Mathematics. — *Ueber* BESSEL*sche*, LOMMEL*sche und* WHITTAKER*sche Funktionen*. (Zweite Mitteilung). Von C. S. MEIJER. (Communicated by Prof. J. G. VAN DER CORPUT).

(Communicated at the meeting of November 25, 1939.)

§ 5. In einer früheren Arbeit [18]) habe ich für das Produkt $J_\mu(z)\,J_\nu(z)$ die folgenden Integraldarstellungen abgeleitet

$$\left.\begin{aligned} J_\mu(z)\,J_\nu(z) = \frac{2^{3-\mu-\nu}}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} r_{\mu+\nu-1,\mu-\nu}(2z\cos\varphi)\cos(\mu+\nu)\,\varphi\,d\varphi \\ [\Re(\mu+\nu) > -1] \end{aligned}\right\} \qquad (28)$$

und [19])

$$\left.\begin{aligned} J_\mu(z)\,J_\nu(z) = \frac{2^{-3\mu-\nu+\frac{5}{2}}\,z^{-\mu}}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} r_{2\mu+\nu-1,\nu}(2z\cos\varphi)\,\mathbf{P}_{\nu-\frac{1}{2}}^{\mu+\frac{1}{2}}(\cos\varphi)\sin^{\frac{1}{2}-\mu}\varphi\cos^{-\mu}\varphi\,d\varphi \\ [\Re(\mu) < \tfrac{1}{2},\ \Re(\mu+\nu) > -1]. \end{aligned}\right\} \qquad (29)$$

Die hierin auftretende Funktion $r_{\mu,\nu}(z)$ wird erklärt durch

$$\left.\begin{aligned} r_{\mu,\nu}(z) &= \frac{s_{\mu,\nu}(z)}{\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mu+\frac{1}{2}\nu)\,\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mu-\frac{1}{2}\nu)} \\ &= \frac{z^{\mu+1}}{4\Gamma(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\mu+\frac{1}{2}\nu)\,\Gamma(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\mu-\frac{1}{2}\nu)}\,{}_1F_2(1;\tfrac{3}{2}+\tfrac{1}{2}\mu+\tfrac{1}{2}\nu,\tfrac{3}{2}+\tfrac{1}{2}\mu-\tfrac{1}{2}\nu;-\tfrac{1}{4}z^2), \end{aligned}\right\} \qquad (30)$$

wo $s_{\mu,\nu}(z)$ die erste LOMMELsche Funktion bezeichnet.

18) MEIJER, [11], 363—364.

19) Für $-1 < w < 1$ wird die zugeordnete LEGENDREsche Funktion erster Art definiert durch (siehe HOBSON, [3], 227)

$$\mathbf{P}_n^m(w) = \frac{(1+w)^{\frac{1}{2}m}(1-w)^{-\frac{1}{2}m}}{\Gamma(1-m)}\,{}_2F_1(-n,1+n;1-m;\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}w).$$

Die Funktion $\mathbf{P}_n^m(w)$ ist — im Gegensatz zu der in § 3 (siehe Fussnote [10])) betrachteten Funktion $P_n^m(w)$ — eindeutig für $-1 < w < 1$.

Es ist naheliegend auch die Integrale

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} S_{\mu+\nu-1,\mu-\nu}(2z\cos\varphi)\cos(\mu+\nu)\,\varphi\,d\varphi$$

und

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} S_{2\mu+\nu-1,\nu}(2z\cos\varphi)\,\mathbf{P}_{\nu-\frac{1}{2}}^{\mu+\frac{1}{2}}(\cos\varphi)\sin^{\frac{1}{2}-\mu}\varphi\cos^{-\mu}\varphi\,d\varphi$$

zu betrachten; hierin bedeutet $S_{\mu,\nu}(z)$ die zweite LOMMELsche Funktion.

Ich setze

$$R_{\mu,\nu}(z) = \frac{S_{\mu,\nu}(z)}{\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mu+\frac{1}{2}\nu)\,\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mu-\frac{1}{2}\nu)} \quad . \ . \ . \quad (31)$$

und werde zeigen

$$\left.\begin{aligned} &\{H_\mu^{(1)}(z)\,H_\nu^{(2)}(z) - H_\nu^{(1)}(z)\,H_\mu^{(2)}(z)\}\sin\mu\pi\sin\nu\pi \\ &= \frac{2^{4-\mu-\nu}\sin(\mu-\nu)\,\pi}{\pi i}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} R_{\mu+\nu-1,\mu-\nu}(2z\cos\varphi)\cos(\mu+\nu)\,\varphi\,d\varphi \end{aligned}\right\} \qquad (32)$$

(wo $\Re(\mu+\nu) > -1$ und $|\Re(\mu-\nu)| < 1$ ist) und

$$\left.\begin{aligned} &\{H_{-\mu}^{(1)}(z)\,H_\nu^{(2)}(z) - H_\nu^{(1)}(z)\,H_{-\mu}^{(2)}(z)\}\sin\mu\pi \\ &= \frac{2^{-3\mu-\nu+\frac{7}{2}}\,i\,z^{-\mu}}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} R_{2\mu+\nu-1,\nu}(2z\cos\varphi)\,\mathbf{P}_{\nu-\frac{1}{2}}^{\mu+\frac{1}{2}}(\cos\varphi)\sin^{\frac{1}{2}-\mu}\varphi\cos^{-\mu}\varphi\,d\varphi \end{aligned}\right\} \qquad (33)$$

(wo $\Re(\mu) < \frac{1}{2}$, $\Re(\mu-\nu) < 1$ und $|\Re(\mu+\nu)| < 1$ ist).

Für die durch (31) definierte Funktion $R_{\mu,\nu}(z)$ gilt nämlich [20])

$$R_{\mu,\nu}(z)\sin\nu\pi = r_{\mu,\nu}(z)\sin\nu\pi + 2^{\mu-1}\{J_{-\nu}(z)\cos\tfrac{1}{2}(\mu-\nu)\pi - J_\nu(z)\cos\tfrac{1}{2}(\mu+\nu)\pi\}; \quad (34)$$

ferner hat man [21])

$$\left.\begin{aligned} J_\mu(z)\,J_\nu(z) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} J_{\mu+\nu}(2z\cos\varphi)\cos(\mu-\nu)\,\varphi\,d\varphi \\ [\Re(\mu+\nu) > -1] \end{aligned}\right\} \quad . \ . \quad (35)$$

20) Man vergl. WATSON, [12], 347.

21) Siehe MEIJER, [11], 363.

und

$$J_\mu(z)\,J_\nu(z) = \frac{2^{\mu+\frac{1}{2}}\, z^\mu}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} J_\nu(2\,z\cos\varphi)\,\mathbf{P}_{\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\mu}(\cos\varphi)\,\sin^{\mu+\frac{1}{2}}\varphi\,\cos^\mu\varphi\,d\varphi \quad [\Re(\mu) > -\tfrac{1}{2},\ \Re(\mu+\nu) > -1]. \qquad (36)$$

Nun folgt aus (34)

$$2^{3-\mu-\nu}\sin(\mu-\nu)\pi\, R_{\mu+\nu-1,\mu-\nu} = 2^{3-\mu-\nu}\sin(\mu-\nu)\pi\, r_{\mu+\nu-1,\mu-\nu} + 2\sin\nu\pi\, \mathbf{J}_{-\mu+\nu} - 2\sin\mu\pi\, \mathbf{J}_{\mu-\nu}.$$

Die rechte Seite von (32) ist also mit Rücksicht auf (28) und (35) gleich

$$-2\,i\sin(\mu-\nu)\pi\, J_\mu(z)\,J_\nu(z) - 2\,i\sin\nu\pi\, J_{-\mu}(z)\,J_\nu(z) + 2\,i\sin\mu\pi\, J_\mu(z)\,J_{-\nu}(z)$$

und dieser Ausdruck ist wegen [22]

$$H_\nu^{(1)}(z)\sin\nu\pi = i\,e^{-\nu\pi i}\,J_\nu(z) - i\,J_{-\nu}(z) \quad\text{und}\quad H_\nu^{(2)}(z)\sin\nu\pi = i\,J_{-\nu}(z) - i\,e^{\nu\pi i}\,J_\nu(z)$$

gleich der linken Seite von (32), so dass der Beweis von (32) geliefert ist.

Formel (33) folgt auf analoge Weise aus (29) und (36).

§ 6. Wendet man (1) auf die durch (30) definierte Funktion $r_{\mu,\nu}(z)$ an, so findet man (ich ersetze t durch $\frac{1}{2}t$ in (1))

$$r_{\mu,\nu}(z) = \frac{2^{\alpha+\beta-4}\, z^{\mu+1}\,\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\mu+\frac{1}{2}\nu)\,\Gamma(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\mu-\frac{1}{2}\nu)\,\pi i} \int_{L_z} I_{\alpha-\beta}(t) \times {}_3F_2(\alpha,\beta,1;\tfrac{3}{2}+\tfrac{1}{2}\mu+\tfrac{1}{2}\nu,\tfrac{3}{2}+\tfrac{1}{2}\mu-\tfrac{1}{2}\nu;-z^2/t^2)\, t^{-\alpha-\beta+1}\,dt. \qquad (37)$$

Eine entsprechende Integraldarstellung für die zweite LOMMELsche Funktion $S_{\mu,\nu}(z)$ habe ich früher [23] schon abgeleitet.

Setzt man $\alpha = \frac{3}{2}+\frac{1}{2}\mu+\frac{1}{2}\nu$ und $\beta = \frac{3}{2}+\frac{1}{2}\mu-\frac{1}{2}\nu$ in (37), so bekommt man die besonders einfache Formel

$$r_{\mu,\nu}(z) = \frac{2^{\mu-1}\, z^{\mu+1}}{\pi i} \int_{L_z} \frac{I_\nu(t)\,t^{-\mu}\,dt}{t^2+z^2} \qquad [\Re(\mu) > -\tfrac{5}{2}]. \qquad (38)$$

Mit Hilfe von (38) beweist man leicht [24]

$$\int_0^\infty r_{\mu,\nu}(2\,u)\,u^{\lambda-1}\,du = \frac{2^{\mu-2}\,\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\lambda+\frac{1}{2}\mu)\,\Gamma(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\lambda-\frac{1}{2}\mu)}{\Gamma(1-\frac{1}{2}\lambda+\frac{1}{2}\nu)\,\Gamma(1-\frac{1}{2}\lambda-\frac{1}{2}\nu)}; \qquad (39)$$

22) WATSON, [12], 74.

23) MEIJER, [5], Formel (12).

24) Formel (39) kann auch mit Hilfe der MELLINschen Umkehrformel abgeleitet werden.

diese Beziehung gilt für

$$\Re(\lambda) - 1 < -\Re(\mu) < \Re(\lambda) + 1 < \tfrac{5}{2}. \quad \ldots \quad (40)$$

Aus (30) und (34) folgt nämlich mit Rücksicht auf die asymptotischen Entwicklungen der Funktionen [25] $R_{\mu,\nu}(z)$ und $\mathbf{J}_\nu(z)$, dass die linke Seite von (39) unter der Voraussetzung (40) konvergiert. Nach der Theorie der analytischen Fortsetzung brauche ich also nur den Fall mit

$$\Re(\lambda) - 1 < -\Re(\mu) < \Re(\lambda) + 1 < \tfrac{3}{2} \quad \ldots \quad (41)$$

zu betrachten. Die linke Seite von (39) ist dann infolge (38) gleich [26])

$$\frac{2^{\mu-1}}{\pi i}\int_0^\infty u^{\lambda+\mu}\,du \int_{L_u} \frac{I_\nu(2\,t)\,t^{-\mu}\,dt}{t^2+u^2}$$

$$= \frac{2^{\mu-1}}{\pi i}\int_{L_u} I_\nu(2\,t)\,t^{-\mu}\,dt \int_0^\infty \frac{u^{\lambda+\mu}\,du}{t^2+u^2}$$

$$= \frac{2^{\mu-2}\,\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\lambda+\frac{1}{2}\mu)\,\Gamma(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\lambda-\frac{1}{2}\mu)}{\pi i}\int_{L_u} I_\nu(2\,t)\,t^{\lambda-1}\,dt$$

$$= \frac{2^{\mu-2}\,\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\lambda+\frac{1}{2}\mu)\,\Gamma(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\lambda-\frac{1}{2}\mu)}{\Gamma(1-\frac{1}{2}\lambda+\frac{1}{2}\nu)\,\Gamma(1-\frac{1}{2}\lambda-\frac{1}{2}\nu)} \qquad \text{(wegen (3)).}$$

Hiermit ist (39) bewiesen.

§ 7. Eine mit (28) und (32) verwandte Beziehung ist

$$I_{-\mu}(z)\,I_{-\nu}(z) - I_\mu(z)\,I_\nu(z) = \frac{2^{3-\mu-\nu}\sin(\mu+\nu)\pi}{\pi}\int_0^\infty r_{\mu+\nu-1,\mu-\nu}(2z\sinh t)\,e^{(\mu+\nu)t}\,dt; \quad (42)$$

hierin wird $z > 0$ und $|\Re(\mu+\nu)| < 1$ vorausgesetzt.

Aus (8) ergibt sich nämlich

$${}_2F_1(\tfrac{1}{2}+a,\,1+a;\,1+2a;\,-\operatorname{cosech}^2 t) = 2^{2a}\,e^{-2at}\,\sinh^{2a+1}t\,\cosh^{-1}t.$$

Folglich ist

$$e^{(\mu+\nu)t} = 2^{\mu+\nu}\sinh^{\mu+\nu-1}t\,\cosh t\,.\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mu-\frac{1}{2}\nu,\ 1-\frac{1}{2}\mu-\frac{1}{2}\nu;\\ 1-\mu-\nu;\ -\operatorname{cosech}^2 t\end{matrix}\right).$$

25) Für die asymptotischen Entwicklungen der Funktionen $R_{\mu,\nu}(z)$ und $\mathbf{J}_\nu(z)$ siehe man WATSON, [12], 351 und 199.

26) Die Vertauschung der Integrationsfolge ist wegen (41) erlaubt.

Die rechte Seite von (42) ist daher gleich [27])

$$\frac{8\,z^{-\mu-\nu}\sin(\mu+\nu)\,\pi}{\pi}\int_0^\infty r_{\mu+\nu-1,\,\mu-\nu}(2u)\,.\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mu-\frac{1}{2}\nu,\ 1-\frac{1}{2}\mu-\frac{1}{2}\nu;\\ 1-\mu-\nu;\ -z^2/u^2\end{matrix}\right)u^{\mu+\nu-1}\,du. \quad (43)$$

Aus (30), (34) und dem Verhalten der Funktionen [28]) $R_{\mu,\nu}(u)$ und $J_\nu(u)$ für $u \to \infty$ folgt, dass das Integral (43) konvergiert für $|\Re(\mu+\nu)| < 1$. Ich werde zeigen, dass dieses Integral gleich der linken Seite von (42) ist. Nach der Theorie der analytischen Fortsetzung darf ich hierbei $|\Re(\mu+\nu)| < \frac{1}{2}$ annehmen. Es existiert dann eine reelle Zahl σ mit

$$\Re(\tfrac{1}{2}\mu+\tfrac{1}{2}\nu-\tfrac{1}{4}) < \sigma < \mathrm{Min}\,\{0,\,\Re(\mu+\nu)\}\,.\quad .\quad .\quad .\quad (44)$$

Nun besitzt die in (43) vorkommende hypergeometrische Funktion ${}_2F_1(-z^2/u^2)$ die Integraldarstellung [29])

$${}_2F_1(-z^2/u^2) = \frac{2^{-\mu-\nu-1}}{\pi^{\frac{3}{2}}\,i}\int_{-\infty i+\sigma}^{\infty i+\sigma}\frac{\Gamma(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mu-\frac{1}{2}\nu+s)\,\Gamma(1-\frac{1}{2}\mu-\frac{1}{2}\nu+s)\,\Gamma(-s)}{\Gamma(1-\mu-\nu+s)}\left(\frac{z^2}{u^2}\right)^s ds. \quad (45)$$

Für jedes s mit $\Re(s) = \sigma$ gilt ferner wegen (44)

$$\Re(\mu+\nu-1) < \Re(s) < \Re(\mu+\nu) \text{ und } \Re(s) > \Re(\tfrac{1}{2}\mu+\tfrac{1}{2}\nu-\tfrac{1}{4}),$$

so dass Formel (39) mit $\mu+\nu-1$ statt μ, $\mu-\nu$ statt ν und $\mu+\nu-2s$ statt λ angewendet werden darf; man findet

$$\int_0^\infty r_{\mu+\nu-1,\,\mu-\nu}(2u)\,u^{\mu+\nu-2s-1}\,du = \frac{2^{\mu+\nu-3}\,\Gamma(\mu+\nu-s)\,\Gamma(1-\mu-\nu+s)}{\Gamma(1-\nu+s)\,\Gamma(1-\mu+s)}\,.\,.\quad (46)$$

Setzt man nun in (43) für ${}_2F_1(-z^2/u^2)$ das Integral (45) ein, so erhält man, wenn man die Integrationsfolge vertauscht [30]) und Beziehung (46) benutzt,

$$\frac{z^{-\mu-\nu}\sin(\mu+\nu)\,\pi}{2\pi^{\frac{5}{2}}\,i}\int_{-\infty i+\sigma}^{\infty i+\sigma}\frac{\Gamma(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mu-\frac{1}{2}\nu+s)\,\Gamma(1-\frac{1}{2}\mu-\frac{1}{2}\nu+s)\,\Gamma(-s)\,\Gamma(\mu+\nu-s)}{\Gamma(1-\nu+s)\,\Gamma(1-\mu+s)}\,z^{2s}\,ds.$$

---

27) Ich ersetze sinh t durch u/z.

28) WATSON, [**12**], 351 und 199.

29) Ich berechne die Summe der Residuen des Integranden in den Polen $s = 0, 1, 2, \ldots$; diese Pole liegen wegen (44) auf der rechten, die Pole $\frac{1}{2}\mu+\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}\mu+\frac{1}{2}\nu-\frac{3}{2}$, $\frac{1}{2}\mu+\frac{1}{2}\nu-\frac{5}{2}, \ldots$ und $\frac{1}{2}\mu+\frac{1}{2}\nu-1$, $\frac{1}{2}\mu+\frac{1}{2}\nu-2$, $\frac{1}{2}\mu+\frac{1}{2}\nu-3, \ldots$ aber auf der linken Seite des Integrationsweges.

30) Die Vertauschung der Integrationsfolge ist erlaubt wegen $\Re(s) > \Re(\frac{1}{2}\mu+\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{4})$.

Dieser Ausdruck ist gleich [31])

$$\frac{2^{\mu+\nu}\,z^{-\mu-\nu}}{\Gamma(1-\mu)\,\Gamma(1-\nu)}\,{}_2F_3\left(\begin{matrix}\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mu-\frac{1}{2}\nu,\ 1-\frac{1}{2}\mu-\frac{1}{2}\nu;\\ 1-\mu,\ 1-\nu,\ 1-\mu-\nu;\ z^2\end{matrix}\right)$$

$$-\frac{2^{-\mu-\nu}\,z^{\mu+\nu}}{\Gamma(1+\mu)\,\Gamma(1+\nu)}\,{}_2F_3\left(\begin{matrix}\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mu+\frac{1}{2}\nu,\ 1+\frac{1}{2}\mu+\frac{1}{2}\nu;\\ 1+\mu,\ 1+\nu,\ 1+\mu+\nu;\ z^2\end{matrix}\right)$$

$$= I_{-\mu}(z)\,I_{-\nu}(z) - I_\mu(z)\,I_\nu(z),$$

womit der Beweis von (42) geliefert ist.

§ 8. Neuerdings [32]) habe ich unter gewissen Voraussetzungen für das Produkt $M_{k,m}(z)\,M_{-k,m}(z)$ die folgende Integraldarstellung abgeleitet [33])

$$\left.\begin{aligned}M_{k,m}(z)\,M_{-k,m}(z) &= \frac{2^{-m+\frac{1}{2}}\,z^{m+\frac{3}{2}}\,\Gamma^2(1+2m)\sqrt{\pi}}{\Gamma(\frac{1}{2}+k+m)\,\Gamma(\frac{1}{2}-k+m)}\\ \times\int_0^\infty I_{m-\frac{1}{2}}(z\,\mathrm{sech}\,v)\,&P_{k-\frac{1}{2}}^{-m}(\cosh 2v)\sinh^{m+1}v\,\cosh^{-2m-\frac{3}{2}}v\,dv.\end{aligned}\right\}. \quad (47)$$

Ich werde jetzt einige entsprechende Beziehungen angeben.
Ist $\Re(k) < 1$, $\Re(k+m) < \frac{1}{2}$ und $|\arg z| < \frac{1}{2}\pi$, so gilt nämlich [34])

$$\left.\begin{aligned}W_{k,m}(iz)\,W_{k,m}(-iz) &= \frac{2^{2k+m+\frac{1}{2}}\,z^{2k}}{\Gamma(1-k)\,\Gamma(\frac{1}{2}-k-m)}\int_0^{\infty e^{i\arg z}} K_{m+\frac{1}{2}}(u)\\ &\times{}_2F_1(\tfrac{1}{2}-k+m,\ \tfrac{1}{2}-k;\ 1-2k;\ -u^2/z^2)\,u^{-2k-m+\frac{1}{2}}\,du.\end{aligned}\right\}. \quad (48)$$

Weiter hat man [35])

$$\left.\begin{aligned}W_{k,m}(z)\,M_{-k,m}(z) &= \frac{2^{2k+m-\frac{1}{2}}\,z^{2k}\,\Gamma(1+2m)}{\Gamma(1-k)}\int_0^\infty J_{m+\frac{1}{2}}(u)\\ &\times{}_2F_1(\tfrac{1}{2}-k+m,\ \tfrac{1}{2}-k;\ 1-2k;\ -u^2/z^2)\,u^{-2k-m+\frac{1}{2}}\,du;\end{aligned}\right\}. \quad (49)$$

---

31) Ich berechne die Summe der Residuen des Integranden in den Polen $s = 0, 1, 2, \ldots$ und $s = \mu+\nu$, $\mu+\nu+1$, $\mu+\nu+2, \ldots$

32) MEIJER, [**11**], Formel (20).

33) Für die Definition der Funktion $P_n^m(w)$ siehe man Fussnote [10]).

34) MEIJER, [5], Formel (13) mit $\alpha = 1-k$, $\beta = \frac{1}{2}-k-m$ und $\tau = \arg z$.

35) MEIJER, [9], Formel (18) mit $\alpha = 1+m$ und $\beta = \frac{1}{2}$.

hierin ist $\Re(k) < 1$, $\Re(m) > -\frac{1}{3}$ und $|\arg z| < \frac{1}{2}\pi$. Ausserdem gilt [36])

$$\left.\begin{aligned} W_{k,m}(z)\{W_{k,m}(z e^{\pi i}) - W_{k,m}(z e^{-\pi i})\} &= \frac{2^{2k+m+\frac{1}{2}} z^{2k} \pi i}{\Gamma(1-k)\,\Gamma(\frac{1}{2}-k-m)} \int_0^\infty J_{-m-\frac{1}{2}}(u) \\ &\times {}_2F_1(\tfrac{1}{2}-k+m, \tfrac{1}{2}-k; 1-2k; -u^2/z^2)\, u^{-2k-m+\frac{1}{2}}\, du; \end{aligned}\right\} \quad (50)$$

hierin ist $\Re(k+m) < \frac{1}{2}$, $\Re(m) > -\frac{1}{3}$ und $|\arg z| < \frac{1}{2}\pi$.

Nun ist [37])

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\Gamma(1-k)}\, {}_2F_1(\tfrac{1}{2}-k+m, \tfrac{1}{2}-k; 1-2k; -\operatorname{cosech}^2 v) \\ &= \frac{2^{1-2k} e^{m\pi i}}{\Gamma(\frac{1}{2}-k-m)\sqrt{\pi}} \cosh^{-m} v \sinh^{1-2k+m} v\, Q^{-m}_{-k-\frac{1}{2}}(\cosh 2v), \end{aligned}$$

wo $Q^{\mu}_{\nu}(\zeta)$ die zugeordnete LEGENDREsche Funktion zweiter Art bezeichnet [38]).

Aus (48) mit $u = z \operatorname{cosech} v$ ergibt sich somit

$$\left.\begin{aligned} W_{k,m}(iz)\, W_{k,m}(-iz) &= \frac{2^{m+\frac{3}{2}} z^{-m+\frac{3}{2}} e^{m\pi i}}{\Gamma^2(\frac{1}{2}-k-m)\sqrt{\pi}} \\ &\times \int_0^\infty K_{m+\frac{1}{2}}(z \operatorname{cosech} v)\, Q^{-m}_{-k-\frac{1}{2}}(\cosh 2v) \cosh^{-m+1} v \sinh^{2m-\frac{3}{2}} v\, dv. \end{aligned}\right\} \quad (51)$$

Auf analoge Weise liefern (49) und (50), falls $z > 0$ ist,

$$\left.\begin{aligned} W_{k,m}(z)\, M_{-k,m}(z) &= \frac{2^{m+\frac{1}{2}} z^{-m+\frac{3}{2}} e^{m\pi i}\, \Gamma(1+2m)}{\Gamma(\frac{1}{2}-k-m)\sqrt{\pi}} \\ &\times \int_0^\infty J_{m+\frac{1}{2}}(z \operatorname{cosech} v)\, Q^{-m}_{-k-\frac{1}{2}}(\cosh 2v) \cosh^{-m+1} v \sinh^{2m-\frac{3}{2}} v\, dv \end{aligned}\right\} \quad (52)$$

und

$$\left.\begin{aligned} W_{k,m}(z)\{W_{k,m}(z e^{\pi i}) - W_{k,m}(z e^{-\pi i})\} &= \frac{2^{m+\frac{3}{2}} z^{-m+\frac{3}{2}} e^{m\pi i}\, i\sqrt{\pi}}{\Gamma^2(\frac{1}{2}-k-m)} \\ &\times \int_0^\infty J_{-m-\frac{1}{2}}(z \operatorname{cosech} v)\, Q^{-m}_{-k-\frac{1}{2}}(\cosh 2v) \cosh^{-m+1} v \sinh^{2m-\frac{3}{2}} v\, dv. \end{aligned}\right\} \quad (53)$$

Die Beziehungen (51), (52) und (53) entsprechen (47).

36) MEIJER, [9], Formel (21) mit $\alpha = \frac{1}{2}$ und $\beta = -m$.

37) Man vergl. HOBSON, [3], 203, Formel (28).

38) Ich benutze die HOBSONsche Definition der Funktion $Q^{\mu}_{\nu}(\zeta)$, nicht die BARNESsche man vergl. HOBSON, [3], 196.

Eine verwandte Integraldarstellung für $W_{k,m}(z)\, W_{-k,m}(z)$ lautet wie folgt [39])

$$\left.\begin{aligned} W_{k,m}(z)\, W_{-k,m}(z) &= \frac{2^{m+\frac{1}{2}} z^{-m+\frac{3}{2}}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} K_{m+\frac{1}{2}}(z \sec\varphi) \\ &\times \mathbf{P}^{m}_{k-\frac{1}{2}}(\cos 2\varphi) \sin^{-m+1}\varphi \cos^{2m-\frac{3}{2}}\varphi\, d\varphi; \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (54)$$

hierin ist $\Re(m) < 1$ und $|\arg z| < \frac{1}{2}\pi$.

Beim Beweis von (54) gehe ich aus von [40])

$$\left.\begin{aligned} W_{k,m}(z)\, W_{-k,m}(z) &= -\frac{2^{2k+m-\frac{1}{2}} z^{-m+\frac{3}{2}}\, \Gamma(\frac{1}{2}-k+m)}{\Gamma(1-k)\,\pi i} \int_\infty^{(1+)} K_{m+\frac{1}{2}}(zu) \\ &\times {}_2F_1(\tfrac{1}{2}-k+m, \tfrac{1}{2}-k; 1-2k; u^2)\, u^{-2k-m+\frac{1}{2}}\, du. \end{aligned}\right\} \quad . \quad (55)$$

Für die hierin auftretende hypergeometrische Funktion ${}_2F_1$ gilt nach einer bekannten Transformationsformel [41])

$$\begin{aligned} &{}_2F_1(\tfrac{1}{2}-k+m, \tfrac{1}{2}-k; 1-2k; u^2) \\ &= \frac{\Gamma(1-2k)\,\Gamma(-m)}{\Gamma(\frac{1}{2}-k-m)\,\Gamma(\frac{1}{2}-k)}\, u^{2k-1}\, {}_2F_1(\tfrac{1}{2}-k, \tfrac{1}{2}+k; 1+m; 1-1/u^2) \\ &+ \frac{\Gamma(1-2k)\,\Gamma(m)}{\Gamma(\frac{1}{2}-k+m)\,\Gamma(\frac{1}{2}-k)}\, (1-u^2)^{-m}\, u^{2k-1}\, {}_2F_1(\tfrac{1}{2}-k, \tfrac{1}{2}+k; 1-m; 1-1/u^2). \end{aligned}$$

Wegen [42])

$$\int_\infty^{(1+)} K_{m+\frac{1}{2}}(zu) \,.\, {}_2F_1(\tfrac{1}{2}-k, \tfrac{1}{2}+k; 1+m; 1-1/u^2)\, u^{-m-\frac{1}{2}}\, du = 0$$

geht (55) also in

$$\begin{aligned} W_{k,m}(z)\, W_{-k,m}(z) &= -\frac{2^{m-\frac{1}{2}} z^{-m+\frac{3}{2}}\, \Gamma(m)}{\pi i \sqrt{\pi}} \int_\infty^{(1+)} K_{m+\frac{1}{2}}(zu) \\ &\times {}_2F_1(\tfrac{1}{2}-k, \tfrac{1}{2}+k; 1-m; 1-1/u^2)\, (1-u^2)^{-m}\, u^{-m-\frac{1}{2}}\, du \end{aligned}$$

39) Für die Definition der Funktion $\mathbf{P}^{m}_{n}(w)$ vergl. man Fussnote [19]).

40) MEIJER, [7], Formel (4) mit $\alpha = 1-k$ und $\beta = \frac{1}{2}-k-m$. Relation (55) gilt für $|\arg z| < \frac{1}{2}\pi$.

41) BARNES, [1], 152, Formel (IX).

42) Der Integrand ist analytisch im Innern des Integrationsweges.

über. Diese Beziehung ist für $\Re(m) < 1$ gleichwertig mit

$$\left.\begin{aligned} W_{k,m}(z)\, W_{-k,m}(z) = \frac{2^{m+\frac{1}{2}}\, z^{-m+\frac{3}{2}}}{\Gamma(1-m)\sqrt{\pi}} \int_1^\infty K_{m+\frac{1}{2}}(zu) \\ \times {}_2F_1\left(\tfrac{1}{2}-k, \tfrac{1}{2}+k; 1-m; 1-1/u^2\right)(u^2-1)^{-m}\, u^{-m-\frac{1}{2}}\, du. \end{aligned}\right\} \quad . \tag{56}$$

Nun ist [43])

$${}_2F_1\left(\tfrac{1}{2}-k, \tfrac{1}{2}+k; 1-m; \sin^2\varphi\right) = \Gamma(1-m)\sin^m\varphi\,\cos^{-m}\varphi\, \mathbf{P}^m_{k-\frac{1}{2}}(\cos 2\varphi);$$

man findet also (54), wenn man $u = \sec\varphi$ setzt in (56).

§ 9. Das Produkt $M_{k,m}(iz)\, M_{k,m}(-iz)$ besitzt wegen (25) und (1) die Integraldarstellung (ich ersetze t durch $\frac{1}{2}t$ in (1))

$$\left.\begin{aligned} M_{k,m}(iz)\, M_{k,m}(-iz) = \frac{2^{\alpha+\beta-2}\, z^{2m+1}\, \Gamma(\alpha)\, \Gamma(\beta)}{\pi i} \int_{L_z} I_{\alpha-\beta}(t) \\ \times {}_4F_3\left(\alpha, \beta, \tfrac{1}{2}+m+k, \tfrac{1}{2}+m-k; \tfrac{1}{2}+m, 1+m, 1+2m; -z^2/t^2\right) t^{-\alpha-\beta+1}\, dt. \end{aligned}\right\} \tag{57}$$

Nimmt man nun $\alpha = \beta = \frac{1}{2} + m$, so erhält man mit Rücksicht auf (15)

$$M_{k,m}(iz)\, M_{k,m}(-iz) = \frac{z\, \Gamma^2(1+2m)}{2i} \int_{L_z} I_0(t) \left\{ P^{-m}_{k-\frac{1}{2}}\left(\sqrt{1+\frac{z^2}{t^2}}\right)\right\}^2 dt;$$

hierin ist $z > 0$ und $\Re(m) > -\frac{1}{4}$.

Verwandte Integraldarstellungen für $W_{k,m}(iz)\, W_{k,m}(-iz)$, $W_{k,m}(z)\, W_{-k,m}(z)$, $W_{k,m}(z)\, M_{-k,m}(z)$ u.s.w. waren schon bekannt [44]).

Setzt man $\alpha = 1 + 2m$ und $\beta = \frac{1}{2} + m$ in (57), so findet man

$$\left.\begin{aligned} M_{k,m}(iz)\, M_{k,m}(-iz) = \frac{2^{3m-\frac{1}{2}}\, z^{2m+1}\, \Gamma(1+2m)\, \Gamma(\frac{1}{2}+m)}{\pi i} \int_{L_z} I_{m+\frac{1}{2}}(t) \\ \times {}_2F_1\left(\tfrac{1}{2}+m+k, \tfrac{1}{2}+m-k; 1+m; -z^2/t^2\right) t^{-3m-\frac{1}{2}}\, dt \qquad [\Re(m) > -\tfrac{1}{3}]. \end{aligned}\right\} \tag{58}$$

Nun ist [45])

$$\begin{aligned} &{}_2F_1\left(\tfrac{1}{2}+m+k, \tfrac{1}{2}+m-k; 1+m; -\sinh^2 v\right) \\ &= \Gamma(1+m)\cosh^{-m} v\, \sinh^{-m} v\, P^{-m}_{k-\frac{1}{2}}(\cosh 2v). \end{aligned}$$

[43]) Man vergl. Fussnote [19]).
[44]) MEIJER, [7], 487; [8], 522; [9], 139—141.
[45]) HOBSON, [3], 190, Formel (13).

Aus (58) mit $t = z\,\mathrm{cosech}\, v$ folgt also (ich nehme an, dass $z > 0$ und $\Re(m) > -\frac{1}{3}$ ist)

$$\left.\begin{aligned} M_{k,m}(iz)\, M_{k,m}(-iz) = -\frac{2^{m-\frac{1}{2}}\, z^{-m+\frac{3}{2}}\, \Gamma^2(1+2m)}{i\sqrt{\pi}} \\ \int_C I_{m+\frac{1}{2}}(z\,\mathrm{cosech}\, v)\, P^{-m}_{k-\frac{1}{2}}(\cosh 2v)\cosh^{-m+1} v\, \sinh^{2m-\frac{3}{2}} v\, dv; \end{aligned}\right\} \tag{59}$$

der Integrationsweg C besteht aus der imaginären Achse von 0 bis ri $(0 < r < \frac{1}{2}\pi)$, dem auf der rechten Seite der imaginären Achse liegenden Halbkreis mit Radius r (von ri bis $-ri$ durchlaufen) und der imaginären Achse von $-ri$ bis 0.

Formel (59) ist mit (47), (51), (52), (53) und (54) verwandt.