Mathematics. — *Ueber konformeuklidische und* EINSTEIN*sche Räume gerader Dimension.* Von J. HAANTJES und W. WRONA. (Communicated by Prof. J. A. SCHOUTEN).

(Communicated at the meeting of June 24, 1939.)

§ 1. *Eine geometrische Bedeutung der* EINSTEIN*schen Gleichung in Räumen mit gerader Dimension.*

Ist eine V_m ($\xi^\varkappa = \xi^\varkappa(\eta^a)$) in einer V_n in einem Punkte geodätisch, so gilt in diesem Punkte [1])

$$K'_{dcba} = B^{\nu\mu\lambda\varkappa}_{dcba} K_{\nu\mu\lambda\varkappa} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Dabei ist K'_{dcba} bzw. $K_{\nu\mu\lambda\varkappa}$ der Krümmungsaffinor der V_m bzw. der V_n und ist $B^\varkappa_a = \partial_a \xi^\varkappa$ die Verbindungsgrösse. Der Krümmungsaffinor und auch die skalare Krümmung der V_m hängen in diesem Punkte daher nur von der tangierenden m-Richtung ab. Wir definieren nun die *skalare Krümmung einer m-Richtung* als die skalare Krümmung einer V_m mit dieser m-Richtung, welche im betrachteten Punkte geodätisch ist, oder auch (was das selbe ist) als die *erzwungene skalare Krümmung* einer V_m mit der betrachteten m-Richtung [1]). Die m-Richtung darf also keine besondere Lage in bezug auf den Nullkegel haben, denn sonst wäre die X_m mit dieser m-Richtung keine V_m. Im Folgenden betrachten wir nur m-Richtungen, die keine besondere Lage in bezug auf den Nullkegel haben.

Betrachten wir jetzt den Fall, dass $n = 2m$ ist, die Dimension des Raumes also *gerade* ist. Zu jeder m-Richtung in P gehört nun eine senkrechte m-Richtung, welche keine Richtung mit der ersten m-Richtung gemeinsam hat. Bezeichnen wir die Fundamentaltensoren der zwei V_m, welche jede eine dieser m-Richtungen tangieren und in P geodätisch sind, mit $a'_{\lambda\varkappa}$ und $a''_{\lambda\varkappa}$, so gilt

$$a_{\lambda\varkappa} = a'_{\lambda\varkappa} + a''_{\lambda\varkappa}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

wo $a_{\lambda\varkappa}$ der Fundamentaltensor der V_n ist. Für das $m(m-1)$-fache der skalaren Krümmungen $\varkappa'$ und $\varkappa''$ dieser zwei m-Richtungen findet man aus (1)

$$K' = K_{\nu\mu\lambda\varkappa} a'^{\nu\varkappa} a'^{\mu\lambda} \text{ und } K'' = K_{\nu\mu\lambda\varkappa} a''^{\nu\varkappa} a''^{\mu\lambda}. \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

[1]) Vgl. J. A. SCHOUTEN und D. J. STRUIK, Einführung in die neueren Methoden der Differentialgeometrie II, NOORDHOFF, Groningen, 1938, S. 133. Weiter zitiert als Einführung II.

Aus (2) und (3) geht hervor

$$\left.\begin{aligned} K'' &= K_{\nu\mu\lambda\varkappa}(a^{\nu\varkappa} - a'^{\nu\varkappa})(a^{\mu\lambda} - a'^{\mu\lambda}) \\ &= K - 2K_{\mu\lambda} a'^{\mu\lambda} + K'. \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Ist der Raum EINSTEINsch, d.h. gilt

$$K_{\mu\lambda} = \lambda a_{\mu\lambda} \quad ; \quad K = n\lambda, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

so lautet die Gleichung (4)

$$K'' - K' = n\lambda - 2\lambda a_{\mu\lambda} a'^{\mu\lambda} = \lambda(n - 2m) = 0 \, . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Damit haben wir bewiesen:

In EINSTEIN*schen Räumen haben gegenseitig senkrechte m-Richtungen dieselbe skalare Krümmung.*

Wir beweisen jetzt den umgekehrten Satz. Die V_m habe die Eigenschaft, dass die skalaren Krümmungen von zwei beliebigen gegenseitig senkrechten m-Richtungen gleich sind. Aus (4) folgt nun

$$K - 2K_{\mu\lambda} a'^{\mu\lambda} = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Betrachten wir jetzt zwei m-Richtungen, welche eine $(m-1)$-Richtung gemeinsam haben. Für die zwei Fundamentaltensoren kann man dann schreiben

$$\left.\begin{aligned} a'^{\varkappa\lambda} &= b^{\varkappa\lambda} + \underset{p}{\varepsilon}\, p^\varkappa p^\lambda \qquad (\underset{p}{\varepsilon} = p^\varkappa p_\varkappa) \\ \tilde{a}'^{\varkappa\lambda} &= b^{\varkappa\lambda} + \underset{q}{\varepsilon}\, q^\varkappa q^\lambda \qquad (\underset{q}{\varepsilon} = q^\varkappa q_\varkappa) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

wo $p^\varkappa$ und $q^\varkappa$ Einheitsvektoren senkrecht zur $(m-1)$-Richtung sind und der Fundamentaltensor der $(m-1)$-Richtung mit $b^{\varkappa\lambda}$ bezeichnet ist. Für $a'_{\lambda\varkappa}$ $\tilde{a}'_{\lambda\varkappa}$ beide gilt die Gleichung (7). Subtraktion dieser zwei Gleichungen führt zu

$$\underset{p}{\varepsilon} K_{\mu\lambda} p^\mu p^\lambda = \underset{q}{\varepsilon} K_{\mu\lambda} q^\mu q^\lambda, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

welche Gleichung für beliebige Einheitsvektoren $p^\varkappa$ und $q^\varkappa$ gelten muss.

Die mit $K_{\mu\lambda}$ gemessene Länge der Vektoren ist also proportional mit der mit $a_{\mu\lambda}$ gemessenen Länge. Daraus geht hervor

$$K_{\mu\lambda} = \lambda a_{\mu\lambda}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Wir haben damit den Satz erhalten:

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass eine V_{2m} EINSTEIN*sch ist, besteht darin, dass die skalaren Krümmungen von zwei beliebigen gegenseitig senkrechten m-Richtungen einander stets gleich sind.*

Damit haben wir eine geometrische Bedeutung der EINSTEINschen Gleichung in Räumen gerader Dimension angegeben.

Der Fall $n = 4$.

Das oben erhaltene Resultat kann für $n = 4$ noch anders formuliert werden. Es handelt sich in diesem Falle um die skalare Krümmung von 2-Richtungen. Eine 2-Richtung bestimmt einen einfachen Bivektor bis auf einen skalaren Faktor. Wählt man für diesen Bivektor einen Einheitsbivektor

$$f^{\varkappa\lambda} = 2\, i^{[\varkappa} j^{\lambda]}, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (11)$$

wo $i^\varkappa$ und $j^\varkappa$ gegenseitig senkrechte Einheitsvektoren der 2-Richtung sind, so gilt

$$f^{\nu\mu} f^{\lambda\varkappa} = 2 \underset{i}{\varepsilon} \underset{j}{\varepsilon}\, \mathrm{a}'^{\nu[\lambda} \mathrm{a}'^{\varkappa]\mu}; \quad (\underset{i}{\varepsilon} = i^\lambda i_\lambda;\ \underset{j}{\varepsilon} = j^\lambda j_\lambda) \quad \ldots \quad (12)$$

Die skalare Krümmung der 2-Richtung ist nach (3)

$$\varkappa' = \tfrac{1}{2} K_{\nu\mu\lambda\varkappa}\, \mathrm{a}'^{\nu\varkappa} \mathrm{a}'^{\mu\lambda} = -\frac{\varepsilon}{4} K_{\nu\mu\lambda\varkappa} f^{\nu\mu} f^{\lambda\varkappa}, \quad \ldots \quad (13)$$

wo ε gleich $+1$ bzw. -1 ist je nachdem der Fundamentaltensor der betrachteten 2-Richtung definit bzw. nicht definit ist. Das rechte Glied ist aber gerade das RIEMANNsche Krümmungsmass [1]). Für 2-Richtungen ist die skalare Krümmung daher identisch mit dem RIEMANNschen Krümmungsmass [2]). Es gilt also der Satz:

In einer V_4 ist die EINSTEIN*sche Gleichung gleichbedeutend damit, dass gegenseitig senkrechte 2-Richtungen stets das selbe* RIEMANN*sche Krümmungsmass haben.*

Wir führen jetzt einen Einheitsquadrivektor $I^{\varkappa\lambda\mu\nu}$ ein, welcher in bezug auf ein bestimmtes orthogonales Bezugssystem mit Einheitsmassvektoren definiert ist mittels der Gleichung

$$I^{1234} \overset{*}{=} 1. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (14)$$

Es ist dann in bezug auf ein beliebiges orthogonales System $(h') I^{1'2'3'4'} \overset{*}{=} -1$ oder $\overset{*}{=} 1$ je nachdem die Transformationsdeterminante der Transformation $(h) \rightarrow (h')$ gleich -1 oder $+1$ ist.

Es sei nun $f^{\varkappa\lambda}$ ein einfacher Einheitsbivektor. Die zur 2-Richtung von $f^{\varkappa\lambda}$ senkrechte 2-Richtung wird representiert durch den ebenfalls einfachen Einheitsbivektor

$$F^{\varkappa\lambda} = \tfrac{1}{2} I^{\varkappa\lambda\mu\nu} f_{\mu\nu}. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (15)$$

Haben nun zwei gegenseitig senkrechte 2-Richtungen das selbe RIEMANNsche Krümmungsmass, so ist

$$K_{\nu\mu\lambda\varkappa} F^{\nu\mu} F^{\lambda\varkappa} = \varepsilon K_{\nu\mu\lambda\varkappa} f^{\nu\mu} f^{\lambda\varkappa} \quad \ldots \ldots \quad (16)$$

wo ε gleich $+1$ bzw. -1 ist, wenn der Index von $a_{\lambda\varkappa}$ gerade bzw.

[1]) Einführung I, S. 117 und II, S. 134. L. P. EISENHART, RIEMANNian Geometry, S. 81.

[2]) Einführung II, S. 134 für gewöhnliche V_n. L. P. EISENHART, RIEMANNian Geometry, S. 81.

ungerade ist ($\mathfrak{a} = Det\,(a_{\lambda\varkappa})$ also positiv bzw. negativ ist). Diese Gleichung lässt sich infolge (15) auch schreiben

$$\left(K_{\nu\mu\lambda\varkappa} - \frac{\varepsilon}{4} K^{\varrho\sigma\omega\tau} I_{\varrho\sigma\nu\mu} I_{\omega\tau\lambda\varkappa}\right) f^{\nu\mu} f^{\lambda\varkappa} = 0. \quad \ldots \quad (17)$$

Hat jedes Paar von gegenseitig senkrechten 2-Richtungen diese Eigenschaft, so folgt

$$K_{\nu\mu\lambda\varkappa} - \frac{\varepsilon}{4} K^{\varrho\sigma\omega\tau} I_{\varrho\sigma\nu\mu} I_{\omega\tau\lambda\varkappa} = 0, \quad \ldots \ldots \quad (18)$$

welche Gleichung mit

$$K_{\nu\mu\lambda\varkappa} = \tfrac{1}{4}\, \mathfrak{a}\, K^{\varrho\sigma\omega\tau}\, \mathfrak{n}_{\varrho\sigma\nu\mu}\, \mathfrak{n}_{\omega\tau\lambda\varkappa} \quad \ldots \ldots \quad (19)$$

gleichwertig ist. In bezug auf orthogonale Systeme mit Einheitsmassvektoren gilt nämlich

$$I_{\nu\mu\lambda\varkappa} \overset{*}{=} \pm\, \mathfrak{n}_{\nu\mu\lambda\varkappa}\ ;\ \mathfrak{a} \overset{*}{=} \varepsilon, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (20a)$$

wo $\mathfrak{n}_{\nu\mu\lambda\varkappa}$ die 4-Vektordichte vom Gewicht -1 ist. Umgekehrt geht aus der Gleichung (19) hervor, dass gegenseitig senkrechte 2-Richtungen das selbe RIEMANNsche Krümmungsmass haben. Es folgt:

Die Gleichung (19) *ist mit der* EINSTEIN*schen Gleichung gleichwertig* [1]).

§ 2. *Bivektoren in einer V_4.*

Aus der Definition von $I^{\varkappa\lambda\mu\nu}$ folgt unmittelbar

$$I^{\varkappa\lambda\mu\nu} I_{\mu\nu\varrho\sigma} = 4\,\varepsilon\, A^{\varkappa\lambda}_{[\varrho\sigma]}. \qquad (\varepsilon = |\mathfrak{a}|\, \mathfrak{a}^{-1}) \quad \ldots \quad (20b)$$

Wir nehmen jetzt einmal an, dass $\mathfrak{a} > 0$ ist, der Index von $a_{\lambda\varkappa}$ also gerade ist. Es ist dann $\varepsilon = 1$ und wir können schreiben

$$\left.\begin{aligned} I^{\varkappa\lambda\mu\nu} &= \pm\, \mathfrak{a}^{-\frac{1}{2}}\, \mathfrak{E}^{\varkappa\lambda\mu\nu} \\ I_{\varkappa\lambda\mu\nu} &= \pm\, \mathfrak{a}^{+\frac{1}{2}}\, \mathfrak{n}_{\varkappa\lambda\mu\nu}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (21)$$

Wir nennen nun einen Bivektor $f^{\varkappa\lambda}$ *Bivektor erster Art*, wenn

$$f^{\varkappa\lambda} = \tfrac{1}{2} I^{\varkappa\lambda}_{\cdot\cdot\mu\nu} f^{\mu\nu} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (22)$$

ist, während $\varphi^{\varkappa\lambda}$ *Bivektor zweiter Art* genannt wird, wenn

$$\varphi^{\varkappa\lambda} = -\tfrac{1}{2} I^{\varkappa\lambda\mu\nu} \varphi_{\mu\nu}. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (23)$$

ist [2]). Diese Definition gibt Anlass zu folgenden Erörterungen:

[1]) Vgl. T. SIBATA, Wave geometry nr. 25. J. Sci. Hirosima Univ., 8, 63 (1938). Dieses Resultat, dass wir als eine Folge eines allgemeineren Satzes bekommen haben, hat SIBATA in direkter Weise abgeleitet.

[2]) Auch wenn $\varepsilon = -1$ ($\mathfrak{a} < 0$) ist, kann man Bivektoren erster und zweiter Art definieren mittels der Gleichung

$$f^{\varkappa\lambda} = \pm\, i\, I^{\varkappa\lambda}_{\cdot\cdot\mu\nu} f^{\mu\nu}; \qquad i = \sqrt{-1}.$$

Diese Bivektoren können in diesem Falle also nicht reell sein.

1. Das Gleichungssystem (22) enthält nur drei linear unabhängige Gleichungen. Ueberdies sind die Gleichungen homogen und linear in den Bestimmungszahlen von $f^{\varkappa\lambda}$. Deshalb *kann jeder Bivektor erster Art in drei linear unabhängige Bivektoren erster Art ausgedrückt werden.* Dasselbe gilt für Bivektoren zweiter Art.

2. *Jeder Bivektor kann als Summe eines Bivektors erster Art und eines Bivektors zweiter Art geschrieben werden.* Es ist nämlich

$$\left.\begin{aligned} f^{\varkappa\lambda} &= \tfrac{1}{2}(f^{\varkappa\lambda} + \tfrac{1}{2} I^{\varkappa\lambda}_{\cdot\cdot\mu\nu} f^{\mu\nu}) + \tfrac{1}{2}(f^{\varkappa\lambda} - \tfrac{1}{2} I^{\varkappa\lambda}_{\cdot\cdot\mu\nu} f^{\mu\nu}) \\ &= f_1^{\varkappa\lambda} + f_2^{\varkappa\lambda} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad (24)$$

und $f_1^{\varkappa\lambda}$ bzw. $f_2^{\varkappa\lambda}$ ist für jeden beliebigen Bivektor $f^{\varkappa\lambda}$ ein Bivektor erster Art, bzw. zweiter Art. Diese Zerlegung von $f^{\varkappa\lambda}$ ist eindeutig. Man nennt den Bivektor

$$F^{\varkappa\lambda} = \tfrac{1}{2} I^{\varkappa\lambda}_{\cdot\cdot\mu\nu} f^{\mu\nu} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (25)$$

den zu $f^{\varkappa\lambda}$ *konjugierten Bivektor.*

3. *Ein Bivektor $f^{\varkappa\lambda}$ ist dann und nur dann ein Bivektor erster (bzw. zweiter) Art, wenn*

$$f^{\mu[\varkappa} \varphi_{\mu}^{\cdot\lambda]} = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (26)$$

ist für jeden Bivektor $\varphi^{\varkappa\lambda}$ zweiter (bzw. erster) Art, oder auch wenn

$$f^{\mu\lambda} \varphi_{\mu\lambda} = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (27)$$

ist für jeden Bivektor $\varphi^{\varkappa\lambda}$ zweiter (bzw. erster) Art.

Aus (22) und (23) folgt nämlich sogleich

$$f^{\mu\varkappa} \varphi_{\mu}^{\cdot\lambda} = -\tfrac{1}{2} a^{\varkappa\lambda} f_{\varrho\sigma} \varphi^{\varrho\sigma} + f^{\mu\lambda} \varphi_{\mu}^{\cdot\varkappa} . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (28)$$

Nimmt man nun von beiden Seiten dieser Gleichung der alternierenden und den symmetrischen Teil, so folgen (26) und (27). Umgekehrt folgt aus (26), dass

$$(f_1^{\mu[\varkappa} + f_2^{\mu[\varkappa}) \varphi_{\mu}^{\cdot\lambda]} = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (29)$$

ist, wo f_1 und f_2 die Zerlegungsstücke von f erster und zweiter Art sind. Wegen des ersten Teiles des Satzes reduziert sich diese Gleichung auf

$$f_2^{\mu[\varkappa} \varphi_{\mu}^{\cdot\lambda]} = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (30)$$

für jeden Bivektor $\varphi^{\varkappa\lambda}$ zweiter Art. Diese Gleichung gilt aber auch wenn $\varphi^{\varkappa\lambda}$ erster Art ist (erster Teil des Satzes), also für einen beliebigen Bivektor. Daraus geht hervor, dass $f_2^{\varkappa\lambda}$ verschwindet. In analoger Weise wird bewiesen dass aus (27) folgt, dass $f^{\mu\lambda}$ ein Bivektor erster Art ist.

4. *Die 2-Richtung eines einfachen Bivektors erster (bzw. zweiter) Art ist isotrop.*

Im vorigen Paragrafen haben wir schon bewiesen, dass die 2-Richtungen von zwei konjugierten einfachen Bivektoren gegenseitig senkrecht sind. Nun ist aber ein einfacher Bivektor erster Art (bzw. zweiter Art) identisch mit (bzw. entgegengesetzt zu) seinem Konjugierten, woraus hervorgeht, dass die zugehörige 2-Richtung totalisotrop ist. Es gibt zwei Arten von totalisotropen 2-Richtungen, denn die zugehörigen Bivektoren sind immer entweder erster Art oder zweiter Art.

J. LENSE [1]) hat bewiesen, dass es in einer V_4 totalisotrope X_2 gibt, welche in einem beliebigen Punkte eine vorgegebene totalisotrope 2-Richtung haben. Es gibt also auch zwei Arten von totalisotropen X_2, nämlich solche für welche der Bivektor der Tangentialrichtung ein Bivektor erster Art ist und solche für welche dieser Bivektor zweiter Art ist. Wir nennen dementsprechend diese X_2 auch X_2 erster Art bzw. zweiter Art. Diese X_2 sind nur reell, wenn der Index des Fundamentaltensors Zwei ist. Man kann beweisen, dass diese X_2 geodätisch sind.

§ 3. *Die* EINSTEIN*sche Gleichung in einer V_4 als Integrabilitätsbedingung.*

Wir werden jetzt die EINSTEINsche Gleichung in einer V_4 als Integrabilitätsbedingung einer Differentialgleichung bekommen. Dazu beweisen wir den Satz:

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass es Bivektorfelder erster Art (bzw. zweiter Art) gibt mit beliebigem Anfangswert, welche über eine beliebige totalisotrope X_2 zweiter Art (bzw. erster Art) kovariant konstant sind, ist die EINSTEIN*sche Gleichung $K_{\mu\lambda} = \lambda a_{\mu\lambda}$.*

Anders gesagt: Die Differentialgleichung

$$\varphi^{\nu\mu} \nabla_{\mu} f^{\varkappa\lambda} = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (31)$$

für einen Bivektor $f^{\varkappa\lambda}$ erster Art, wo $\varphi^{\varkappa\lambda} = p^{[\varkappa} q^{\lambda]}$ der Tangentialbivektor einer beliebigen totalisotropen X_2 zweiter Art ist, ist dann und nur dann vollständig integrabel, wenn $K_{\mu\lambda} = \lambda a_{\mu\lambda}$ ist.

Beweis: Aus (31) geht hervor

$$\left.\begin{aligned} p^{\mu} \nabla_{\mu} f^{\varkappa\lambda} &= 0 \\ q^{\mu} \nabla_{\mu} f^{\varkappa\lambda} &= 0. \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (32)$$

Die Integrabilitätsbedingungen dieser Gleichungen findet man aus

$$\left.\begin{aligned} 0 &= p^{\mu} \nabla_{\mu} q^{\nu} \nabla_{\nu} f^{\varkappa\lambda} - q^{\mu} \nabla_{\mu} p^{\nu} \nabla_{\nu} f^{\varkappa\lambda} = \\ &= (p^{\mu} \nabla_{\mu} q^{\nu} - q^{\mu} \nabla_{\mu} p^{\nu}) \nabla_{\nu} f^{\varkappa\lambda} + 2 p^{[\mu} q^{\nu]} \nabla_{[\mu} \nabla_{\nu]} f^{\varkappa\lambda} \end{aligned}\right\} \quad . \quad (33)$$

Die Vektoren $p^{\varkappa}$ und $q^{\varkappa}$ sind X_2-bildend, d.h. es gilt

$$p^{\mu} \nabla_{\mu} q^{\nu} - q^{\mu} \nabla_{\mu} p^{\nu} = \alpha p^{\nu} + \beta q^{\nu} . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (34)$$

---

[1]) J. LENSE, Ueber ametrische Mannigfaltigkeiten und quadratische Differentialformen mit verschwindender Diskriminante. Jahresber. d. Deutschen Math. Ver., **35**, 288 (1926).

Der erste Term im rechten Glied der Gleichung (33) verschwindet daher wegen (32). Es bleibt

$$\varphi^{\nu\mu} K_{\nu\mu\sigma}^{\cdot\cdot\cdot[\varkappa} f^{\lambda]\sigma} = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (35)$$

für jeden einfachen Bivektor $\varphi^{\nu\mu} = p^{[\nu} q^{\mu]}$ zweiter Art und jeden Bivektor $f^{\varkappa\lambda}$ erster Art.

Es gibt in einem Punkte drei linear unabhängige einfache Bivektoren zweiter Art. Jeder Bivektor $\varphi^{\varkappa\lambda}$ zweiter Art kann daher wegen des Satzes 1 von § 2 als Summe von drei einfachen Bivektoren zweiter Art geschrieben werden. Die Gleichung (35) ist linear in den Bestimmungszahlen von $\varphi^{\nu\mu}$. Es gilt also

$$\varphi^{\nu\mu} K_{\nu\mu\sigma}^{\cdot\cdot\cdot[\varkappa} f^{\lambda]\sigma} = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (36)$$

für jeden Bivektor $\varphi^{\nu\mu}$ zweiter Art und jeden Bivektor $f^{\varkappa\lambda}$ erster Art. Aus den im vorigen Paragrafen bewiesenen Sätzen geht nun erstens hervor, dass $\varphi^{\nu\mu} K_{\nu\mu\lambda\varkappa}$ ein Bivektor zweiter Art ist, also

$$\varphi^{\nu\mu} K_{\nu\mu\lambda\varkappa} + \tfrac{1}{2} \varphi^{\nu\mu} K_{\nu\mu\varrho\sigma} I^{\varrho\sigma}_{\cdot\cdot\lambda\varkappa} = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \quad (37)$$

ist und zweitens, dass aus (37) folgt, dass $K_{\nu\mu\lambda\varkappa} + \frac{1}{2} K_{\nu\mu\varrho\sigma} I^{\varrho\sigma}_{\cdot\cdot\lambda\varkappa}$ in bezug auf die Indizes $\nu\mu$ erster Art ist, d.h. dass gilt

$$K_{\nu\mu\lambda\varkappa} + \tfrac{1}{2} K_{\nu\mu\varrho\sigma} I^{\varrho\sigma}_{\cdot\cdot\lambda\varkappa} = \tfrac{1}{2} I_{\nu\mu}^{\cdot\cdot\varrho\sigma} (K_{\varrho\sigma\lambda\varkappa} + \tfrac{1}{2} I^{\omega\tau}_{\cdot\cdot\lambda\varkappa} K_{\varrho\sigma\omega\tau}). \; . \quad (38)$$

Verwechslung von $\nu\mu$ und $\lambda\varkappa$ gibt eine neue Gleichung. Addition dieser zwei Gleichungen führt zu

$$K_{\nu\mu\lambda\varkappa} = \tfrac{1}{4} I_{\nu\mu\omega\tau} K^{\omega\tau\varrho\sigma} I_{\varrho\sigma\lambda\varkappa}, \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (39)$$

welche Gleichung, wie bewiesen worden ist, mit der Gleichung

$$K_{\mu\lambda} = \lambda\, a_{\mu\lambda} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (40)$$

identisch ist. Umgekehrt folgt (36) aus (39), woraus hervorgeht, dass die EINSTEINsche Gleichung nicht nur eine notwendige, doch auch eine hinreichende Bedingung darstellt für die im Anfang dieses Paragrafen genannte Eigenschaft [1]).

§ 4. *Eine geometrische Charakterisierung der konformeuklidischen Räume gerader Dimension.*

Wir beweisen den Satz:

Eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass eine V_n von gerader Dimension $n = 2m$ konformeuklidisch ist, ist dass die Summe der RIEMANNschen Krümmungsmasse für jedes System von m gegenseitig senkrechten 2-Richtungen in jedem Punkte von der besonderen Wahl dieses Systems unabhängig ist.

[1]) T. SIBATA hat die EINSTEINsche Gleichung als Integrabilitätsbedingung einer Differentialgleichung für Spinoren bekommen. J. Sci. Hirosima Univ. 8, 51—79 (1938).

Im Folgenden wird sich herausstellen, dass in diesem Falle die Summe $m\varkappa$ ist, wo $\varkappa$ die skalare Krümmung der V_n ist. Für den Beweis des genannten Satzes wählen wir ein beliebiges System von n gegenseitig senkrechten Einheitsvektoren $\underset{1}{i}{}^{\varkappa}, \ldots, \underset{n}{i}{}^{\varkappa}$ und betrachten die m 2-Richtungen $\underset{1}{i}{}^{[\varkappa} \underset{2}{i}{}^{\lambda]}, \underset{3}{i}{}^{[\varkappa} \underset{4}{i}{}^{\lambda]}, \ldots$. Ist die oben genannte Summe von Krümmungsmasse, für welche wir die Buchstabe k einführen, konstant, so gilt nach (13) in bezug auf das orthogonale Bezugssystem mit den Massvektoren $\underset{j}{i}{}^{\varkappa}$

$$-k = \underset{12}{\varepsilon} K_{1212} + \underset{34}{\varepsilon} K_{3434} + \underset{56}{\varepsilon} K_{5656} + \ldots\ldots \; . \; . \; . \quad (41)$$

wo

$$\underset{ij}{\varepsilon} = \underset{i}{\varepsilon}\, \underset{j}{\varepsilon} \qquad \underset{j}{\varepsilon} = \underset{j}{i}{}^{\varkappa}\, \underset{j}{i}{}_{\varkappa} = \pm 1 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (42)$$

ist. Betrachten wir jetzt die 2-Richtungen

$$\underset{1'}{i}{}^{[\varkappa} \underset{2}{i}{}^{\lambda]}, \; \underset{3'}{i}{}^{[\varkappa} \underset{4}{i}{}^{\lambda]}, \; \underset{5}{i}{}^{[\varkappa} \underset{6}{i}{}^{\lambda]}, \text{ usw.}, \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (43)$$

wo

$$\left.\begin{aligned} &\underset{1'}{i}{}^{\varkappa} = \alpha \underset{1}{i}{}^{\varkappa} + \beta \underset{3}{i}{}^{\varkappa} \;, \quad \alpha^2 + \beta^2 \underset{1}{\varepsilon}\underset{3}{\varepsilon} = 1 \;, \quad \underset{1'}{\varepsilon} = \underset{1}{\varepsilon} \;, \quad \underset{3'}{\varepsilon} = \underset{3}{\varepsilon} \\ &\underset{3'}{i}{}^{\varkappa} = \beta \underset{1}{\varepsilon} \underset{1}{i}{}^{\varkappa} - \alpha \underset{3}{\varepsilon} \underset{3}{i}{}^{\varkappa} \end{aligned}\right\} \; . \; . \quad (44)$$

Es gilt dann auch:

$$\left.\begin{aligned} -k = {} & \underset{12}{\varepsilon} K_{\nu\mu\lambda\varkappa} (\alpha \underset{1}{i}{}^{\nu} + \beta \underset{3}{i}{}^{\nu}) \underset{2}{i}{}^{\mu} (\alpha \underset{1}{i}{}^{\lambda} + \beta \underset{3}{i}{}^{\lambda}) \underset{2}{i}{}^{\varkappa} + \\ & + \underset{34}{\varepsilon} K_{\nu\mu\lambda\varkappa} (\beta \underset{1}{\varepsilon} \underset{1}{i}{}^{\nu} - \alpha \underset{3}{\varepsilon} \underset{3}{i}{}^{\nu}) \underset{4}{i}{}^{\mu} (\beta \underset{1}{\varepsilon} \underset{1}{i}{}^{\lambda} - \alpha \underset{3}{\varepsilon} \underset{3}{i}{}^{\lambda}) \underset{4}{i}{}^{\varkappa} + \underset{56}{\varepsilon} K_{5656} + \ldots \end{aligned}\right\} \quad (45)$$

woraus unter Berücksichtigung von (44) hervorgeht

$$\left.\begin{aligned} -k = {} & \alpha^2 [\underset{12}{\varepsilon} K_{1212} + \underset{34}{\varepsilon} K_{3434} + \underset{56}{\varepsilon} K_{5656} + \ldots] \\ & + \beta^2 \underset{13}{\varepsilon} [\underset{23}{\varepsilon} K_{2323} + \underset{14}{\varepsilon} K_{1414} + \underset{56}{\varepsilon} K_{5656} + \ldots] + 2 \underset{1}{\varepsilon} \alpha\beta [\underset{2}{\varepsilon} K_{1232} - \underset{4}{\varepsilon} K_{1434}] \\ = {} & -(\alpha^2 + \beta^2 \underset{13}{\varepsilon}) k + 2 \underset{1}{\varepsilon} \alpha\beta (\underset{2}{\varepsilon} K_{1232} - \underset{4}{\varepsilon} K_{1434}) \end{aligned}\right\} \quad (46)$$

Wegen (44) ist daher

$$\underset{2}{\varepsilon} K_{1232} = \underset{4}{\varepsilon} K_{1434} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (47)$$

Für das orthogonale System mit den Massvektoren

$$\underset{1}{i}{}^{\varkappa}, \; \gamma \underset{2}{i}{}^{\varkappa} + \delta \underset{4}{i}{}^{\varkappa}, \; \underset{3}{i}{}^{\varkappa}, \; \delta \underset{2}{\varepsilon} \underset{2}{i}{}^{\varkappa} - \gamma \underset{4}{\varepsilon} \underset{4}{i}{}^{\varkappa}, \; \underset{5}{i}{}^{\varkappa}, \; \underset{6}{i}{}^{\varkappa}, \ldots \; . \; . \; . \; . \; . \quad (48)$$

mit

$$\gamma^2 + \delta^2 \underset{2}{\varepsilon}\underset{4}{\varepsilon} = 1 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (49)$$

lautet die Gleichung (47)

$$\underset{2}{\varepsilon} K_{1\mu 3\varkappa} (\gamma \underset{2}{i}^{\mu} + \delta \underset{4}{i}^{\mu}) (\gamma \underset{2}{i}^{\varkappa} + \delta \underset{4}{i}^{\varkappa}) = \underset{4}{\varepsilon} K_{1\mu 3\varkappa} (\delta \underset{2}{\varepsilon} \underset{2}{i}^{\mu} - \gamma \underset{4}{\varepsilon} \underset{4}{i}^{\mu}) (\delta \underset{2}{\varepsilon} \underset{2}{i}^{\varkappa} - \gamma \underset{4}{\varepsilon} \underset{4}{i}^{\varkappa}), \tag{50}$$

woraus im Verbindung mit (47) hervorgeht

$$K_{1234} + K_{1432} = 0. \tag{51}$$

Es ist also auch

$$-K_{1243} - K_{1342} = 0. \tag{52}$$

Addition dieser zwei Gleichungen ergibt wegen $K_{\nu[\mu\lambda\varkappa]} = 0$

$$3\, K_{1234} - K_{1234} - K_{1423} - K_{1342} = 3\, K_{1234} = 0. \tag{53}$$

Es verschwinden also für jedes orthogonale Bezugssystem die Bestimmungszahlen von $K_{\nu\mu\lambda\varkappa}$ mit vier ungleichen Indizes. Die V_n ist demzufolge (für $m > 1$) konformeuklidisch, also eine C_n [1]. Damit ist der erste Teil des Satzes bewiesen. Der Krümmungsaffinor hat in diesem Falle die Gestalt

$$K_{\nu\mu\lambda\varkappa} = \frac{4}{n-2} \mathfrak{a}_{[\nu[\lambda} L_{\mu]\varkappa]}, \tag{54}$$

wo

$$L_{\lambda\varkappa} = -K_{\lambda\varkappa} + \frac{1}{2(n-1)} K \mathfrak{a}_{\lambda\varkappa} \tag{55}$$

ist [2].

Ist umgekehrt die V_n eine C_n, so gilt (54) und das RIEMANNsche Krümmungsmass der 2-Richtung $\underset{1}{i}^{[\varkappa} \underset{2}{i}^{\lambda]}$ ist

$$\left.\begin{aligned} -\underset{12}{\varepsilon} K_{1212} &= -\underset{12}{\varepsilon} \frac{1}{n-2} (\mathfrak{a}_{11} L_{22} + \mathfrak{a}_{22} L_{11}) = \frac{-1}{n-2} (\underset{2}{\varepsilon} L_{22} + \underset{1}{\varepsilon} L_{11}) \\ &= \frac{-1}{n-2} (L_{2}^{\cdot 2} + L_{1}^{\cdot 1}). \end{aligned}\right\} . \tag{56}$$

Für die Summe im rechten Gliede von (41) findet man in diesem Falle

$$\frac{1}{n-2} L_{\varkappa}^{\cdot\varkappa} = \frac{1}{n-2} \left(-K_{\varkappa}^{\cdot\varkappa} + \frac{n}{2(n-1)} K \right) = \frac{-1}{2(n-1)} K = -m\varkappa. \tag{57}$$

Die Summe der RIEMANNschen Krümmungsmasse ist daher gleich $m\varkappa$, also von der besonderen Wahl des Systems von gegenseitig orthogonalen 2-Richtungen unabhängig. Damit ist der oben genannte Satz bewiesen.

Der Fall $n = 4$.

Das oben erhaltene Resultat werden wir für $n = 4$ etwas näher

[1]) Vgl. Einführung II, S. 204.

[2]) Vgl. Einführung II, S. 201.

betrachten. Die V_4 ist also dann und nur dann eine C_4 wenn die Summe der RIEMANNschen Krümmungsmasse von zwei beliebigen gegenseitig senkrechten 2-Richtungen von der Wahl dieser 2-Richtungen unabhängig ist. Die Summe ist dann stets $2\varkappa$. Nach (13) und (15) gilt in diesem Falle für jeden einfachen Einheitsbivektor $f^{\varkappa\lambda}$ die Gleichung

$$\underset{1}{\varepsilon} K_{\nu\mu\lambda\varkappa} f^{\nu\mu} f^{\lambda\varkappa} + \underset{2}{\varepsilon} K_{\nu\mu\lambda\varkappa} F^{\nu\mu} F^{\lambda\varkappa} = -8\varkappa, \tag{58}$$

wo $\underset{1}{\varepsilon}$ bzw. $\underset{2}{\varepsilon}$ gleich -1 ist, wenn die 2-Richtung von $f^{\varkappa\lambda}$ bzw. $F^{\varkappa\lambda}$ reelle Nullrichtungen enthält und sonst gleich $+1$ ist. Nun ist

$$\mathfrak{a}_{\nu\lambda} \mathfrak{a}_{\mu\varkappa} f^{\nu\mu} f^{\lambda\varkappa} = 2 \underset{1}{\varepsilon}. \tag{59}$$

Multiplikation von (58) mit $\underset{1}{\varepsilon}$ ergibt

$$K_{\nu\mu\lambda\varkappa} f^{\nu\mu} f^{\lambda\varkappa} + \varepsilon K_{\nu\mu\lambda\varkappa} F^{\nu\mu} F^{\lambda\varkappa} = -4\varkappa\, \mathfrak{a}_{\nu\lambda} \mathfrak{a}_{\mu\varkappa} f^{\nu\mu} f^{\lambda\varkappa}. \tag{60}$$

Hier ist $\varepsilon = \underset{1}{\varepsilon} \underset{2}{\varepsilon}$ gleich $+1$ bzw. -1 je nachdem die Determinante $\mathfrak{a} > 0$ bzw. < 0 ist. In dieser Gleichung kann man nun $F^{\lambda\varkappa}$ mittels (15) in $f^{\lambda\varkappa}$ ausdrücken. Dies ergibt

$$(K_{\nu\mu\lambda\varkappa} + \tfrac{1}{4} \varepsilon K^{\varrho\sigma\omega\tau} I_{\varrho\sigma\nu\mu} I_{\omega\tau\lambda\varkappa} + 4\varkappa\, \mathfrak{a}_{\nu\lambda} \mathfrak{a}_{\mu\varkappa}) f^{\nu\mu} f^{\lambda\varkappa} = 0. \tag{61}$$

Die so erhaltene Gleichung gilt für jeden einfachen Bivektor $f^{\lambda\varkappa}$ und deshalb auch für jeden nicht-einfachen Bivektor $f^{\lambda\varkappa}$. Dies hängt damit zusammen, dass man jeden Bivektor als lineare Summe von einfachen Bivektoren schreiben kann. Es gilt daher (vgl. § 1)

$$K_{\nu\mu\lambda\varkappa} + \tfrac{1}{4} \mathfrak{a} K^{\varrho\sigma\omega\tau} \mathfrak{n}_{\varrho\sigma\nu\mu} \mathfrak{n}_{\omega\tau\lambda\varkappa} + 4\varkappa\, \mathfrak{a}_{[\nu[\lambda} \mathfrak{a}_{\mu]\varkappa]} = 0. \tag{62}$$

Diese Gleichung, welche sich nur für $n = 4$ anschreiben lässt, ist nach dem bewiesenen Satze daher gleichbedeutend mit

$$C_{\nu\mu\lambda\varkappa} = 0. \tag{63}$$

Bemerkung. Man kann sofort einsehen, dass (63) aus (62) hervorgeht. Schreibt man nämlich (62) in bezug auf ein beliebiges Orthogonalsystem mit Einheitsmassvektoren, so ergibt sich

$$K_{1234} + \mathfrak{a} K^{1234} \overset{*}{=} 2\, K_{1234} \overset{*}{=} 0 \tag{64}$$

d.h. die orthogonalen Bestimmungszahlen von $K_{\nu\mu\lambda\varkappa}$ mit vier ungleichen Indizes verschwinden.

§ 5. *Eine zweite geometrische Charakterisierung der konformeuklidischen Räume gerader Dimension.*

Im ersten Paragraphen haben wir die skalare Krümmung einer m-Richtung definiert. Wir beweisen jetzt den Satz:

Eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass eine $V_n\,(n=2\,m)$ konformeuklidisch ist, ist dass die Summe der skalaren Krümmungen von zwei beliebigen gegenseitig senkrechten m-Richtungen in jedem Punkte von der besonderen Wahl dieser m-Richtungen unabhängig ist.

Wir werden zeigen, dass in diesem Falle diese Summe stets gleich $2\,\varkappa$ ist. Weil für 2-Richtungen die skalare Krümmung identisch ist mit dem RIEMANNschen Krümmungsmass, ist dieser Satz für $n=4$ identisch mit dem im vorigen Paragraphen bewiesenen Satze.

Für die Summe der skalaren Krümmungen von zwei gegenseitig senkrechten m-Richtungen haben wir (vgl. (4)) den folgenden Ausdruck gefunden

$$\frac{1}{m\,(m-1)}\,(K'+K'')=\frac{1}{m\,(m-1)}\,(K-2\,K_{\mu\lambda}\,a'^{\mu\lambda}+2\,K_{\nu\mu\lambda\varkappa}\,a'^{\mu\lambda}\,a'^{\nu\varkappa}), \qquad (65)$$

welcher Ausdruck also unabhängig von der besonderen Wahl von $a'^{\mu\lambda}$ sein soll. Schreiben wir diesen Ausdruck an einmal für $a'^{\varkappa\lambda}$ und einmal für $\tilde{a}'^{\varkappa\lambda}$, definiert in (8), und subtrahieren wir die zwei erhaltenen Ausdrücke, so ergibt sich

$$2\underset{p}{\varepsilon}\,K_{\nu\mu\lambda\varkappa}\,b^{\nu\varkappa}\,p^{\mu}\,p^{\lambda}-\underset{p}{\varepsilon}\,K_{\mu\lambda}\,p^{\mu}\,p^{\lambda}=2\underset{q}{\varepsilon}\,K_{\nu\mu\lambda\varkappa}\,b^{\nu\varkappa}\,q^{\mu}\,q^{\lambda}-\underset{q}{\varepsilon}\,K_{\mu\lambda}\,q^{\mu}\,q^{\lambda}, \quad . \qquad (66)$$

wo $b^{\lambda\varkappa}$ der Fundamentaltensor einer beliebigen $(m-1)$-Richtung ist und $p^{\varkappa}$ und $q^{\varkappa}$ beliebige zu dieser $(m-1)$-Richtung senkrechte Einheitsvektoren sind. Daraus geht hervor (vgl. § 1), dass

$$2\,K_{\nu\mu\lambda\varkappa}\,b^{\nu\varkappa}\,p^{\mu}\,q^{\lambda}-K_{\mu\lambda}\,p^{\mu}\,q^{\lambda}=0 \quad . \; . \; . \; . \; . \qquad (67)$$

ist, wo $p^{\varkappa}$ und $q^{\varkappa}$ gegenseitig senkrecht sind. Diese Gleichung kann man nun wieder für $n>4$ für verschiedene $b^{\lambda\varkappa}$ anschreiben. Es ergibt sich in ähnlicher Weise wie oben

$$K_{\nu(\mu\lambda)\varkappa}\,p^{\mu}\,q^{\lambda}\,r^{\nu}\,s^{\varkappa}=0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (68)$$

für jedes System von vier gegenseitig senkrechten Vektoren. In bezug auf orthogonale Bezugssysteme gilt daher

$$K_{1243}+K_{1423}=0, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (69)$$

welche Gleichung mit (51) identisch ist. Die V_n ist daher konformeuklidisch (vgl. § 4).

Umgekehrt ist in einer C_n der Ausdruck (65) gleich

$$\frac{1}{m\,(m-1)}\,(K-2\,K_{\mu\lambda}\,a'^{\mu\lambda}+\frac{4}{n-1}\,a_{[\nu|\lambda}\,L_{\mu]\varkappa]}\,a'^{\mu\lambda}\,a'^{\nu\varkappa})=\frac{K}{m\,(n-1)}=2\,\varkappa, \qquad (70)$$

also unabhängig von der besonderen Wahl von $a'^{\lambda\varkappa}$. Damit haben wir den oben genannten Satz bewiesen.

Chemistry. — *Les dérivés aminés de la pentaérythrite.* II. *Le tétraminotétraméthylméthane.* Par F. GOVAERT et M. BEYAERT. (Communicated by Prof. P. E. VERKADE.)

(Communicated at the meeting of June 24, 1939.)

En 1934 l'un de nous commença l'étude des dérivés aminés de la pentaérythrite par un travail sur le tétraminotétraméthylméthane [1]. Il fit connaître le but de ses recherches et montra l'intérêt éventuel que pouvait avoir l'étude de certains dérivés de cette polyamine au point de vue de la stéréochimie de l'azote.

Dans cette première communication furent décrits le mode de préparation ainsi que quelques sels de l'amine.

Tandis que cette étude et celle des dérivés mono-, di- et triaminés de la pentaérythrite se poursuivaient dans notre laboratoire, VAN ALPHEN [2]) publia les résultats d'une recherche au cours de laquelle, ayant suivi notre méthode de préparation, il parvint à isoler, sous forme de monohydrate, l'amine dont il décrit plusieurs dérivés.

Tout récemment parut un travail de LITHERLAND et MANN [3]) qui ont également commencé des recherches dans ce domaine.

Ces auteurs trouvent que notre méthode de préparation n'est pas satisfaisante, sous prétexte que le rendement en est faible et qu'il est nécessaire de travailler en tubes scellés.

La méthode qu'ils préconisent consiste à chauffer le tétrabromeméthylméthane avec le dérivé sodique de la paratoluènesulfamide, suivi de l'hydrolyse du produit de condensation: le tétrakis-p.toluènesulfamidométhylméthane. Ce produit est obtenu avec un rendement de 31 %.

La comparaison de ces résultats avec les notres montre qu'il est assez téméraire de conclure à la supériorité de cette méthode. Nous obtenons en effet immédiatement un rendement de 35 % en bromhydrate de la tétramine.

Il est vrai que le travail en tubes scellés oblige à faire des opérations répétées sur de petites quantités de substance, mais actuellement en opérant la réaction dans un autoclave il nous est possible de mettre en oeuvre 25 à 30 gr. de tétrabromepentaérythrite par opération.

Cette façon de travailler nous avait permis d'obtenir une quantité assez grande de tétrabromhydrate de l'amine et d'aborder l'étude de plusieurs dérivés de celle-ci. Toutefois une partie de nos résultats fut également obtenue et déjà publieé par les auteurs cités plus haut. Nous nous bornerons

1) F. GOVAERT, Proc. Kon. Akad. v. Wetensch., Amsterdam, **37**, 156 (1934).
2) J. VAN ALPHEN, Rec. trav. chim., **57**, 265 (1938).
3) A. LITHERLAND et F. MANN, Soc. 1588 (1938).