this process represents the fundamental mechanical cause which controls the dissipation of energy in turbulent motion.

It will be evident that TAYLOR's result, connected as it is with the laws governing vortex motion, is a typical effect due to the presence of terms of the *second degree* in the hydrodynamical equations. Notwithstanding the difference in geometrical character, the model system in this respect shows a similar behaviour: also here there are present terms of the second degree, which bring about the tendency to produce steep fronts, and these are the loci of high values of the gradient $\partial v/\partial y$ and consequently of intensive dissipation.

6. *Conclusive remark.* — The results of the preceding discussion, taken together with the investigations of the previous paper, can be summarized by saying that the model system in a simplified way possesses the essential features which are governing the energetical relations of the hydrodynamical system. It would appear therefore that a further investigation of the statistical character of the solutions of eqs. (1), in particular in the case where the domain of the coordinate y is bounded and where boundary conditions are applied to the variables v and w, certainly will be worth while; should it have success, then it is to be expected that it will bring out features which will be helpful in the analysis of some of the still existing riddles of turbulent fluid motion.

---

the equations of motion for the directions r and z are satisfied. We write $\sigma = u\,r$; then the equation for the ϑ-direction takes the form:

$$\frac{\partial\sigma}{\partial t} = U r \frac{\partial\sigma}{\partial r} + \nu \left(\frac{\partial^2 \sigma}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma}{\partial r} \right).$$

It must be expected that the solution of this equation asymptotically will approach to a form in which σ is a function of r only. This function then must satisfy the equation:

$$\nu \frac{d^2 \sigma}{dr^2} + \left(Ur - \frac{\nu}{r} \right) \frac{d\sigma}{dr} = 0.$$

The solution appropriate to our case is: $\sigma = C(1 - e^{-r^2 U/2\nu})$, where $2\pi C$ represents the strength (circulation) of the vortex. We then obtain for the vorticity:

$$\gamma = \frac{CU}{\nu} e^{-r^2 U/2\nu}.$$

The dissipation, calculated per unit of height in the z-direction, is found to have the value:

$$\mu \int_0^\infty 2\pi\, r \gamma^2\, dr = \pi \varrho\, C^2 U.$$

It is interesting to observe that here again — the same as in the case of the discontinuities of the model system (see J. M. BURGERS, *l.c.* pp. 26, 43) — the dissipation is given by an expression which is independent of the viscosity, and which is of the third degree with respect to the velocity components of the motion ($v_r = -Ur$; $v_\vartheta = u = C/r$ outside of the vortex proper).

Mathematics. — *Ein Satz über assoziierte Geraden im R_4.* Von R. WEITZENBÖCK.

(Communicated at the meeting of December 30, 1939.)

Zu je vier Geraden allgemeiner Lage im R_4 lässt sich auf lineare Weise eine fünfte Gerade konstruieren, was zu der bekannten Figur von fünf assoziierten Geraden führt.

Ich beweise hier zweierlei. Erstens, dass fünf assoziierte Geraden allgemeiner Lage nicht Erzeugende derselben Quadrik F_2 im R_4 sein können und zweitens, dass die fünfte Gerade der Ort der Kegelspitzen ist für alle dreidimensionalen Kegel zweiter Ordnung, die die vier ersten Geraden enthalten.

§ 1. *Die assoziierte Gerade.*

Sind 1, 2, 3 und 4 vier Geraden im R_4 mit den Koordinaten

$$a_{ik},\ \alpha_{ik},\ p_{ik} \text{ und } m_{ik},$$

so ist

$$(x\, S'_{12}) = (x\, a^2\, \alpha^2) = 4\,.\, \Sigma\, x_1\, a_{23}\, \alpha_{45} = 0$$

die Gleichung des R_3, der 1 und 2 verbindet. Die drei Räume S'_{12}, S'_{23} und S'_{31} schneiden sich in einer Geraden 4^*, die mit 4 verbunden den Raum $4'$ liefert. Dann gehen die vier Räume $1'$, $2'$, $3'$ und $4'$ durch dieselbe Gerade: die assoziierte zu 1, 2, 3, 4. Ihre Gleichung lautet, wenn

$$G_1 = (\pi^3\, a^2) = 0\ ,\ \ G_2 = (\pi^3\, \alpha^2) = 0, \ldots$$

die Gleichungen der vier Geraden 1, 2, 3 und 4 sind [1]):

$$G_5 = \frac{G_1}{A_1} + \frac{G_2}{A_2} + \frac{G_3}{A_3} + \frac{G_4}{A_4} = 0. \qquad (1)$$

Die Invarianten A_i sind hier die vier unabhängigen Invarianten der Geraden 1 bis 4 und gegeben durch:

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= (m\, S'_{13})\ \ (m\, S'_{12}) \\ A_2 &= (a\, S'_{23})\ \ (a\, S'_{24}) \\ A_3 &= (\alpha\, S'_{13})\ \ (\alpha\, S'_{34}) \\ A_4 &= (p\, S'_{14})\ \ (p\, S'_{24}) \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Die Bezeichnung ist hier so gewählt, dass in (1) alle Glieder das

---

1) Vgl. Proc. Kon. Ned. Akad. v. Wetensch., Amsterdam, **42**, 248 (1939).

positive Zeichen erhalten. Hier enthält A_i die Koordinaten der i-ten Geraden im zweiten, die der anderen drei Geraden im ersten Grade. Es gilt überdies:

$$A_1 = A_{4,13,12} = -A_{3,41,12} = -A_{2,13,41} = (m\, a^2\, p^2)\,(m\, b^2\, \alpha^2). \quad . \quad (3)$$

Die geometrische Bedeutung von $A_1 = 0$ ist leicht anzugeben: die beiden dreidimensionalen Räume S'_{13} und S'_{12} schneiden sich in einer durch die Gerade 1 gehenden Ebene E; ist $A_1 = 0$, so trifft diese Ebene E die Gerade 4. Die Gleichung von E in veränderlichen Linienkoordinaten π_{ik} ist durch

$$A_{\pi,13,12} = (\pi\, a^2\, p^2)\,(\pi\, b^2\, \alpha^2) = 0$$

gegeben. Nehmen wir dagegen in A_1 die Grössen $a_{ik} = b_{ik}$ als Veränderliche $\pi_{ik} = \varrho_{ik}$ an, so stellt

$$(m\, \pi^2\, p^2)\,(m\, \varrho^2\, \alpha^2) = 0$$

einen quadratischen Linienkomplex dar. Er ist der Ort derjenigen Geraden π_{ik}, durch die eine Ebene gelegt werden kann, die die drei Geraden a_{ik}, p_{ik} und m_{ik} schneidet.

Ich habe vor kurzem [2]) die Bedingung dafür angegeben, dass fünf Geraden 1 bis 5 im R_4 Erzeugende derselben Quadrik F_2 sind. Sie lautet

$$\triangle = A_{5,34,23}\, A_{5,13,12}\, A_{5,14,42} + A_{5,42,34}\, A_{5,14,12}\, A_{5,13,23} = 0. \quad . \quad (4)$$

Nehmen wir als fünfte Gerade die durch (1) gegebene assoziierte, so ergibt sich

$$\triangle = \frac{A_{1,34,23}}{A_1} \cdot \frac{A_{4,13,12}}{A_4} \cdot \frac{A_{3,14,42}}{A_3} + \frac{A_{1,42,34}}{A_1} \cdot \frac{A_{3,14,12}}{A_3} \cdot \frac{A_{4,13,23}}{A_4},$$

also, nach (3):

$$\triangle = \frac{A_3\, A_1\, A_4}{A_1\, A_4\, A_3} + \frac{A_4\, A_1\, A_3}{A_1\, A_3\, A_4} = 2 \neq 0,$$

d.h. fünf assoziierte Geraden sind nicht Erzeugende derselben F_2 im R_4.

§ 2. *Die Flächen F_λ.*

Die sechs linearen Räume $S'_{ik} = S'_{ki}$

$$S'_{12}\ ,\ S'_{13}\ ,\ S'_{14}\ ,\ S'_{34}\ ,\ S'_{42}\ ,\ S'_{23} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (S')$$

gestatten es, ein System von ∞^2 Quadriken $F_\lambda = 0$ zu bilden, die alle vier Geraden enthalten:

$$F_\lambda = \lambda\,(x S'_{12})\,(x S'_{34}) + \mu\,(x S'_{13})\,(x S'_{42}) + \nu\,(x S'_{14})\,(x S'_{23}) = 0. \quad . \quad (5)$$

Neben den vier Geraden 1 bis 4 enthält F_λ die vier Geraden 1* bis 4*,

---

[2]) Vgl. Proc. Kon. Ned. Akad. v. Wetensch., Amsterdam, 42, 4 (1939).

wo z.B. 4* die Transversale von 1, 2 und 3 ist. Alle F_λ gehen somit durch die acht Geraden 1 bis 4 und 1* bis 4*.

Wir zeigen zuerst, dass sich jede Quadrik F_2, die die vier Geraden 1 bis 4 enthält, in der Gestalt (5) schreiben lässt. Wir setzen $A_1 A_2 \neq 0$ voraus. Dann bilden die fünf Räume

$$S'_{12}\ ,\ S'_{13}\ ,\ S'_{14}\ ,\ S'_{42}\ ,\ S'_{23} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

ein Simplex, das wir als Koordinatensimplex wählen. Jede Quadrik F_2 lässt sich dann in der Gestalt darstellen

$$F = f_{11}\,(x S'_{12})^2 + 2 f_{12}\,(x S'_{12})\,(x S'_{13}) + \ldots + f_{55}\,(x S'_{23})^2 = 0, \quad . \quad (7)$$

wo die f_{ik} Zahlenkoeffizienten sind.

Wenn die Gerade 1 auf F liegen soll, so muss das Polynom F verschwinden, wenn wir in (7)

$$(x S'_{12}) = 0\ ,\ (x S'_{13}) = 0 \text{ und } (x S'_{14}) = 0$$

setzen. Dies gibt

$$f_{44} = f_{45} = f_{55} = 0.$$

Auf dieselbe Art erhält man bei der Geraden 2:

$$f_{22} = f_{23} = f_{33} = 0.$$

Es bleibt also:

$$\left.\begin{aligned} F = f_{11}\,(x S'_{12})^2 + 2 f_{12}\,(x S'_{12})\,(x S'_{13}) + 2 f_{13}\,(x S'_{12})\,(x S'_{14}) + \\ + 2 f_{14}\,(x S'_{12})\,(x S'_{24}) + 2 f_{15}\,(x S'_{12})\,(x S'_{23}) + 2 f_{24}\,(x S'_{13})\,(x S'_{24}) + \\ + 2 f_{25}\,(x S'_{13})\,(x S'_{23}) + 2 f_{34}\,(x S'_{14})\,(x S'_{24}) + 2 f_{35}\,(x S'_{14})\,(x S'_{23}) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (7a)$$

Die Gerade 3 ist gegeben durch den Schnitt der drei Räume

$$(x S'_{31}) = 0\ ,\ (x S'_{32}) = 0\ ,\ (x S'_{34}) = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Hier kommt der letzte dieser Räume nicht in (6) vor, man muss ihn also zuerst linear und homogen durch die fünf Räume (6) ausdrücken. Dies geschieht durch die Identität

$$\Sigma\,(S'_{13}\, S'_{14}\, S'_{34}\, S'_{42}\, S'_{23})\,(x S'_{12}) = \Sigma\, \Omega_{12}\,(x S'_{12}) = 0,$$

wobei sich die sechs Invarianten Ω_{ik}, die fünfreihigen Minoren der Matrix

$$\|\, S'_{12}\, S'_{13}\, S'_{14}\, S'_{34}\, S'_{42}\, S'_{23} \,\|$$

durch die vier Invarianten A_i wie folgt ausdrücken lassen:

$$\begin{aligned} \Omega_{12} &= -4 A_3\, A_4 & \qquad \Omega_{34} &= -4 A_1\, A_2 \\ \Omega_{13} &= -4 A_2\, A_4 & \qquad \Omega_{42} &= -4 A_1\, A_3 \\ \Omega_{14} &= -4 A_2\, A_3 & \qquad \Omega_{23} &= -4 A_1\, A_4 \end{aligned}$$

Hiermit findet man die gesuchte Darstellung für den sechsten Raum S'_{34}

$$-S'_{34} = S'_{12} \cdot \frac{A_3 A_4}{A_1 A_2} + S'_{13} \cdot \frac{A_4}{A_1} + S'_{14} \cdot \frac{A_2}{A_4} + S'_{42} \cdot \frac{A_3}{A_4} + S'_{23} \cdot \frac{A_4}{A_2} \, . \qquad (9)$$

Gilt (8), dann ist also in (7*a*) zu setzen

$$(x S'_{12}) \cdot \frac{A_3 A_4}{A_1 A_2} = -(x S'_{14}) \cdot \frac{A_2}{A_4} - (x S'_{24}) \cdot \frac{A_3}{A_4} \, .$$

Dies liefert mit (8) zusammen für die Koeffizienten f_{ik} die weiteren Beziehungen

$$f_{34} = 0 \; , \; f_{14} = \frac{A_1 A_2}{2 A_4^2} \cdot f_{11} \; , \; f_{13} = \frac{A_1 A_2^2}{2 A_3 A_4^2} \cdot f_{11} .$$

Auf die gleiche Art führt die Bedingung, dass F die vierte Gerade enthält, also für

$$(x S'_{14}) = 0 \; , \; (x S'_{24}) = 0 \text{ und } (x S'_{34}) = 0$$

zu den Gleichungen

$$f_{25} = 0 \; , \; f_{15} = \frac{A_1}{2 A_3} \cdot f_{11} \; , \; f_{12} = \frac{A_2}{2 A_3} \cdot f_{11} .$$

Setzen wir dies alles in (7*a*) ein und setzen überdies

$$\lambda = -f_{11} \cdot \frac{A_1 A_2}{A_3 A_4} \; , \; \mu = 2 f_{24} \; , \; \nu = 2 f_{35} ,$$

so geht (7*a*) schliesslich über in (5).

§ 3. *Die Kegel F_λ.*

Wir nehmen jetzt $x_1, x_2, \ldots, x_6$ als überzählige homogene Koordinaten im R_4 und denken uns die Relation (9) in der einfacheren Gestalt

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_6 = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (10)$$

festgehalten, wobei wir die sechs Räume (S') in der Reihenfolge

$$S'_{12} \; , \; S'_{34} \; , \; S'_{13} \; , \; S'_{24} \; , \; S'_{14} \; , \; S'_{23}$$

von 1 bis 6 nummeriert denken. Die quadratischen Formen (5) bekommen dann die Gestalt

$$F_\lambda = \lambda x_1 x_2 + \mu x_3 x_4 + \nu x_5 x_6 \text{ mit } x_6 = -x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - x_5 . \quad . \qquad (11)$$

Bei dieser Bezeichnung ist die erste Gerade 1 gegeben als Schnitt der drei Räume

$$x_1 = 0 \; , \; x_3 = 0 \; , \; x_5 = 0 ;$$

ihre Koordinaten a_{ik} können also aus der Matrix

$$a_{ik} \ldots \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}$$

berechnet werden. Analog findet man für die drei weiteren Geraden 2, 3 und 4:

$$a_{ik} \ldots \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{Vmatrix} , \; p_{ik} \ldots \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix} , \; m_{ik} \ldots \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix} ,$$

sodass also die Gleichungen der vier Geraden werden:

$$\pi'_{24} = 0 ; \; \pi'_{23} - \pi'_{25} + \pi'_{35} = 0 ; \; \pi'_{14} - \pi'_{15} + \pi'_{45} = 0 ; \; \pi'_{13} = 0 . \quad . \qquad (12)$$

Es ist dann

$$\begin{array}{ll} (x S'_{12}) = x_1 & \qquad (x S'_{34}) = x_2 \\ (x S'_{13}) = x_3 & \qquad (x S'_{42}) = x_4 \\ (x S'_{14}) = -x_5 & \qquad (x S'_{23}) = -x_6 \end{array}$$

und für die vier Invarianten A_i erhalten wir

$$A_1 = -1 \; , \; A_2 = +1 \; , \; A_3 = +1 \; , \; A_4 = -1 .$$

Hiermit wird die Gleichung der assoziierten Geraden nach (1) und (12)

$$G_5 \ldots \pi'_{13} + \pi'_{14} - \pi'_{15} + \pi'_{23} + \pi'_{24} - \pi'_{25} + \pi'_{35} + \pi'_{45} = 0 . \quad . \qquad (13)$$

Nach (11) haben wir als Diskriminante der Form F_λ der fünf Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_5$:

$$2^5 \cdot D = \begin{vmatrix} 0 & \lambda & 0 & 0 & -\nu \\ \lambda & 0 & 0 & 0 & -\nu \\ 0 & 0 & 0 & \mu & -\nu \\ 0 & 0 & \mu & 0 & -\nu \\ -\nu & -\nu & -\nu & -\nu & -2\nu \end{vmatrix} = -2 \lambda \mu \nu (\mu \nu + \nu \lambda + \lambda \mu) . \quad . \qquad (14)$$

Nehmen wir also $\lambda \mu \nu \neq 0$, so sind durch

$$\mu \nu + \nu \lambda + \lambda \mu = 0 \text{ oder } \nu = -\frac{\lambda \mu}{\lambda + \mu}$$

die Kegel F_λ gegeben. Die Spitze eines Kegels bekommt die Koordinaten

$$\mu : \mu : \lambda : \lambda : -(\lambda + \mu) = 1 : 1 : \frac{\lambda}{\mu} : \frac{\lambda}{\mu} : -\left(1 + \frac{\lambda}{\mu}\right)$$

also, für $\frac{\lambda}{\mu} = \sigma$:

$$1 : 1 : \sigma : \sigma : -(1 + \sigma) .$$

Nach (13) ist der Ort der Spitzen also die assoziierte Gerade G_5.