(Anfang oder Ende) das Extragewicht getragen wurde; der Effekt auf die Steilheit der Dekreszente, d.h. auf Strukturerniedrigung, hängt nur von der Länge der Strecke ab, während welcher das Extragewicht gewirkt hat. Wenn man aber die Last erst nach dem Erreichen des Kontraktionsgipfels erhöht, dann verursacht sie eine steilere Dekreszente als bei Anwendung konstanter Grundlast (Fig. 6a).

IV. *Das Vermögen des Hohlmuskels Last zu heben und sein Vermögen sie zu tragen.*

Das Vermögen mit grosser Arbeitsleistung zu heben setzt Ordnung oder Struktur voraus. Das Vermögen zu tragen dahingegen ist bei niederem Strukturgrad am grössten, soweit es sich um jenes ökonomische Tragen handelt, welches wir bei den glatten Hohlmuskeln „Tonus" nennen, und nicht um Dauertetanus. Der Strukturierungsprozess setzt bei den glatten Hohlmuskeln nach der Erregung ein. Die Wirksamkeit des Muskels beim Heben von Lasten hängt von der Ausgiebigkeit und Geschwindigkeit dieser Strukturbildung ab. Die Strukturierung des gesunden Helixfusses ist von der Höhe der Last, wie gesagt, innerhalb biologischer Grenzen ziemlich unabhängig. Bei Metridium erzeugt die Last tonischen Widerstand unter Störung des Kontraktionsprozesses. Dies passt zur biologischen Funktion dieser Muskeln, die keine grosse Arbeit zu leisten haben, dahingegen einen bestimmten Verkürzungsgrad gegen den Druck, den die Verkürzung selbst verursachte, festhalten müssen. Der niedere Strukturgrad, durch den der Metridiummuskel ausgezeichnet ist, ist für seine Funktion notwendig.

LITERATUR.

1. FREUNDLICH, H. and H. L. RÖDER, Dilatancy and its relation to thixotropy. Trans. Faraday Soc. **34**, 2, 308 (1938).
2. JORDAN, H. J., Die Physiologie des Tonus der Hohlmuskeln, vornehmlich der Bewegungsmuskulatur „Hohlorganartiger" wirbelloser Tiere. Ergebn. d. Physiol. **40**, 437 (1938).
3. JORDAN, H. J., Das Protoplasma der glatten Hohlmuskelzellen als visko-elastisches System. Zs. f. mikr.-anat. Forschung, **45**, 46 (1939).
4. KIPP, P. J., Spiercontractie en spierstructuur bij Metridium senile L. Dissertatie Utrecht (1939).
5. ROSSEM, A. VAN and H. VAN DER MEYDEN, Plasticity and elasticity of rubber. India-Rubber Journ. (Sept. 1928).

Mathematics. — *Sur quelques fonctions arithmétiques élémentaires.*

Par J. G. VAN DER CORPUT.

(Communicated at the meeting of October 28, 1939.)

Je me propose de déduire, d'une manière élémentaire et sans utiliser la théorie des nombres premiers, une valeur approximative de la somme $\sum_{n \leqq X} f(n)$ étendue aux nombres naturels $n \leqq X$, où la fonction $f(n)$, définie pour tout nombre naturel n, est indépendant de X et remplit certaines conditions générales. Dans cet article X désigne un nombre qui croît indéfiniment et je désignerai $\log X$ par x. Les fonctions f, g, a et b, figurant dans cet article, ne dépendent pas de X. Je dirai que $f(n)$ possède la propriété multiplicative si elle ne s'annule pas pour chaque nombre naturel n et si elle vérifie la relation

$$f(u)\, f(v) = f(uv)$$

pour chaque couple de nombres naturels u et v qui sont premiers entre eux. Dans ce cas on a $f(1) = 1$. Un des mes résultats sera la

Proposition 1: *Si $f(n)$ possède la propriété multiplicative et s'il existe un nombre naturel λ tel que la fonction*

$$g(p^\varrho) = f(p^\varrho) - \binom{\lambda}{1} f(p^{\varrho-1}) + \binom{\lambda}{2} f(p^{\varrho-2}) - \ldots \pm \binom{\lambda}{\varrho} f(1). \quad . \quad (1)$$

($\varrho \geqq 1$) possède la propriété que le produit

$$\prod_p \left(1 + \frac{|g(p)|}{p} + \frac{|g(p^2)|}{p^2} + \ldots\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

converge, on a

$$X^{-1} x^{1-\lambda} \sum_{n \leqq X} f(n) \to \frac{P}{(\lambda - 1)!}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

où

$$\left.\begin{aligned} P &= \prod_p \left(1 + \frac{g(p)}{p} + \frac{g(p^2)}{p^2} + \ldots\right) \\ &= \prod_p \left\{\left(1 - \frac{1}{p}\right)^\lambda \left(1 + \frac{f(p)}{p} + \frac{f(p^2)}{p^2} + \ldots\right)\right\} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Cette proposition contient le résultat suivant.

Proposition 2: *Si $f(n)$ possède la propriété multiplicative et si $f(p^{\varrho})$ est pour tout nombre premier p et pour chaque nombre naturel ϱ égal à un nombre $\psi(\varrho)$ indépendant de p tel que $\psi(1)$ soit égal à un nombre naturel λ et qu'on ait*

$$|\psi(\varrho)| \leqq K\, 2^{\varrho}\, \varrho^{-2} \qquad (\varrho \geqq 1),$$

K désignant un nombre convenable indépendant de ϱ, la relation (3) *vaut avec*

$$P = \prod_{p} \left\{ \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{\lambda} \left(1 + \frac{\psi(1)}{p} + \frac{\psi(2)}{p^2} + \dots\right) \right\}.$$

En effet, si l'on définit $g(p^{\varrho})$ par (1), on a

$$g(p) = \psi(\varrho) - \binom{\lambda}{1} w = \lambda - \lambda = 0$$

et pour chaque entier $\varrho > \lambda$

$$|g(p^{\varrho})| \leqq K \left\{ \frac{2^{\varrho}}{\varrho^2} + \binom{\lambda}{1} \frac{2^{\varrho-1}}{(\varrho-1)^2} + \dots + \binom{\lambda}{\varrho} \frac{2^{\varrho-\lambda}}{(\varrho-\lambda)^2} \right\},$$

donc

$$|g(p^{\varrho})| \leqq K_1\, 2^{\varrho}\, \varrho^{-2},$$

K_1 désignant un nombre convenable indépendant de ϱ et de p. La dernière inégalité vaut aussi pour $\varrho = 1, 2, \dots, \lambda$, si l'on choisit K_1 convenablement, de sorte que le produit figurant dans (2) converge.

La fonction $\tau_{\omega}(n)$, désignant le nombre de manières d'écrire n comme le produit de ω nombres naturels, possède la propriété multiplicative; en effet, à chaque couple de décompositions des nombres

$$u = u_1\, u_2 \dots u_{\omega} \quad \text{et} \quad v = v_1\, v_2 \dots v_{\omega}$$

(u et v sont premiers entre eux) correspond une et une seule décomposition de

$$uv = (u_1\, v_1)\; (u_2\, v_2) \dots (u_{\omega}\, v_{\omega}),$$

parce que u_{σ} $(\sigma = 1, \dots, \omega)$ est le plus grand commun diviseur de u et $u_{\sigma}\, v_{\sigma}$. En outre nous savons que $\tau_{\omega}(p^{\varrho})$ est pour tout nombre premier p et pour tout nombre naturel ϱ égal au nombre de manières d'écrire p^{ϱ} sous la forme

$$p^{\varrho} = p^{\varrho_1} \cdot p^{\varrho_2} \dots p^{\varrho_{\omega}},$$

c'est-à-dire $\tau_{\omega}(p^{\varrho})$ est le nombre de systèmes formés par ω entiers $\geqq 0$

dont la somme vaut ϱ. On a donc

$$\tau_{\omega}(p^{\varrho}) = \binom{\varrho + \omega - 1}{\varrho} \quad (\varrho \geqq 1) \quad \text{et} \quad \tau_{\omega}(p) = \omega.$$

La proposition 2, appliquée avec

$$f(n) = \tau_{\omega}^{l}(n); \qquad \psi(\varrho) = \binom{\varrho + \omega - 1}{\varrho}^{l}; \qquad \lambda = \omega^{l},$$

nous fournit la

Proposition 3: *Si ω et l désignent des nombres naturels, on a*

$$X^{-1}\, x^{1-\omega^l} \sum_{n \leqq X} \tau_{\omega}^{l}(n) \to \frac{P}{(\omega^l - 1)!},$$

où

$$P = \prod_{p} \left\{ \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{\omega^l} \left(1 + \frac{\binom{\omega}{1}^l}{p} + \frac{\binom{\omega+1}{2}^l}{p^2} + \dots\right) \right\}.$$

Comme P est positif, la somme

$$\sum_{n \leqq X} \tau_{\omega}^{l}(n)$$

possède l'ordre de grandeur exact de $X x^{\omega^l - 1}$.

Dans son article: Estimation of certain sums containing primes, M. VINOGRADOW[1]) a écrit par erreur que $\sum_{n \leqq X} \tau_3^2(n)$ est tout au plus de l'ordre $X x^5$, ce qui n'est pas juste, la somme possédant l'ordre de grandeur de $X x^8$. Dans l'assertion du lemme correspondant de M. VINOGRADOW (le lemme 4) il faut remplacer $\mu^{\frac{13}{8}}$ par μ^2. Je reviens à ce lemme dans un article que je publie en même temps dans ces Proceedings sous le titre: Sur un lemme de M. VINOGRADOW.

Passons maintenant aux démonstrations.

Lemme 1: *Si la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(n)}{n}$ est convergente, on a*

$$X^{-1} \sum_{n \leqq X} g(n) \to 0.$$

Démonstration: Sons nuire à la généralité nous pouvons supposer X entier. Si nous posons

$$S_h' = \sum_{n=h}^{\infty} \frac{g(n)}{n},$$

---

[1]) Bulletin de l'Académie des Sciences de l'URSS, Classe des Sciences mathématiques et naturelles (1938), p. 399—416, en russe avec un résumé anglais; voir p. 406.

nous avons $g(h) = (S'_h - S'_{h+1})\, h$, donc

$$\sum_{h=1}^{X} g(h) = \sum_{h=1}^{X} (S'_h - S'_{h+1})\, h$$
$$= \sum_{h=1}^{X} h\, S'_h - \sum_{h=1}^{X+1} (h-1)\, S'_h$$
$$= -X\, S'_{X+1} + \sum_{h=1}^{X} S'_h,$$

d'où suit l'assertion en vertu de $S'_h \to 0$.

Lemme 2: *Si*

$$X^{-1}\, x^{1-\alpha} \sum_{n \leqq X} g(n)$$

est borné, où α est positif et indépendant de X, l'expression

$$x^{-\alpha} \sum_{n \leqq X} \frac{g(n)}{n}$$

est bornée également.

Démonstration: Si nous posons

$$S_h = \sum_{n=1}^{h} f(n) \quad (h \geqq 1); \qquad S_0 = 0$$

et si X est entier, la somme

$$\sum_{n=1}^{X} \frac{f(n)}{n} = \sum_{n=1}^{X} \frac{S_n - S_{n-1}}{n} = \sum_{n=1}^{X} \frac{S_n}{n} - \sum_{n=1}^{X-1} \frac{S_n}{n+1}$$
$$= X^{-1}\, S_X + \sum_{n=1}^{X-1} \frac{S_n}{n\,(n+1)}$$

est en valeur absolue

$$\leqq K_2\, x^{\alpha-1} + K_2 \sum_{n=1}^{X-1} \frac{(\log(n+1))^{\alpha-1}}{n+1} \leqq K_3\, x^{\alpha}$$

où K_2 et K_3 désignent des nombres convenables indépendants de X.

Lemme 3: *Si α et β sont positifs, la somme*

$$S = \sum_{uv \leqq X} (\log(u+1))^{\alpha-1}\, (\log(v+1))^{\beta-1},$$

étendue aux couples de nombres naturels u et v avec $uv \leqq X$, possède la propriété

$$X^{-1}\, x^{1-\alpha-\beta}\, S \to \frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.$$

Démonstration: On a

$$\sum_{v \leqq \frac{X}{u}} (\log(v+1))^{\beta-1} = \left\{\frac{X}{u} + o\left(\frac{X}{u}\right)\right\} \left(\log\frac{X}{u} + 1\right)^{\beta-1},$$

par conséquent

$$S = \sum_{u \leqq X} \left\{\frac{X}{u} + o\left(\frac{X}{u}\right)\right\} (\log(u+1))^{\alpha-1} \left(\log\frac{X}{u} + 1\right)^{\beta-1}$$
$$= (X + o(X)) \int_1^X (\log u)^{1-\alpha} \left(\log\frac{X}{u}\right)^{\beta-1} \frac{du}{u}$$
$$= (X + o(X)) \int_0^x v^{\alpha-1}\, (x-v)^{\beta-1}\, dv$$
$$= (X + o(X))\, x^{\alpha+\beta-1}\, \frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.$$

Proposition 4: *Si la série*

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(n)}{n}$$

converge absolument et si l'on pose

$$f(n) = \sum_{d \mid n} g(d),$$

on a

$$X^{-1} \sum_{n \leqq X} f(n) \to S.$$

Démonstration: On a

$$\sum_{n \leqq X} f(n) = \sum_{n \leqq X} \sum_{d \mid n} g(d) = \sum_{n \leqq X} g(d) \sum_{\substack{n \leqq X \\ n \equiv 0\,(\mathrm{mod.}\,d)}} 1$$
$$= \sum_{d \leqq X} g(d) \left[\frac{X}{d}\right]$$
$$= X \sum_{d \leqq X} \frac{g(d)}{d} - \sum_{d \leqq X} g(d) \left\{\frac{X}{d} - \left[\frac{X}{d}\right]\right\}.$$

Le dernier terme est en valeur absolue

$$\leqq \sum_{d \leqq X} |g(d)|$$

et cette expression, divisée par X, tend vers zéro d'après le lemme 1. Ainsi la proposition est démontrée.

Proposition 5: *Supposons*

$$X^{-1}\, x^{1-\alpha} \sum_{n \leqq X} a(n) \rightarrow \frac{A}{\Gamma(\alpha)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (5)$$

et

$$X^{-1}\, x^{1-\beta} \sum_{n \leqq X} b(n) \rightarrow \frac{B}{\Gamma(\beta)}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (6)$$

où A, B, α et β ne dépendent pas de X et où α ei β sont positifs; supposons en outre que le membre de gauche de (5) reste borné si l'on remplace $a(n)$ par sa valeur absolue.

Sous ces conditions la fonction

$$c(n) = \sum_{d \mid n} a(d)\, b\left(\frac{n}{d}\right)$$

possède la propriété

$$X^{-1}\, x^{1-\alpha-\beta} \sum_{n \leqq X} c(n) \rightarrow \frac{A\,B}{\Gamma(\alpha+\beta)}.$$

Démonstration: On a

$$\begin{aligned}
\sum_{n \leqq X} c(n) &= \sum_{n \leqq X} \sum_{d \mid n} a(d)\, b\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{uv \leqq X} a(u)\, b(v) \\
&= \sum_{uv \leqq X} a(u) \left\{ b(v) - \frac{B}{\Gamma(\beta)} (\log(v+1))^{\beta-1} \right\} \\
&+ \frac{B}{\Gamma(\beta)} \sum_{uv \leqq X} (\log(v+1))^{\beta-1} \left\{ a(u) - \frac{A}{\Gamma(\alpha)} (\log(u+1))^{\alpha-1} \right\} \qquad (7) \\
&+ \frac{A\,B}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)} \sum_{uv \leqq X} (\log(u+1))^{\alpha-1} (\log(v+1))^{\beta-1}
\end{aligned}$$

Dans le membre de droite le premier terme vaut

$$\sum_{u \leqq X} |\, a(u) \,|\; o\left(\frac{X}{u}\right)\left(\log \frac{X}{u} + 1\right)^{\beta-1} = o\,(X\, x^{\alpha+\beta-1});$$

si β est $\geqq 1$, ce résultat suit du lemme 2, appliqué avec $g(n) = |\, a(n)\,|$; si β est < 1, on obtient le résultat d'une manière analogue. De la même manière on trouve que l'expression figurant dans (7) est également égale à $o\,(X\, x^{\alpha+\beta-1})$ de sorte que l'assertion suit du lemme 3.

Proposition 6: *Si $g(n)$ et $h(n)$ possèdent la propriété multiplicative, la fonction*

$$f(n) = \sum_{d \mid n} g(d)\, h\left(\frac{n}{d}\right)$$

possède également cette propriété

Démonstration: Si u et v sont des nombres naturels qui sont premiers entre eux, on a

$$\begin{aligned}
f(u)\, f(v) &= \sum_{d' \mid u} \sum_{d'' \mid u} g(d')\, g(d'')\, h\left(\frac{u}{d'}\right) h\left(\frac{v}{d''}\right) \\
&= \sum_{d \mid uv} g(d)\, h\left(\frac{n}{d}\right) = f(uv),
\end{aligned}$$

où $d = d'\, d''$.

Démonstration de la proposition 1:

Traitons d'abord le cas particulier $\lambda = 1$. Il suit de (1)

$$g(p^{\varrho}) = f(p^{\varrho}) - f(p^{\varrho-1}) \qquad (\varrho \geqq 1),$$

par conséquent

$$\begin{aligned}
f(p^{\varrho}) &= 1 + g(p) + g(p^2) + \ldots + g(p^{\varrho}) \\
&= \sum_{d \mid p^{\varrho}} g(d).
\end{aligned}$$

D'après la proposition 6 (appliquée avec $h(n) = 1$) on a donc pour chaque nombre naturel

$$f(n) = \sum_{d \mid n} g(d),$$

si la fonction $g(n)$ est définie de telle façon qu'elle possède la propriété multiplicative. La série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\, g(n)\,|}{n} = \prod_{p} \left\{ 1 + \frac{|\, g(p)\,|}{p} + \frac{|\, g(p^2)\,|}{p^2} + \ldots \right\}$$

converge d'après l'hypothèse, de sorte que le cas particulier $\lambda = 1$ suit de la proposition 4.

Supposons maintenant que λ soit $\geqq 2$ et que la proposition 1 soit déjà démontrée avec $\lambda - 1$ au lieu de λ.

Pour chaque $s > 1$ on a en vertu de (1)

$$1 + \frac{g(p)}{p^s} + \frac{g(p^2)}{p^{2s}} + \ldots = \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{\lambda} \left(1 + \frac{f(p)}{p^s} + \frac{f(p^2)}{p^{2s}} + \ldots\right).$$

Si nous definissons la fonction $b(n)$ par la propriété multiplicative et par

$$1 + \frac{b(p)}{p^s} + \frac{b(p^2)}{p^{2s}} + \ldots = \left(1 - \frac{1}{p^s}\right) \left(1 + \frac{f(p)}{p^s} + \frac{f(p^2)}{p^{2s}} + \ldots\right),$$

la proposition, qui est à démontrer, appliquée avec $\lambda - 1$ au lieu de λ, nous apprend

$$X^{-1}\, x^{2-\lambda} \sum_{n \leqq X} b(n) \to \frac{P}{(\lambda-2)!}.$$

On a

$$1 + \frac{f(p)}{p^s} + \frac{f(p^2)}{p^{2s}} + \ldots = \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} \left(1 + \frac{b(p)}{p^s} + \frac{b(p^2)}{p^{2s}} + \ldots\right),$$

par conséquent

$$f(p^\varrho) = 1 + b(p) + \ldots + b(p^\varrho) = \sum_{d \mid p^\varrho} b(d),$$

donc d'après la proposition 6

$$f(n) = \sum_{d \mid n} b(d) = \sum_{d \mid n} b\left(\frac{n}{d}\right)$$

et la proposition 5, appliquée avec

$$a(n) = \alpha = A = 1\,; \quad B = P\,; \qquad\qquad \beta = \lambda - 1$$

donne l'assertion du théorème 1.

Mathematics. — *Sur un lemme de* M. VINOGRADOW. Par J. G. VAN DER CORPUT.

(Communicated at the meeting of October 28, 1939.)

M. VINOGRADOW [1]) a trouvé une borne supérieure pour la valeur absolue d'une somme S de la forme

$$S = \sum_y \omega(y) \sum_x e(m f(xy))\,; \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

dans cette somme m désigne un nombre naturel, $e(u) = e^{2\pi i u}$,

$$f(u) = \tfrac{1}{2}\, \alpha\, u^2 + \beta\, u \qquad (\alpha \text{ et } \beta \text{ réels}) \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

et la somme est étendue aux couples d'entiers x et y vérifiant les inégalités

$$\text{où} \quad \left.\begin{array}{ll} Y_0 < y \leqq Y_1, & 0 < xy \leqq N, \\ 1 \leqq Y_0 < Y_1 \leqq N & \text{et} \quad N \geqq 3. \end{array}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

Considérons la somme plus générale

$$S_m = \sum_y \omega(y) \sum_x \psi(x)\, e(m f(xy))\,;$$

m désigne un nombre naturel, $f(u)$ est défini par (2) et la somme double est étendue aux couples d'entiers x et y tels que les points à coordonnées x et y appartiennent à un ensemble donné E situé dans le rectangle $|x| \leqq A$, $|y| \leqq B$ où A et B sont $\geqq 2$. Si E contient deux points différents (x, y_0) et (x, y_1) je supposerai que E contient tous les points (x, y) pour lesquels y est entier et situé entre y_0 et y_1. Supposons en outre que $\psi(x)$ soit défini pour chaque entier x avec $|x| \leqq A$, que $\omega(y)$ soit défini pour chaque entier y avec $|y| \leqq B$ et qu'on ait

$$\sum_{|x| \leqq A} |\psi(x)|^2 \leqq A\, \Psi^2\,; \qquad \sum_{|y| \leqq B} |\omega(x)|^2 \leqq B\, \Omega^2 \quad \ldots \quad (4)$$

(Ψ et $\Omega > 0$),

$$\left| \alpha - \frac{a}{q} \right| \leqq \frac{\tau}{q^2} \qquad \text{et } \tau \geqq 1, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

où $\frac{a}{q}$ désigne une fraction irréductible à dénominateur positif.

[1]) Bulletin de l'Académie des Sciences de l'URSS, Classe des Sciences mathématiques et naturelles (1938), p. 399—416, en russe avec un résumé anglais: voir le lemme 4 (p. 406). Comparer aussi le renvoi paru dans l'article que je publie en même temps dans ces Proceedings sous le titre: Sur quelques fonctions arithmétiques élémentaires.