In conclusion I wish to express my thanks to the late Dr. LEBZELTER and to Dr. WASTL of Vienna for the Aeta measurements taken by the Reverend VAN OVERBERGH; to Dr. HRDLICKA, Washington, for allowing me to use NEWTON's individual Aeta measurements, kindly copied from the original by Dr. LELAND W. PARR, to Prof. VON EICKSTEDT Breslau for his Veddah, Andamanese and Panyan measurements; to Dr. GUHA, Calcutta for his Kadar indices and for PORTMAN's and MOLESWORTH's Andamanese indices; to Frau Dr. S. MARTIN-OPPENHEIM for the individual data concerning the Semang and Sakai measured by her late husband, to Prof. R. BENNETT BEAN for those of the Igorotes measured by him. I am indebted to the Board for Anthropological Research, University of Adelaïde, South-Australia for a large number of Australian indices, added to my Australian curve and to Dr. ED. QUISUMBING, chief of the National Museum Division, Manila, for the loan of several papers and data on the Aetas.

I repeat my thanks to our countrymen: Dr. JULIEN, for his data concerning the Efé Pygmies and for the individual indices of his recently examined Cameroon Pygmies, the Bakolah or Badjele; Dr. BIJLMER for his valuable data concerning the Tapiro and Pania mountain Pygmies from New Guinea; Miss KEERS for her Simbiring and Karo Batta measurements and Dr. TESCH for the individual figures about the To Pakawa.

Mathematics. — *Zum Triangulationsproblem* [1]). By Prof. L. E. J. BROUWER.

(Communicated at the meeting of September 30, 1939).

§ 1.

Unter einer *geschlossenen p-dimensionalen Umgebungsmannigfaltigkeit* R_p verstehen wir eine katalogisiertkompakte Spezies, welche folgende Eigenschaften besitzt:

1. R_p enthält eine endliche Anzahl s von katalogisierten kompakten Teilspezies $H^1, \ldots, H^s$, wobei jedes H^ν topologisches Bild des Cartesischen Einheitskubus ist, d.h. durch p Koordinaten $x_1^\nu, \ldots, x_p^\nu$ $(0 \leqq x_\varrho^\nu \leqq 1)$ eineindeutig und stetig beschrieben werden kann. Die Grenze von H^ν, d.h. die Spezies derjenigen Punktkerne von H^ν, die ein $x_\mu^\nu = 0$ oder ein $x_\mu^\nu = 1$ besitzen, bezeichnen wir mit L^ν. Das Innere von H^ν; d.h. die Spezies derjenigen Punktkerne von H^ν, für welche $0 <\circ\, x_\varrho^\nu <\circ\, 1$ $(1 \leqq \varrho \leqq p)$, bezeichnen wir mit K^ν.
2. Jedes K^ν ist offen in R_p.
3. R_p ist identisch mit $\mathfrak{S}(K^1, K^2, \ldots, K^s)$.

Alsdann kann eine solche positive Zahl $\eta \circ\!> 0$ angegeben werden, dass, wenn wir die Spezies derjenigen Punktkerne von H^ν, für welche $(s+3)\,\eta <\circ\, x_\varrho^\nu <\circ\, 1-(s+3)\,\eta$ $(1 \leqq \varrho \leqq p)$ mit ${}_sK^\nu$ bezeichnen, R_p ebenfalls mit $\mathfrak{S}({}_sK^1, \ldots, {}_sK^s)$ identisch ist.

Die Spezies derjenigen Punktkerne von H^ν, für welche $(g+3)\,\eta <\circ$ $<\circ\, x_\varrho^\nu <\circ\, 1-(g+3)\,\eta$ $(1 \leqq \varrho \leqq p;\ 0 \leqq g \leqq s)$, bezeichnen wir mit ${}_gH^\nu$.

Die Spezies derjenigen Punktkerne von H^ν, für welche $(3-g)\,\eta <\circ$ $<\circ\, x_\varrho^\nu <\circ\, 1-(3-g)\,\eta$ $(1 \leqq \varrho \leqq p;\ 0 \leqq g \leqq 2)$ bezeichnen wir mit ${}^gH^\nu$.

Die Grenze von ${}_gH^\nu$ bzw. ${}^gH^\nu$ bezeichnen wir mit ${}_gL^\nu$ bzw. ${}^gL^\nu$. Das Innere von ${}_gH^\nu$ bzw. ${}^gH^\nu$ bezeichnen wir mit ${}_gK^\nu$ bzw. ${}^gK^\nu$.

Wir nennen R_p *differenzierbar zusammenhängend*, wenn für be-

---

[1]) Der Inhalt dieses Aufsatzes wurde vom Verf. in der 158. Jahresversammlung der Wiskundig Genootschap zu Amsterdam am 24. April 1937 vorgetragen. Wegen des fragmentarischen Charakters des Resultates sowie der intuitionistisch nicht ganz vollendeten Darstellungsform wurde von einer Veröffentlichung des Vortrags damals einstweilen Abstand genommen und zur erneuten Inangriffnahme des Gegenstandes hat der Verf. seitdem keine Gelegenheit gehabt. Weil aber des Verf. Mitarbeiter Herr Dr. FREUDENTHAL, der dem erwähnten Vortrage s.Z. beiwohnte, kürzlich den Wunsch geäussert hat, an denselben anzuknüpfen, so hat der Verf. geglaubt, sich zur vorliegenden Veröffentlichung, die er sonst als verfrüht betrachten würde, entschliessen zu müssen.

liebig gewählte μ und ν in jedem gemeinsamen Punkte von K^{μ} und K^{ν} die Koordinaten $x_1^{\mu}, \ldots, x_p^{\mu}$ und die Koordinaten $x_1^{\nu}, \ldots, x_p^{\nu}$ nacheinander beschränkt und gleichmässig stetig differenzierbar sind.

Die im folgenden zu betrachtenden R_p werden als differenzierbar zusammenhängend vorausgesetzt.

§ 2.

Unter der *m-teiligen Parallelzerlegung* eines gemessenen p-dimensionalen Fragmentes F verstehen wir die simpliziale Zerlegung von F, welche entsteht, wenn wir in jedem repräsentierenden Simplex S von F jede Höhenlinie in m gleiche Segmente zerlegen, in den Teilpunktkernen ebene $(p-1)$-dimensionale Räume senkrecht anbringen, und in den in dieser Weise entstehenden konvexen Teilpolyedern von S der Reihe nach die zweidimensionalen, die dreidimensionalen, usw. Seiten der jeweilig vorliegenden Teilung ihrer Grenzen entsprechend zentral-sektoral zerlegen.

Unter einem *simplizialen Gitter* $\gamma(F)$ verstehen wir eine eineindeutige Abbildung der Spezies der Grundpunktkerne eines gemessenen p-dimensionalen Fragmentes F auf R_p. Die $\gamma(F)$ darstellenden Grundpunktkerne von R_p werden kurz die *Grundpunktkerne von* $\gamma(F)$ genannt.

Ein in H^r liegendes simpliziales Gitter $\gamma(F)$ heisst *faltenlos in* H^r, wenn es in H^r als zugehöriges simpliziales Bild $\beta^r(F)$ von F ein ein-p-dimensionales Fragment, also ein topologisches Bild von F darstellendes Netzfragment erzeugt.

Ein simpliziales Gitter $\gamma(F)$ heisst *faltenlos*, wenn jeder beliebige ganz in einem einzigen H^r gelegene, einem Teilfragment D von F entsprechende Teil $\gamma(D)$ von $\gamma(F)$, in diesem H^r als zugehöriges simpliziales Bild $\beta^r(D)$ von D ein ein p-dimensionales Fragment, also ein topologisches Bild von D darstellendes Netzfragment erzeugt.

Ein simpliziales Gitter $\gamma(F)$ heisst *durchsichtig*, wenn für jedes r jedes beliebige Netzfragment $\beta^r(D)$ in H^r der im vorigen Absatz eingeführten Art die Eigenschaft besitzt, dass, wenn in H^r $p+1$ ebene $(p-1)$-dimensionale Räume unter den $(p-1)$-dimensionalen Grundseiten von $\beta^r(D)$ und den $(p-1)$-dimensionalen Seiten von H^r beliebig gewählt werden, jeder derselben in einer Entfernung $\circ\!>0$ vom Schnittpunkte der p übrigen gelegen ist.

Wenn in $\gamma(F)$ die Bilder der Eckpunktkerne des Grundsimplexes E von F in H^r liegen, so bezeichnen wir die Breite von $\beta^r(E)$ nach H^r mit $m\{\beta^r(E)\}$. Wenn $m\{\gamma(F)\}$ eine solche positive Zahl ist, dass $m\{\beta^r(E)\} \leqslant m\{\gamma(F)\}$ für jedes E von F und für jedes bei diesem E in Frage kommende r, so nennen wir $m\{\gamma(F)\}$ eine *Maschenmajorante* von $\gamma(F)$.

Ein simpliziales Gitter mit einer Maschenmajorante $<_\circ \frac{1}{2}\eta$ nennen wir *normal*.

Wenn in $\gamma(F)$ die Bilder sämtlicher Eckpunktkerne des Grundsimplexes E von F in H^r liegen, so bezeichnen wir den Quotient des Inhaltes von $\beta^r(E)$ nach H^r und der p-ten Potenz der Breite von $\beta^r(E)$ nach H^r mit $M\{\beta^r(E)\}$. Wenn $M\{\gamma(F)\}$ eine solche positive Zahl $\circ\!>0$ ist, dass $M\{\beta^r(E)\} \geqslant M\{\gamma(F)\}$ für jedes E von F und für jedes bei diesem E in Frage kommende r, so nennen wir $M\{\gamma(F)\}$ eine *Massivitätsminorante* von $\gamma(F)$.

§ 3.

Die s regionalen Koordinaten nach der d-ten $(1 \leqslant d \leqslant s)$ Norm der Punktkerne eines einem normalen simplizialen Gitter $\gamma(F)$ zugrunde liegenden gemessenen p-dimensionalen Fragmentes F.

Unter ${}_df_d$ verstehen wir die stetige Ortsfunktion in R_p, welche in ${}^2H^d$ gleich der nach H^d gemessenen Entfernung von ${}^2L^d$ ist und ausserhalb von ${}^2H^d$ verschwindet.

Unter ${}_df_\nu$ $(\nu \neq d)$ verstehen wir die stetige Ortsfunktion in R_p, welche ausserhalb von ${}^2H^\nu$ verschwindet und in ${}^2H^\nu$ gleich der nach H^ν gemessenen Entfernung von ${}^2L^\nu$ ist, für gewisse ν, für welche ${}^1H^d$ in H^ν eindringt, und zwar für alle ν, für welche ${}^1H^d$ in ${}^2H^\nu$ eindringt, multipliziert mit der nach H^ν gemessenen Entfernung von $\mathfrak{D}({}^1H^d, H^\nu)$.

Sei B ein Grundpunktkern von F, dem in $\gamma(F)$ der Punkt T entspricht, so setzen wir die mit ${}_d\varrho_r(B)$ zu bezeichnende *r-te regionale Koordinate von B nach der d-ten Norm* gleich $\dfrac{{}_df_r(T)}{\sum\limits_\nu {}_df_\nu(T)}$.

Seien $E_1, \ldots, E_{p+1}$ die Eckpunktkerne eines Grundsimplexes E von F, A ein willkürlicher Punktkern von E mit den Normalkoordinaten $c_1, \ldots, c_{p+1}$, so setzen wir die mit ${}_d\varrho_r(A)$ zu bezeichnende *r-te regionale Koordinate von A nach der d-ten Norm* gleich $\sum\limits_\nu c_\nu \cdot {}_d\varrho_r(E_\nu)$.

§ 4.

Die Anfüllung nach der d-ten Norm des normalen simplizialen Gitters $\gamma(F)$.

Seien $E_1, \ldots, E_{p+1}$ die Eckpunktkerne eines Grundsimplexes E von F, deren Bilder $\gamma(E_1), \ldots, \gamma(E_{p+1})$ alle in H^g gelegen sind. Sei A ein in E die Normalkoordinaten $c_1, \ldots, c_{p+1}$ besitzender Punktkern von E. Wir bezeichnen mit A^g den Punktkern von H^g, der im Simplex von H^g der Eckpunktkerne $\gamma(E_1), \ldots, \gamma(E_{p+1})$ nach H^g die barycentrischen Koordinaten $c_1, \ldots, c_{p+1}$ besitzt. Wenn alle A^ν in H^t liegen, bezeichnen wir mit ${}_dA_1^t$ denjenigen Punktkern von H^t, der, wenn jedem A^ν ein Gewicht ${}_d\varrho_\nu(A)$ zugesprochen wird, als Schwerpunktkern der A^ν nach H^t auftritt. Wenn für festes $n \geqslant 1$ alle ${}_dA_n^\nu$ in H^t liegen, bezeichnen wir mit ${}_dA_{n+1}^t$ denjenigen Punktkern von H^t, der, wenn jedem ${}_dA_n^\nu$ ein

Gewicht ${}_{d}\varrho_{\nu}(A)$ zugesprochen wird, als Schwerpunktkern der ${}_{d}A_{n}^{\nu}$ nach H^{t} auftritt.

Wenn die zu den verschiedenen Punktkernen A gehörenden unbegrenzten Folgen von Punktkerngruppen $\{A^{\nu}\}$, $\{{}_{d}A_{1}^{\nu}\}$, $\{{}_{d}A_{2}^{\nu}\}, \ldots$ gleichmässig positiv konvergieren gegen Punktkerne ${}_{d}A$ (was, wenn eine hinreichend kleine Maschenmajorante von $\gamma(F)$ besteht, der Fall sein wird), heisst $\gamma(F)$ *nach der d-ten Norm anfüllbar*. Ein nach allen Normen anfüllbares $\gamma(F)$ werden wir kurz *anfüllbar* nennen.

Wenn für ein nach der d-ten Norm anfüllbares $\gamma(F)$ die Spezies der Punktkerne ${}_{d}A$ in R_{p} ein F topologisch abbildendes p-dimensionales Fragment ${}_{dF}[\gamma(F)]$ darstellt, heisst $\gamma(F)$ *nach der d-ten Norm topologisch anfüllbar* und ${}_{dF}[\gamma(F)]$ die *topologische Anfüllung nach der d-ten Norm* von $\gamma(F)$. Ein nach allen Normen topologisch anfüllbares $\gamma(F)$ werden wir kurz *topologisch anfüllbar* nennen.

Wenn zu einem nach der d-ten Norm topologisch anfüllbaren bzw. zu einem topologisch anfüllbaren $\gamma(F)$ eine solche positive Zahl $e \mathrel{\circ\!>} 0$ angegeben werden kann, dass, bei beliebigen Verrückungen $< e$ in R_{p} der Grundpunktkerne von $\gamma(F)$, die topologische Anfüllbarkeit nach der d-ten Norm bzw. die topologische Anfüllbarkeit von $\gamma(F)$ erhalten bleibt, so heisst $\gamma(F)$ *nach der d-ten Norm stabil topologisch anfüllbar* bzw. heisst $\gamma(F)$ *stabil topologisch anfüllbar*.

Zu jeder positiven Zahl $M \mathrel{\circ\!>} 0$ lässt sich eine solche positive Zahl $m \mathrel{\circ\!>} 0$ bestimmen, dass jedes faltenlose, normale simpliziale Gitter in R_{p} bzw. jedes in H^{r} faltenlose, normale simpliziale Gitter in H^{r} mit einer Massivitätsminorante M und einer Maschenmajorante m stabil topologisch anfüllbar ist.

§ 5.

Die *m-teilige Fortsetzung nach der d-ten Norm* ${}_{d}\gamma(F^{(m)})$ eines nach der d-ten Norm stabil topologisch anfüllbaren $\gamma(F)$ wird erhalten, wenn wir die Spezies der Grundpunktkerne der m-teiligen Parallelzerlegung $F^{(m)}$ von F nach ${}_{dF}[\gamma(F)]$ in R_{p} abbilden.

Wenn für ein stabil topologisch anfüllbares $\gamma(F)$ eine solche natürliche Zahl b und eine solche positive Zahl $e \mathrel{\circ\!>} 0$ bestehen, dass, auch nach beliebigen Verrückungen $< e$ in R_{p} der Grundpunktkerne von $\gamma(F)$, ${}_{d}\gamma(F^{(m)})$ für jedes d und für jedes $m > b$ wiederum stabil topologisch anfüllbar ist, so heisst $\gamma(F)$ *im zweiten Grade stabil topologisch anfüllbar*.

Wenn für ein stabil topologisch anfüllbares $\gamma(F)$ eine solche natürliche Zahl b und eine solche positive Zahl $e \mathrel{\circ\!>} 0$ bestehen, dass, auch nach beliebigen Verrückungen $< e$ in R_{p} der Grundpunktkerne von $\gamma(F)$, ${}_{d}\gamma(F^{(m)})$ für jedes d und für jedes $m > b$ im k-ten Grade stabil topologisch anfüllbar ist, so heisst $\gamma(F)$ *im $(k+1)$-ten Grade stabil topologisch anfüllbar*.

Für gegebenes k kann zu jeder positiven Zahl $M \mathrel{\circ\!>} 0$ eine solche positive Zahl $m \mathrel{\circ\!>} 0$ bestimmt werden, dass jedes faltenlose, normale simpliziale Gitter in R_{p} bzw. jedes in H^{r} faltenlose, normale simpliziale Gitter in H^{r} mit einer Massivitätsminorante M und einer Maschenmajorante m im k-ten Grade stabil topologisch anfüllbar ist.

Wir werden sagen, dass das stabil topologisch anfüllbare simpliziale Gitter $\gamma(F)$ die in R_{p} gelegene katalogisierte kompakte Punktkernspezies C *stabil überdeckt*, wenn ein solches $e \mathrel{\circ\!>} 0$ besteht, dass, auch nach beliebigen Verrückungen $< e$ in R_{p} der Grundpunktkerne von $\gamma(F)$, die Spezies C für jedes d in ${}_{dF}[\gamma(F)]$ enthalten ist.

§ 6.

Sei ${}^{n}\gamma({}^{n}F)$ ein durchsichtiges, normales, im $(s-n+1)$-ten Grade stabil topologisch anfüllbares, $\mathfrak{S}({}_{n}H^{1}, \ldots, {}_{n}H^{n})$ stabil überdeckendes simpliziales Gitter. Das aus den Grundsimplexen von ${}^{n}F$, von deren Eckpunktkernen wenigstens einer in einem in ${}^{0}H^{n+1}$ liegenden Grundpunktkern von ${}^{n}\gamma({}^{n}F)$ abgebildet wird, bestehende Teilfragment von ${}^{n}F$ bezeichnen wir mit ${}^{n}F_{0}$. Alsdann sind sämtliche Grundseiten des p-dimensionalen Fragmentes ${}_{n+1F}[{}^{n}\gamma({}^{n}F_{0})]$ nach H^{n+1} eben. Wir betrachten die nach H^{n+1} ebenen $(p-1)$-dimensionalen Räume, die an der Begrenzung entweder von ${}^{0}H^{n+1}$ oder von einem Grundsimplex von ${}_{n+1F}[{}^{n}\gamma({}^{n}F_{0})]$ teilnehmen, und dehnen diese $(p-1)$-dimensionalen Räume über die Spezies G^{n+1} der zu $\mathfrak{S}\{{}_{n+1F}[{}^{n}\gamma({}^{n}F_{0})], {}^{0}H^{n+1}\}$ gehörigen Punktkerne von H^{n+1} aus. In dieser Weise bekommen wir eine Zerlegung von G^{n+1} in nach H^{n+1} ebene konvexe Polyeder. Von diesen Polyedern zerlegen wir der Reihe nach die zweidimensionalen, die dreidimensionalen, usw. Seiten nach H^{n+1} der jeweilig vorliegenden Teilung ihrer Grenzen entsprechend zentral-sektoral, wodurch in H^{n+1} ein mit G^{n+1} zusammenfallendes Netzfragment Z^{n+1} entsteht.

Wir werden das aus den zu ${}^{n}F_{0}$ gehörenden oder an ${}^{n}F_{0}$ grenzenden bzw. aus den weder zu ${}^{n}F_{0}$ gehörenden noch an ${}^{n}F_{0}$ grenzenden Grundsimplexen von ${}^{n}F$ bestehende Teilfragment von ${}^{n}F$ mit ${}^{n}F_{1}$ bzw. ${}^{n}F_{2}$ und die Spezies der zu $\mathfrak{S}\{{}_{n+1F}[{}^{n}\gamma({}^{n}F_{1})], {}^{0}H^{n+1}\}$ gehörigen Punktkerne von H^{n+1} mit J^{n+1} bezeichnen. Alsdann sind auch von ${}_{n+1F}[{}^{n}\gamma({}^{n}F_{1})]$ sämtliche Grundseiten nach H^{n+1} eben, und lässt sich mittels durch das Netzfragment Z^{n+1} vorgeschriebener zentral-sektoraler Teilung nach H^{n+1} der nicht zu ${}_{n+1F}[{}^{n}\gamma({}^{n}F_{0})]$ gehörenden Grundsimplexe von ${}_{n+1F}[{}^{n}\gamma({}^{n}F_{1})]$ eine Erweiterung von Z^{n+1} zu einem sich über J^{n+1} erstreckenden, *keine Zerlegung von Grundseiten von* ${}_{n+1F}[{}^{n}\gamma({}^{n}F_{2})]$ *bedingenden* Netzfragment X^{n+1} in H^{n+1} herstellen.

Alsdann bilden X^{n+1} und ${}_{n+1F}[{}^{n}\gamma({}^{n}F_{2})]$ zusammen die topologische Anfüllung nach der $(n+1)$-ten Norm ${}_{n+1F}[{}^{n+1}\gamma^{0}({}^{n+1}_{0}F)]$ eines nach der $(n+1)$-ten Norm topologisch anfüllbaren simplizialen Gitters ${}^{n+1}\gamma^{0}({}^{n+1}_{0}F)$.

Dieses simpliziale Gitter ${}^{n+1}\gamma^{0}({}^{n+1}_{\;\;0}F)$ vereinigt ein aus den Grundpunktkernen von X^{n+1} bestehendes, in H^{n+1} faltenloses, normales simpliziales Gitter ${}^{n+1}\gamma^{0}({}^{n+1}_{\;\;0}F_1)$ und das, des weiteren mit ${}^{n+1}\gamma^{0}({}^{n+1}_{\;\;0}F_2)$ zu bezeichnende, normale, durchsichtige, im $(s-n+1)$-ten Grade stabil topologisch anfüllbare simpliziale Gitter ${}^{n}\gamma({}^{n}F_2)$.

Wir wählen nun m so gross, dass *erstens* $\mathfrak{S}({}_{n+1}H^1, \ldots\, {}_{n+1}H^n)$ von ${}^{n+1}_{n+1}\gamma^{0}({}^{n+1}_{\;\;0}F^{(m)})$ und ${}_{n+1}H^{n+1}$ von ${}^{n+1}_{n+1}\gamma^{0}({}^{n+1}_{\;\;0}F^{(m)}_1)$ stabil überdeckt wird, *zweitens* sowohl ${}^{n+1}_{n+1}\gamma^{0}({}^{n+1}_{\;\;0}F^{(m)}_1)$ wie ${}^{n+1}_{n+1}\gamma^{0}({}^{n+1}_{\;\;0}F^{(m)}_2)$ im $(s-n)$-ten Grade stabil topologisch anfüllbar sind. Alsdann haben wir in ${}^{n+1}_{n+1}\gamma^{0}({}^{n+1}_{\;\;0}F^{(m)})$ ein normales, im $(s-n)$-ten Grade stabil topologisch anfüllbares, $\mathfrak{S}({}_{n+1}H^1, \ldots, {}_{n+1}H^{n+1})$ stabil überdeckendes simpliziales Gitter, das mittels passender Verrückung der Grundpunktkerne in ein *durchsichtiges*, normales, im $(s-n)$-ten Grade stabil topologisch anfüllbares, $\mathfrak{S}({}_{n+1}H^1, \ldots, {}_{n+1}H^{n+1})$ stabil überdeckendes simpliziales Gitter ${}^{n+1}\gamma({}^{n+1}F)$ übergeführt werden kann.

Der vorstehende Uebergang von ${}^{n}\gamma({}^{n}F)$ auf ${}^{n+1}\gamma({}^{n+1}F)$ erzeugt aus einem in keiner weiteren Erklärung bedürftigen Weise herzustellenden ${}^{1}\gamma({}^{1}F)$ schliesslich ein ${}^{s}\gamma({}^{s}F)$, d.h. eine *Triangulation von* R_p.

Mathematics. — *Sur un certain système de congruences.* II. Par J. G. VAN DER CORPUT.

(Communicated at the meeting of September 30, 1939.)

§ 3. *Démonstration des propositions.*

Passons maintenant à la

Démonstration de la proposition 1.

Le nombre de solutions du système (1) est égal à la somme

$$\Sigma_3\, N_1(h_1)\, N_2(h_2) \ldots N_n(h_n),$$

étendue aux systèmes $h = (h_1, \ldots, h_n)$, formés par n nombres naturels $h_\nu \leqq p^\alpha$ et vérifiant les congruences

$$\sum_{\nu=1}^{n} b_{\mu\nu}\, h_\nu \equiv g_\mu \quad (mod.\ p^\alpha) \quad (\mu = 1, \ldots, m); \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

$N_\nu(h_\nu)$ désigne le nombre de solutions de la congruence

$$\psi_\nu(y) \equiv h_\nu \qquad (mod.\ p^\alpha).$$

Il suffit donc de démontrer que la somme

$$S = \Sigma_4\, N_1(h_1)\, N_2(h_2) \ldots N_n(h_n),$$

étendue aux systèmes $h = (h_1, \ldots, h_n)$, formés par n nombres naturels $h_\nu \leqq p^\alpha$ et vérifiant à la fois les congruences (16) et les inégalités

$$N_1(h_1) \geqq N_2(h_2) \geqq \ldots \geqq N_n(h_n), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

est inférieure à $c_{32}\, p^{(n-m)\alpha}$, où c_{32} dépend uniquement de la matrice B et du choix des polynômes ψ_ν.

Si l'on barre dans la matrice B les premières $(s+2)\,m-1$ colonnes, le rang de la matrice restante est $\geqq 1$ par hypothèse. Si ϱ_m désigne le plus grand nombre naturel $\leqq n$ tel que la $\varrho_m{}^{\text{ième}}$ colonne possède un élément au moins qui est différent de zéro, on a donc $\varrho_m \geqq (s+2)\,m$. Si l'on barre dans la matrice B les premières $(s+2)(m-1)-1$ colonnes, le rang de la matrice restante est $\geqq 2$ par hypothèse. Par suite il est exclu que chaque colonne d'indice $\geqq (s+2)(m-1)$ soit proportionnelle à la $\varrho_m{}^{\text{ième}}$ colonne. Si ϱ_{m-1} désigne le plus grand nombre naturel $< \varrho_m$ tel que les $\varrho_m{}^{\text{ième}}$ et $\varrho_{m-1}{}^{\text{ième}}$ colonnes forment une matrice de rang 2, on a donc