égales à c_{19}, le nombre $v_\nu = f_\nu(z_\nu)$ parcourt un intervalle j_ν et la correspondance entre un $z_\nu \geqq c_{19}$ et un v_ν de j_ν est biunivoque.

Alors $A(t)$ est l'expression

$$\underset{\nu}{\Pi_1} \frac{1}{\varphi(A_\nu)} \underset{\nu}{\Pi_2} \frac{1}{A_\nu} \Sigma_1 \left\{ \frac{1}{|f_1'(z_1)\dots f_n'(z_n)|} \underset{\nu}{\Pi_1} \frac{1}{\log z_\nu} \right\}$$

où $\underset{\nu}{\Pi_1}$ est étendu aux indices ν pour lesquels nous imposons aux entiers y_ν la condition d'être premiers, $\underset{\nu}{\Pi_2}$ est étendu aux autres indices ν et Σ_1 aux entiers v_1 de $j_1, \dots, v_n$ de j_n tels que l'on ait

$$\sum_{\nu=1}^{n} b_{\mu\nu} v_\nu = t_\mu \qquad (\mu = 1, \dots, m)$$

et

$$|v_\nu| \leqq X \qquad (\nu = 1, \dots, n);$$

$\varphi(A_\nu)$ désigne la fonction d'EULER.

Enfin $Z(t)$ appelé „facteur arithmétique" est un produit absolument convergent $\underset{p}{\Pi} Q(p, t)$ étendu à tous les nombres premiers où $Q(p, t)$ dépend du nombre premier p et du système $t = (t_1, \dots, t_m)$. Pour donner des renseignements plus détaillés sur le facteur arithmétique nous partageons le système des entiers y_ν en deux familles, l'une d'elles pouvant être vide. La première famille sera formée par les entiers y_ν auxquels nous imposons la condition d'être premiers. Supposons d'abord qu'il existe une puissance p^α d'un nombre premier p telle que toute solution du système

$$\left.\begin{aligned} t_\mu &\equiv \sum_{\nu=1}^{n} b_{\mu\nu} f_\nu(y_\nu) \quad (\mathrm{mod}\ p^\alpha) \quad (\mu = 1, \dots, m) \\ y_\nu &\equiv a_\nu \quad (\mathrm{mod}\ A_\nu) \quad (\nu = 1, \dots, n) \end{aligned}\right\} \quad . \ . \quad (43)$$

possède la propriété qu'au moins un des entiers y_ν appartenant à la première famille soit divisible par le nombre premier p. Dans ce cas chaque solution du système (37) est telle que le nombre y_ν au même indice est divisible par p, c'est à dire égal à p car il est premier par hypothèse. Le système (37) peut alors être réduit à un autre système où nous avons remplacé ce nombre y_ν par le nombre fixe p, et le nombre n d'entiers y_ν est réduit d'une unité. Nous appelerons ce cas le cas réductible. Dans ce cas réductible le facteur arithmétique s'annule et le résultat obtenu à l'aide du théorème A est immédiat.

Supposons maintenant que pour tout nombre premier p et tout nombre

naturel α le système (43) possède au moins une solution où aucun des y_ν appartenant à la première famille ne soit divisible par p. Appelons ce cas le cas irréductible [10]).

Après ces définitions nous pouvons énoncer la généralisation suivante du théoréme I:

Théorème III: Conditions: 1⁰. *Supposons que le déterminant*

$$\begin{vmatrix} b_{11} & \dots & b_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & \dots & b_{mm} \end{vmatrix}$$

ne soit pas nul; supposons que, pour tout nombre naturel $\lambda \leqq m$, la matrice obtenue en supprimant dans la matrice

$$\begin{pmatrix} b_{11} f_1 & \dots & b_{1n} f_n \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} f_1 & \dots & b_{mn} f_n \end{pmatrix}$$

la colonne d'indice λ puisse être partagée [11]) en deux matrices possédant chacune la propriété P (n est donc nécessairement $\geqq 2m + 1$).

2⁰. *Supposons que a_ν soit premier avec A_ν pour chaque indice ν pour lequel y_ν appartient à la première famille.*

3⁰. *Supposons enfin que le système de relations*

$$\left.\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^{n} b_{\mu\nu} u_\nu &= 0 \qquad (\mu = 1, \dots, m) \\ \Gamma_\nu u_\nu &> 0 \qquad (\nu = 1, \dots, n) \end{aligned}\right\} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (44)$$

possède $n - m$ solutions linéairement indépendantes où Γ_ν désigne le coefficient du terme de plus haut degré de $f_\nu(y_\nu)$.

Dans ces conditions, à chaque système $t = (t_1, \dots, t_m)$ pour lequel se présente le cas irréductible et pour lequel le système

$$t_\mu = \sum_{\nu=1}^{n} b_{\mu\nu} v_\nu \qquad (\mu = 1, \dots, m)$$

est résoluble en nombre entiers $v_1, \dots, v_n$, correspond un certain nombre de systèmes $(y_1, \dots, y_n)$ de nombres naturels vérifiant (37) et tels que les y_ν appartenant à la première famille soient des nombres premiers; ce nombre de solutions croît indéfiniment avec X.

Le facteur arithmétique est alors positif et même compris entre deux bornes positives indépendantes de t.

---

10) Dans la première communication correspondant au cas où la première famille est vide, la condition que (12) soit résoluble pour tout nombre premier p et tout nombre naturel β est équivalente à la condition que le cas irréductible se présente.

11) Nous dirons qu'une matrice B_1 est partagée en deux matrices B_2 et B_3 lorsque la matrice obtenue en écrivant les colonnes de B_3 à la suite de celles de B_2 reproduit la matrice B_2 à une permutation de colonnes près.

Comme nous le verrons à la fin de cette communication, la condition 2⁰. qui figurera dans le théorème IV est une condition suffisante pour que le cas irréductible soit réalisé.

Si nous supposons que la première famille soit vide nous retrouvons le théorème I. L'énoncé du théorème I sous la forme utilisée dans la première communication pouvait prêter à confusion, car nous n'y avons parlé que des inégalités (3) et (5) au lieu de parler, comme il aurait fallu, des $2m$ inégalités de cette nature contenues dans le théorème III. La même remarque s'applique à l'énoncé du théorème II qui est un cas particulier du théorème IV qui suivra.

Comme dans la première communication, le cas où l'on ne sait pas si le système (44) possède $n-m$ solutions linéairement indépendantes, est plus difficile, puisqu'alors on ne sait pas si les nombres $t_1, \ldots, t_m$ peuvent être choisis fixes. La fin de cette communication nous permettra de démontrer le théorème suivant, généralisation du théorème II:

Théorème IV. Conditions. 1^0. *Supposons vérifiées les conditions* 1^0. *et* 2^0. *du théorème III; supposons que le système*

$$t_\mu = \sum_{\nu=1}^{n} b_{\mu\nu} v_\nu \qquad (\mu = 1, \ldots, m)$$

soit résoluble en nombres entiers $v_1, \ldots, v_n$; *et que l'on puisse trouver deux nombres* c_{20} *et* Ω *indépendants de* X *et de* t *tels que*

$$\Lambda(t) > c_{20}\, X^{\frac{1}{k_1} + \ldots + \frac{1}{k_n} - m}\, x^{-\Omega} \quad \ldots\ldots \quad (45)$$

où $x = \log X$.

2^0. *Supposons qu'à tout nombre premier* p *on puisse associer un entier* $\xi \geqq 0$ *indépendant de* X *et de* t *tel que le système*

$$\left.\begin{aligned} & t_\mu \equiv \sum_{\nu=1}^{n} b_{\mu\nu} f_\nu(y_\nu) \quad (\mathrm{mod}\ p^{2\xi+1}) \qquad (\mu = 1, \ldots, m) \\ & y_\nu \equiv a_\nu\ (\mathrm{mod}\ A_\nu) \qquad (\nu = 1, \ldots, n) \end{aligned}\right\} \quad . \quad (46)$$

possède une solution $y = (y_1, \ldots, y_n)$ *avec*

$$\Pi_1\, y_\nu \not\equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ p)$$

(Π_1 *est étendu aux entiers* y_ν *de la première famille) et avec la propriété que la matrice*

$$\begin{pmatrix} A_1 b_{11} f_1 & \ldots\ldots & A_n b_{1n} f_n \\ \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ A_1 b_{m1} f_1 & \ldots\ldots & A_n b_{mn} f_n \end{pmatrix}$$

contienne au moins un déterminant d'ordre m *qui ne soit pas divisible par* $p^{\xi+1}$.

Dans ces conditions nous obtenons la même assertion que celle du théorème III.

Dans le § 2 nous avions trouvé deux conditions différentes suffisantes pour que l'inégalité (41) soit vérifiée. Nous obtiendrons aussi deux conditions analogues relatives à l'inégalité (42), c'est à dire des conditions suffisantes pour qu'une matrice possède la propriété P.

Dans cette communication nous ne parlons que de la première condition. Soit maintenant $s(\varkappa)$ un nombre naturel tel que le système

$$\left.\begin{aligned} & \sum_{\sigma=1}^{s(\varkappa)} (\chi_\lambda(\eta_\sigma) - \chi_\lambda(\zeta_\sigma)) = 0 \\ & |\chi_\lambda(\eta_\sigma)| \leqq X; \ |\chi_\lambda(\zeta_\sigma)| \leqq X \qquad (\sigma = 1, \ldots, s(\varkappa)) \end{aligned}\right\} \quad . \ . \quad (47)$$

où $x = \log X$, c_{21} et ω_2 étant des nombres indépendants de X, possède au plus $c_{21}\, X^{\frac{2}{\varkappa} s(\varkappa) - 1}\, x^{\omega_2}$ solutions pour chaque λ pour lequel le degré du polynôme χ_λ soit exactement $\varkappa$; $\chi_1, \ldots, \chi_l$ sont les polynômes figurant dans le système (38); on a donc nécessairement $l \geqq s(\varkappa)$. Dans la communication suivante nous démontrerons [12] que $2^{\varkappa-1}$ est une valeur possible de $s(\varkappa)$. Pour les grandes valeurs de $\varkappa$, M. VINOGRADOW a démontré que l'on pouvait prendre pour $s(\varkappa)$ une valeur beaucoup plus petite; en particulier lorsque $\chi_\lambda(\eta)$ est de la forme $\eta^\varkappa$ avec $\varkappa \geqq 14$, il a montré [13] que $[\frac{1}{2}\varkappa^3(\log \varkappa + 2 \log \log \varkappa) - 1]$ est une valeur possible pour $s(\varkappa)$.

Supposons que l'on puisse partager la matrice formée par les $m\,l$ coefficients $\beta_{\mu\lambda}$ $(\mu = 1, \ldots, m;\ \lambda = 1, \ldots, l)$ en matrices partielles de rang m chacune et que dans chacune de ces matrices partielles les polynômes aient tous un même degré dit *associé* à la matrice partielle. Soit $\psi(\varkappa)$ le nombre de matrices partielles pour lesquelles le degré associé est égal à $\varkappa$. Une condition suffisante pour que la matrice (39) possède la propriété P est que l'on ait

$$\sum_\varkappa \frac{\psi(\varkappa)}{s(\varkappa)} \geqq 1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (48)$$

où $\sum_\varkappa$ est étendu aux nombres $\varkappa$ figurant comme degré dans au moins un polynôme χ_λ $(\lambda = 1, \ldots, l)$. Le raisonnement figurant dans la partie du § 2 contenue dans la première communication, où l'on a remplacé X^ε par x^{ω_2} (ω_2 étant le nombre cité à propos du système (47)), nous donne immédiatement la démonstration du fait que cette condition est suffisante. Dans la communication suivante nous étudierons la deuxième condition pour qu'une matrice possède la propriété P.

---

[12]) Le résultat analogue pour le § 1 suit immédiatement du lemme 3 appliqué avec $m = 1$, $r = k$, $b_{\mu\lambda} = 1$ $(\lambda = 1, \ldots, 2^{k-1};\ \mu = 1)$, tandis que les polynômes $f_1, \ldots, f_l$ figurant dans (2) désignent tous le même polynôme f_λ.

[13]) VINOGRADOW, Einige allgemeine Primzahlsätze, Travaux de l'Institut mathématique de Tbilissi T. III, 35—67, voir p. 50 (1938).

Passons maintenant à la démonstration que la condition 2^0., figurant dans le théorème IV est suffisante pour que le cas irréductible se présente.

Le facteur arithmétique est égal à un produit infini $\prod_p Q(p, t)$, qui est étendu aux nombres premiers p et qui converge absolument et uniformément par rapport à t. Si ζ est le nombre des $\nu\,(1 \leqq \nu \leqq n)$ tels que y_ν appartienne à la première famille,

$$p^{(n-m)\beta}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{\zeta} Q_\beta(p, t)$$

est égal au nombre de solutions du système

$$\sum_{\nu=1}^{n} b_{\mu\nu}\, f_\nu(y_\nu) \equiv t_\mu \quad (mod.\ p^\beta)\ (\mu = 1, \ldots, m),$$

$$y_\nu \equiv a_\nu \qquad (mod.\ A_\nu) \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

et

$$\prod_{\nu} {}_1\, y_\nu \not\equiv 0 \qquad (mod.\ p).$$

Pour démontrer que le cas irréductible se présente il suffit de démontrer que $Q_\beta(p, t)$ est positif pour chaque nombre premier p et pour chaque nombre naturel β. Cela résulte immédiatement de la condition 2^0. du théorème IV dans le cas où β est $\leqq 2\xi + 1$. Une proposition de VAN DER CORPUT [14]) apprend que $Q_\beta(p, t)$ est indépendant de β pour chaque $\beta \geqq 2\xi + 1$, de sorte que $Q_\beta(p, t)$ est positif pour chaque $\beta > 2\xi + 1$.

Le raisonnement utilisé à la fin du § 3 (p. 411), où nous donnons la démonstration du théorème II, appliqué avec $\beta_0 = 2\xi + 1$, nous apprend que dans la condition 2^0 du théorème IV le facteur arithmétique est compris entre deux nombres positifs indépendants de t et le théorème IV est démontré.

[14]) Proposition 3 de son article: „Sur quelques systèmes de congruences", Proc. Kon. Ned. Akad. v. Wetensch., Amsterdam, 42, 328—335 (1939).

Chemistry. — *On the mobility of the saturated six- and seven-ring and the configuration of the cycloheptane diols 1 . 2.* By J. BÖESEKEN.

(Communicated at the meeting of June 24, 1939.)

It may be considered well known that, as a general result of the researches on the influence of the polyols on the electric conductivity of boracic acid, the increase observed there is due to the formation of complex polyol boracic acids, in which the boron atom forms part of a ring of five or six atoms.

According as two hydroxyl groups in the dynamic equilibrial position *) of the polyol are situated more favourably for the formation of this ring, the increase in conductivity is larger, since in the aqueous solution of boracic acid and polyol under for the rest comparable conditions more of the very strong borocomplex will be present.

This consequence, which is of importance in determining the configuration of a large number of compounds, was first checked by aromatic orthodiphenols, which indeed all exerted a positive influence, in contrast with the meta- and para-diphenols which all appeared to be indifferent.

Subsequently the alicyclic polyols were examined. In complete agreement with the expectation all *cis-cyclopentane diols 1 . 2* appeared to produce an increase, all isomeric transdiols being indifferent.

It may be remarked that meanwhile it had been found that the common 1 . 2 glycols did not give an increase (no more than the 1 . 3 and 1 . 4 diols) and that this was explained by assuming a mutually repulsive action of the hydroxyl groups in these diols, so that in the dynamic equilibrial position they could stand apart as far as possible and consequently were in an unfavourable position for the formation of borocomplexes.

It was likewise demonstrated that, according as the number of vicinal hydroxyl groups increases, the influence on the conductivity is raised, which is a consequence of the previous theorem, since upon mutual repulsion of the hydroxyl groups in the alcohols with more than two of these groups these must come to lie two by two constantly more favourably for the formation of borocomplexes.

The expectation that in the cis-cyclopentane diols 1 . 2 the hydroxyl

*) We assume that the atoms and groups of atoms of the molecules in liquid or dissolved condition are in constant motion, rotating round the single bonds as axes. Owing to repulsive and attractive forces there will be favoured positions, thus causing the movements to acquire the character of oscillations. These favoured positions I have called "dynamic equilibrial positions".