**Mathematics.** — *Beiträge zur Theorie der Systeme* PFAFF*scher Gleichungen. I. Ein Theorem über die Klassen der Faktoren eines Systems.* Von J. A. SCHOUTEN und W. VAN DER KULK.

(Communicated at the meeting of December 30, 1939.)

1. *Einleitung.*

Ein System von $q$ PFAFFschen Gleichungen in $n$ Variablen

$$\overset{x}{w}_\lambda \, dx^\lambda = 0; \quad x = \mathrm{p}+1, \ldots, \mathrm{n}; \quad p = n - q \quad . \quad . \quad . \quad (1a)$$

oder

$$w_{\lambda_1 \ldots \lambda_q} dx^{\lambda_q} = 0; \quad w_{\lambda_1 \ldots \lambda_q} = \overset{\mathrm{p}+1}{w}_{[\lambda_1} \ldots \overset{\mathrm{n}}{w}_{\lambda_q]} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1b)$$

stellt bekanntlich ein $p$-Richtungsfeld in einer $X_n$ dar. Wir nennen den bis auf einen skalaren Faktor bestimmten einfachen kovarianten $q$-Vektor $w_{\lambda_1 \ldots \lambda_q}$ den *kovarianten q-Vektor des Systems* und jeden möglichen Teiler $w_\lambda$ von $w_{\lambda_1 \ldots \lambda_q}$ einen *Faktor des Systems.* Unter *Klasse* eines Faktors $w_\lambda$ verstehen wir die Klasse der Gleichung $w_\lambda \, dx^\lambda = 0$, die bekanntlich stets ungerade und $\leqq n$ ist. Ein Gradientvektor hat also die Klasse 1 und allgemein ein Vektor von der Form

$$w_\lambda = \partial_\lambda \overset{1}{s} + \overset{2}{f} \partial_\lambda \overset{2}{s} + \ldots \overset{u}{f} \partial_\lambda \overset{u}{s}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

wo $\overset{2}{f}, \ldots, \overset{u}{f}, \overset{1}{s}, \ldots, \overset{u}{s}$ funktional unabhängig sind, die klasse $2u-1$.

Sind $\underset{b}{v}^\varkappa$, $(b = 1, \ldots, \mathrm{p})$, $p$ linear unabhängige Lösungen der Gleichungen

$$v^\mu \overset{x}{w}_\mu = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

so lautet bekanntlich das System von $p$ partiellen Differentialgleichungen, das dem System (1) adjungiert ist

$$\underset{b}{v}^\mu \partial_\mu f = 0; \quad \partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4a)$$

oder

$$v^{\varkappa_1 \ldots \varkappa_p} \partial_{\varkappa_p} f = 0; \quad v^{\varkappa_1 \ldots \varkappa_p} = \underset{1}{v}^{[\varkappa_1} \ldots \underset{\mathrm{p}}{v}^{\varkappa_p]} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4b)$$

oder in der LIEschen Bezeichnungsweise

$$X_b f = 0; \quad X_b = \underset{b}{v}^\mu \partial_\mu \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4c)$$



Der bis auf einen skalaren Faktor bestimmte einfache $p$-Vektor $v^{\varkappa_1 \ldots \varkappa_p}$ heisst der *kontravariante p-Vektor des Systems.*

Ist das System *vollständig integrabel,* so sind die Operatoren (LIEsche Klammerausdrücke)

$$(X_a X_b) = X_{ab} = X_a X_b - X_b X_a = 2 \, (\underset{[a}{v}^\omega \partial_\omega \underset{b]}{v}^\mu) \, \partial_\mu . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

linear abhängig von den $X_a$. Ist dies nicht der Fall, so bildet man weitere Klammerfaktoren, bis schliesslich ein in dieser Weise nicht mehr erweiterungsfähiges System von $\nu \geqq p$ linear unabhängigen Operatoren entsteht. Ist $\nu = n$, so ist das System *nicht integrabel,* ist aber $\nu < n$, so besitzt es gerade $n - \nu$ funktional unabhängige Lösungen. Diese Lösungen bilden ein System von $\infty^{n-\nu}$ $X_\nu$, deren $\nu$-Richtung in jedem Punkte die $p$-Richtung des Richtungsfeldes enthält. Man sagt dann, dass das Richtungsfeld *$X_\nu$-enthalten* ist.

Man sagt, dass das Richtungsfeld *$X_m$-bildend* ist, $m \leqq p$, wenn es im betrachteten Gebiet ein System von $\infty^{n-m}$ $X_m$ gibt, deren $m$-Richtung in der $p$-Richtung des $p$-Richtungsfeldes enthalten ist. Ein vollständig integrabeles System ist also sowohl $X_p$-bildend als $X_p$-enthalten. Der grösste Wert $\mu$, den $m$ annehmen kann, ist $p - \sigma$, $\sigma$ heisst nach J. H. THOMAS die Spezies des Gleichungssystems.[1]) Ist das $X_\mu$-bildende $\mu$-Richtungsfeld gegeben durch das Gradientprodukt (alternierendes Produkt von Gradientvektoren)

$$s_{\lambda_1 \ldots \lambda_{n-\mu}} = \overset{1}{s}_{[\lambda_1} \ldots \overset{n-\mu}{s}_{\lambda_{n-\mu}]}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

so ist offenbar $w_{\lambda_1 \ldots \lambda_q}$ ein Teiler von $s_{\lambda_1 \ldots \lambda_{n-\mu}}$ und nach dem bekannten Auswahlsatz muss es also unter den Gradientvektoren $s_\lambda$ eine Anzahl $n - \mu - q$ geben, die mit $w_{\lambda_1 \ldots \lambda_q}$ (alternierend) multipliziert bei richtiger Wahl des freien skalaren Faktors in $w_{\lambda_1 \ldots \lambda_q}$ gerade $s_{\lambda_1 \ldots \lambda_{n-\mu}}$ erzeugen

$$w_{[\lambda_1 \ldots \lambda_q} \overset{1}{s}_{\lambda_{q+1}} \ldots \overset{v}{s}_{\lambda_{n-\mu}]} = s_{\lambda_1 \ldots \lambda_{n-\mu}}; \quad v = n - \mu - q = p - \mu \quad . \quad . \quad (7)$$

Daraus geht aber hervor, dass man stets $p - \mu + 1$ Gradientvektoren angeben kann, deren Produkt mit $w_{\lambda_1 \ldots \lambda_q}$ multipliziert Null erzeugt und aus diesem Umstande folgt, dass sich die Faktoren $\overset{x}{w}_\lambda$ ersetzen lassen durch $q$ andere Faktoren, von denen ein jeder sich als eine Summe von Vielfachen von höchstens $p - \mu + 1$ Gradientvektoren schreiben lässt. Die Klasse jedes dieser Faktoren ist also $\leqq 2(p - \mu) + 1$, und es ist damit bewiesen, dass sich jedes System von $q$ PFAFFschen Gleichungen in $n$ Variablen ersetzen lässt durch ein System von $q$ Gleichungen, deren Klasse höchstens $2(p - \mu) + 1$ ist. Da für ein "allgemeines" System der Genus bekanntlich gleich $\left[\frac{n}{q+1}\right]$ ist[2]), folgt als sehr rohe Abschätzung,

[1]) Ist $g$ der Genus (genre) des Systems nach CARTAN, so ist also stets $\mu \geqq g$.

[2]) E. GOURSAT, Leçons sur le problème de PFAFF, S. 362.

dass sich ein "allgemeines "System stets auf ein System von Gleichungen zurückführen lässt, deren Klasse $\leqq 2\left(p-\left[\frac{n}{q+1}\right]\right)+1$ ist.

Dies sind bekannte Tatsachen. Darüber hinaus stellen wir jetzt das Theorem auf:

*Jedes System von $q$ PFAFFschen Gleichungen in $n$ Variablen, ist gleichwertig mit einem System von $q$ Gleichungen, deren Klasse für $p=n-q$ ungerade höchstens gleich $p$ und für $p$ gerade höchstens gleich $p+1$ ist* [1]).

Das Theorem ist trivial für $q=1$ und für $q=n-1$. Der Beweis für $q=2$ ist so einfach, das er hier nicht erörtert werden soll. Wir bringen hier den Beweis für $q=n-2$, $q=n-3$ und $q=n-4$. Der Beweis für $q=n-5$ und $q=n-6$ folgt in der zweiten Mitteilung. Für die übrigen Fälle ist das Theorem vorläufig noch eine Vermutung.

Es stellt sich heraus, dass das Problem sich zurückführen lässt auf die Theorie der Systeme von *homogenen multilinearen partiellen Differentialgleichungen* von der Form

$$\left.\begin{array}{l}\left\|\begin{array}{cccc} X_1 \overset{1}{p} & X_1 \overset{2}{p} & \dots & X_1 \overset{u}{p} \\ X_2 \overset{1}{p} & \dots & \dots & X_2 \overset{u}{p} \\ \vdots & & & \\ X_p \overset{1}{p} & \dots & \dots & X_p \overset{u}{p} \end{array}\right\| = \text{Matrix vom Range} < u; \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad u \leqq {}^1/_2\,(p+1)\end{array}\right\}. \quad (8)$$

die als natürliche Verallgemeinerungen der Systeme homogener linearer partieller Differentialgleichungen ($u=1$) erscheinen. Wir erhalten einen Satz über die Anzahl der unabhängigen Lösungssysteme solcher Gleichungssysteme und anschliessend einen Satz über die möglichen Anfangsbedingungen der Lösungen. In dieser Mitteilung werden die Fälle $u=2$, $p=2$ und 3, $u=3$, $p=4$ behandelt.

2. *Beweis für $q=n-2$.*

Jedes System von $(n-1)$ PFAFFschen Gleichungen ist bekanntlich vollständig integrabel, d.h. jedes kovariante $(n-1)$-Vektorfeld ist bis auf einen skalaren Faktor Gradientprodukt. Geometrisch: jedes 1-Richtungsfeld ist $X_1$-bildend. Ist also $q_\lambda$ ein Gradientvektor, der kein Faktor von $w_{\lambda_1\dots\lambda_{n-2}}$ aber übrigens beliebig ist, so ist $w_{[\lambda_1\dots\lambda_{n-2}}\,q_{\lambda]}$ ein Gradientprodukt [2])

$$w_{[\lambda_1\dots\lambda_{n-2}}\,q_{\lambda]} = \overset{1}{p}_{[\lambda_1}\dots\overset{n-2}{p}_{\lambda_{n-2}}\,q_{\lambda]}; \quad \overset{\mathfrak{x}}{p}_\lambda = \partial_\lambda \overset{\mathfrak{x}}{p}; \quad \mathfrak{x}=1,\dots,n-2, \quad (9)$$

[1]) Es muss also jedenfalls $2\left(p-\left[\frac{n}{q+1}\right]\right)+1 \geqq p$ für ungerades $p$ und $\geqq p+1$ für gerades $p$ sein, eine Tatsache von der man sich leicht überzeugt.

[2]) Richtige Wahl des freien skalaren Faktors natürlich vorausgesetzt.



und daraus geht hervor, dass sich jeder der Gradientvektoren $\overset{\mathfrak{x}}{p}_\lambda$ als Summe von Vielfachen der $\overset{\varkappa}{w}_\lambda$ und $q_\lambda$ schreiben lässt. So entstehen gerade $n-2$ lineare Kombinationen der $\overset{\varkappa}{w}_\lambda$, die Summe von Vielfachen von $q_\lambda$ und *einem* der $\overset{\mathfrak{x}}{p}_\lambda$ sind, und deren Produkt, bei richtiger Wahl des skalaren Faktors in $w_{\lambda_1\dots\lambda_{n-2}}$ gleich $w_{\lambda_1\dots\lambda_{n-2}}$ ist. Damit sind aber die gewünschten Faktoren der Klasse 3 hergestellt und man kann also $w_{\lambda_1\dots\lambda_{n-2}}$ folgendermassen schreiben

$$w_{\lambda_1\dots\lambda_{n-2}} = (\overset{1}{p}_{[\lambda_1} + \overset{1}{f}\,q_{[\lambda_1})\dots(\overset{n-2}{p}_{\lambda_{n-2}]} + \overset{n-2}{f}\,q_{\lambda_{n-2}]}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Diese Darstellung erhält noch $(2n-3)$ beliebige Funktionen. Nun ist die höchste Anzahl der unabhängigen Bestimmungszahlen eines bis auf ein skalaren Faktor gegebenen einfachen $(n-2)$-Vektors bekanntlich $2n-4$, sodass noch eine Funktion zu viel vorhanden ist [1]).

Wir fragen jetzt, welche Bedingungen man einem Faktor von der Form $\lambda\,\partial_\lambda\,p + \mu\,\partial_\lambda\,q$ in einem einzigen Punkt der $X_n$ auferlegen kann. $p$ und $q$ genügen der Gleichung

$$\begin{vmatrix} X_1 p & X_1 q \\ X_2 p & X_2 q \end{vmatrix} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

und umgekehrt führt jedes Lösungssystem dieser Gleichung zu einem Faktor der Klasse $\leqq 3$. Bei der Bildung der Gradientvektoren war der zuerst gewählte Gradientvektor $q_\lambda$ beliebig bis auf die Bedingung $w_{[\lambda_1\dots\lambda_{n-2}}\,q_{\lambda]} \neq 0$, d.h. es sollten nicht $\underset{1}{v}^\lambda\,q_\lambda$ und $\underset{2}{v}^\lambda\,q_\lambda$ gleichzeitig verschwinden. Die sodann eingeführten Gradientvektoren $\overset{\mathfrak{x}}{p}_\lambda$ hatten nur der Bedingung $v^{\varkappa\lambda}\,\overset{\mathfrak{x}}{q}_\varkappa\,p_\lambda = 0$ zu genügen. Den trivialen Fall $v^{\varkappa\lambda}\,p_\lambda = 0$ beiseite lassend, ergibt sich bei *fest* gewähltem $q_\lambda$ für $p_\lambda$ die lineare homogene partielle Differentialgleichung

$$(\underset{1}{v}^\mu\,q_\mu)\,(\underset{2}{v}^1\,\partial_1 + \dots + \underset{2}{v}^n\,\partial_n)\,p - (\underset{2}{v}^\mu\,q_\mu)\,(\underset{1}{v}^1\,\partial_1 + \dots + \underset{1}{v}^n\,\partial_n)\,p = 0 \quad (12)$$

und diese Gleichung hat $n-1$ funktional unabhängige Lösungen, die triviale $p=q$ und die $\overset{\mathfrak{x}}{p}$. Nun kann man bekanntlich stets eine Lösung so wählen, dass in $x^\varkappa = \underset{0}{x}^\varkappa$ der Gradientvektor $p_\lambda$ dort mit einem beliebigen in diesem Punkte vorgegeben Vektor $P_\lambda$ zusammenfällt, vorausgesetzt dass dort

$$v^{\varkappa\lambda}\,P_\varkappa\,q_\lambda = 0\ ;\ v^{\varkappa\lambda}\,P_\lambda \neq 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

ist. Zusammenfassend ergibt sich also der Satz:

[1]) In der zweiten Mitteilung zeigen wir, dass das Haupttheorem für $q=n-3$ es ermöglicht diese überflüssige Funktion zu beseitigen und somit eine Normalform für $q=n-2$ herzustellen.

*Das Gleichungssystem*

$$\begin{vmatrix} X_1 p & X_1 q \\ X_2 p & X_2 q \end{vmatrix} = 0 \text{ oder: } \left.\begin{matrix} \lambda X_1 p + \mu X_1 q = 0 \\ \lambda X_2 p + \mu X_2 q = 0 \end{matrix}\right\}; \; X_b = \underset{b}{v}^{\mu} \partial_\mu ; \; b = 1, 2. \quad (14)$$

*in $n$ Variablen besitzt mindestens ein System von $n-2$ Lösungssystemen $\overset{\mathfrak{x}}{p}, \overset{\mathfrak{x}}{q}$, $(\mathfrak{x} = 1, \ldots, n-2)$, deren zugehörige Vektoren $\overset{\mathfrak{x}}{\lambda} \overset{\mathfrak{x}}{p}_\lambda + \overset{\mathfrak{x}}{\mu} \overset{\mathfrak{x}}{q}_\lambda$ linear unabhängig sind. Zu jedem System von zwei Vektoren $P_\lambda, Q_\lambda$ in $x^\varkappa = \underset{0}{x}^\varkappa$, das den algebraischen Bedingungen*

$$v^{\varkappa\lambda} P_\varkappa Q_\lambda = 0 \quad ; \quad v^{\varkappa\lambda} P_{[\varkappa} Q_{\mu]} \neq 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (15)$$

*genügt, gibt es wenigstens ein Lösungssystem, für welches $p_\lambda = P_\lambda$, $q_\lambda = Q_\lambda$ ist in $x^\varkappa = \underset{0}{x}^\varkappa$.*

3. *Beweis für $q = n-3$.*

Die Methode, die für $q = n-2$ verwendet wurde, würde hier nur zu Faktoren der Klasse 5 statt der Klasse 3 führen. Es kommt darauf an ein System von $n-3$ linear unabhängigen Vektoren von der Form

$$w_\lambda = \partial_\lambda p + \mu \partial_\lambda q \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (16)$$

zu finden, die den drei Gleichungen

$$\underset{b}{v}^{\lambda} \partial_\lambda p + \mu \underset{b}{v}^{\lambda} \partial_\lambda q = 0 \quad ; \quad b = 1, 2, 3, \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (17a)$$

oder auch

$$X_b p + \mu X_b q = 0 \quad ; \quad b = 1, 2, 3, \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (17b)$$

genügen. Da sich die eventuell vorhandenen Lösungen der Gleichungen $X_b f = 0$ auf bekanntem Wege bestimmen lassen, betrachten wir hier nur solche Lösungen für welche $X_b p \neq 0$ und $X_b q \neq 0$ ist. Elimination von $\mu$ ergibt

$$(X_{[a} p) X_{b]} q = 0 \quad ; \quad a, b = 1, 2, 3. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (18)$$

Durch lineare Transformation der $\underset{b}{v}^{\varkappa}$ in $\underset{\mathfrak{x}}{v}^{\varkappa}$, $\mathfrak{x} = 1, 2, 3$, lässt sich immer erreichen [1]) dass

$$\left.\begin{matrix} X_1 = \partial_1 & & + \underset{1}{v}^4 \partial_4 + \ldots + \underset{1}{v}^n \partial_n \\ X_2 = & \partial_2 & + \underset{2}{v}^4 \partial_4 + \ldots + \underset{2}{v}^n \partial_n \\ X_3 = & & \partial_3 + \underset{3}{v}^4 \partial_4 + \ldots + \underset{3}{v}^n \partial_n \end{matrix}\right\} \quad . \; . \; . \; . \quad (19)$$

wird. Sind die Operatoren $X_{23}$, $X_{31}$ und $X_{12}$ alle identisch gleich Null,

[1]) Durch Koordinatentransformation kann man ausserdem noch stets erreichen, dass $X_1 = \partial_1$, also $\underset{1}{v}^{\varkappa} = \underset{1}{e}^{\varkappa}$ wird. Diesen Umstand brauchen wir hier noch nicht zu verwenden.



so ist das System $X_{\mathfrak{x}} f = 0$ vollständig integrabel und es gibt sogar $n-3$ linear unabhängige Faktoren der Klasse 1. Diesen Fall können wir also ausschliessen und ohne der Allgemeinheit zu schaden annehmen es sei $X_{23} \neq 0$. Wir bemerken noch dass $X_{23}$, $X_{31}$ und $X_{12}$ keine Differentiationen nach $x^1$, $x^2$ oder $x^3$ enthalten. Statt (18) betrachten wir nun das gleichwertige Gleichungssystem

$$\left.\begin{matrix} a) \left\{\begin{matrix} X_1 p = \sigma X_2 p \\ X_1 q = \sigma X_2 q \end{matrix}\right\} X_2 p \neq 0 \; ; \; X_2 q \neq 0. \\ b) \quad (X_{[2} p) X_{3]} q = 0 \end{matrix}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (20)$$

Sind dann $p$ und $q$ Lösungen von (20a), so gilt für

$$\theta = 2 (X_{[2} p) X_{3]} q \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (21)$$

folgende Differentialgleichung

$$X_1 \theta - X_2 (\sigma \theta) = \zeta \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (22)$$

wo

$$\left.\begin{matrix} \zeta = (X_{12} p) X_3 q - (X_3 p) X_{12} q + \\ + (X_{31} p) X_2 q - (X_2 p) X_{31} q + \sigma \{ (X_{23} p) X_2 q - (X_2 p) X_{23} q \} \end{matrix}\right\} \quad (23)$$

Sollen nun $p$ und $q$ auch Lösungen von (20b) sein, so müssen sie den Ausdruck $\theta$ Null machen, und es muss also jedenfalls $\zeta$ verschwinden. Die Gleichnng $\zeta = 0$ kann nun benutzt werden um $\sigma$ aus den Gleichungen (20a) fort zu schaffen, vorausgesetzt, dass der Koeffizient von $\sigma$ in (23) nicht Null sei. Wir erhalten dann zwei Gleichungen

$$\left.\begin{matrix} \partial_1 p = \sigma X_2 p - \underset{1}{v}^4 \partial_4 p - \ldots - \underset{1}{v}^n \partial_n p \\ \partial_1 q = \sigma X_2 q - \underset{1}{v}^4 \partial_4 p - \ldots - \underset{1}{v}^n \partial_n p \end{matrix}\right\} \quad . \; . \; . \; . \quad (24)$$

mit der Nebenbedingung

$$(X_{23} p) X_2 q - (X_2 p) X_{23} q \neq 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (25)$$

Die rechten Seiten der Gleichungen (24) enthalten keine Differentiationen nach $x^1$ und alle vorkommenden Ableitungen sind von der ersten Ordnung. Sind die Koeffizienten also regulär in der Umgebung von $x^\varkappa = \underset{0}{x}^\varkappa$, so gibt es, vorläufig abgesehen von der Nebenbedingung, nach CAUCHY–KOWALEWSKI ein einziges Lösungssystem von (24), das für $x^1 = \underset{0}{x}^1$ übergeht in die beliebigen Funktionen der $x^2, \ldots, x^n$

$$\left.\begin{matrix} p (\underset{0}{x}^1, x^2, \ldots, x^n) = \overset{0}{p} (x^2, \ldots, x^n) \\ q (\underset{0}{x}^1, x^2, \ldots, x^n) = \overset{0}{q} (x^2, \ldots, x^n) \end{matrix}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (26)$$

Wir müssen nun aber diese Funktionen so wählen, dass für $x^1 = \underset{0}{x^1}$ die Nebenbedingung (die keine Differentiationen nach $x^1$ enthält)

$$(X_{23}\overset{0}{p})_0\,(X_2\overset{0}{q})_0 - (X_2\overset{0}{p})_0\,(X_{23}\overset{0}{q})_0 \neq 0 \;;\; (\,)_0 = \text{Wert von } (\,) \text{ für } x^1 = \underset{0}{x^1} \quad (27)$$

erfüllt ist, da sich sonst $\sigma$ schon für $x^1 = \underset{0}{x^1}$ nicht aus $\zeta = 0$ lösen liesse.

Gilt aber (27), so ist die Existenz eines einzigen Lösungssystem von (24), das auch (25) und (26) erfüllt, nach CAUCHY—KOWALEWSKI gesichert. Ausserdem sollen nun $\overset{0}{p}$ und $\overset{0}{q}$ nun noch so gewählt werden, dass die Lösung von (24) auch $\theta$ Null macht, und wir verlangen also dass $\theta$ jedenfalls schon für $x^1 = \underset{0}{x^1}$ verschwindet:

$$(X_{[2}\overset{0}{p})_0\,(X_{3]}\overset{0}{q})_0 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

Nehmen wir einen Augenblick an, es gelänge $\overset{0}{p}$ und $\overset{0}{q}$ den Bedingungen (27) und (28) entsprechend zu wählen, so würde für die aus $\overset{0}{p}$ und $\overset{0}{q}$ hervorgehende Lösung $p, q$ der Ausdruck $\theta$ der Gleichung

$$X_1\,\theta - X_2\,(\sigma\,\theta) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29a)$$

oder ausgeschrieben

$$\partial_1\,\theta = X_2\,(\sigma\,\theta) - \underset{1}{v^4}\,\partial_4\,\theta - \ldots - \underset{1}{v^n}\,\partial_n\,\theta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29b)$$

genügen, in welcher Gleichung $\sigma$ jetzt, nach Bildung der Lösung $p, q$, eine bekannte Funktion von $x^1, \ldots, x^n$ wäre. Nun genügt aber $\theta$ infolge (28) jedenfalls der Gleichung

$$\theta\,(\underset{0}{x^1}, x^2, \ldots, x^n) = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30)$$

Da es nun aber einerseits nach CAUCHY—KOWALEWSKI nur eine einzige Lösung von (29*b*) gibt, die für $x^1 = \underset{0}{x^1}$ Null wird, anderseits aber $\theta = 0$ offenbar eine solche Lösung ist, so ist diese Lösung auch die einzige und daraus geht hervor, dass die konstruierte Lösung $p, q$ von (20*a*) auch (20*b*) befriedigt.

Es bleibt jetzt also nur noch zu zeigen, dass es tatsächlich Funktionensysteme $\overset{0}{p}, \overset{0}{q}$ von $x^2, \ldots, x^n$ gibt, die gleichzeitig (27) und (28) befriedigen und die Anzahl der möglichen unabhängigen Funktionensysteme zu bestimmen. Man wähle dazu für $\overset{0}{q}$ eine Funktion, die die Ausdrücke

$$(X_2\overset{0}{q})_0 \;;\; (X_{23}\overset{0}{q})_0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31)$$

nicht beide zum verschwinden bringt und substituiere diese Funktion in (28). Es entsteht dann eine für $\overset{0}{p}$ lineare homogene partielle Differential-



gleichung erster Ordnung in $x^2, \ldots, x^n$. Diese Gleichung hat $n-2$ funktional unabhängige Lösungen, darunter die triviale $\overset{0}{p} = \overset{0}{q}$. Es gilt die anderen Lösungen $\overset{0,\mathfrak{x}}{p}$, $(\mathfrak{x} = 1, \ldots, n-3)$, so zu wählen, dass für jede einzelne Lösung $\overset{0,\mathfrak{x}}{p}$ gilt

$$(X_{23}\overset{0,\mathfrak{x}}{p})_0\,(X_2\overset{0}{q})_0 - (X_2\overset{0,\mathfrak{x}}{p})_0\,(X_{23}\overset{0}{q})_0 \neq 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (32)$$

Bekanntlich lassen sich nun die $n-2$ Lösungen einer solchen Gleichung so wählen, dass im Punkte $x^\alpha = \underset{0}{x^\alpha}$, $(\alpha = 2, \ldots, n)$ die $n-2$ Vektoren $\partial_\alpha\,\overset{0}{q}, \partial_\alpha\,\overset{\mathfrak{x}}{p}$ mit $n-2$ linear unabhängigen Vektoren $\overset{0}{Q}_\alpha, \overset{0,\mathfrak{x}}{P}_\alpha$ zusammenfallen, die nur den jetzt *algebraischen* aus (27) und (28) hervorgehenden Bedingungen

$$(\underset{2}{v^\mu}\,\partial_\mu\,\underset{3}{v^\alpha})\,\overset{0,\mathfrak{x}}{P}_\alpha\,\underset{2}{v^\beta}\,\overset{0}{Q}_\beta - \underset{2}{v^\alpha}\,\overset{0,\mathfrak{x}}{P}_\alpha\,(\underset{2}{v^\mu}\,\partial_\mu\,\underset{3}{v^\beta})\,\overset{0}{Q}_\beta \neq 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (33)$$

$$\underset{2}{v^{[\alpha}}\,\underset{3}{v^{\beta]}}\,\overset{0,\mathfrak{x}}{P}_\alpha\,\overset{0}{Q}_\beta = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (34)$$

zu genügen haben, im übrigen aber beliebig sind. Zwar liegt $\partial_\alpha\,\overset{0}{q}$ und damit $\overset{0}{Q}_\alpha$ schon fest, aber die Anfangswerte von $\partial_\alpha\,\overset{0,\mathfrak{x}}{p}$ sind noch diesen Bedingungen entsprechend wählbar. Im Punkte $x^\varkappa = \underset{0}{x^\varkappa}$ wählen wir nun die Koordinaten in der $X_{n-1}$ von $x^2, \ldots, x^n$ vorübergehend so, dass $\underset{2}{v^\varkappa} = \underset{2}{e^\varkappa}$, $\underset{3}{v^\varkappa} = \underset{3}{e^\varkappa}$ und $2\,\underset{[2}{v^\varkappa}\,\partial_\mu\,\underset{3]}{v^\varkappa} = \underset{4}{e^\varkappa}$. Dann gehen die algebraischen Bedingungen für die $\overset{0,\mathfrak{x}}{P}_\alpha$ über in

$$\overset{0,\mathfrak{x}}{P}_4\,\overset{0}{Q}_2 - \overset{0,\mathfrak{x}}{P}_2\,\overset{0}{Q}_4 \neq 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (35)$$

$$\overset{0,\mathfrak{x}}{P}_2\,\overset{0}{Q}_3 - \overset{0,\mathfrak{x}}{P}_3\,\overset{0}{Q}_2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (36)$$

und diesen Bedingungen kann natürlich stets genügt werden, da $Q_2$ und $Q_4$ der Voraussetzung (31) nach nicht beide verschwinden.

Die Voraussetzung, die für die Wahl der Anfangswerte für $x^1 = \underset{0}{x^1}$ aufgestellt werden musste, ist also erfüllt und aus den Anfangswerten $\overset{0,\mathfrak{x}}{p}, \overset{0}{q}$ entstehen somit $n-3$ Lösungssysteme $\overset{\mathfrak{x}}{p}, \overset{\mathfrak{x}}{q}$ der Gleichungen (20). Ein jedes solches Lösungssystem gibt einen Vektor

$$'\overset{\mathfrak{x}}{w}_\lambda = \overset{\mathfrak{x}}{p}_\lambda + \overset{\mathfrak{x}}{\mu}\,\overset{\mathfrak{x}}{q}_\lambda \;;\; = 1, \ldots, n-3. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (37)$$

und es ist $\mu$ zu bestimmen aus einer der drei Gleichungen

$$X_b\,\overset{\mathfrak{x}}{p}_\lambda + \overset{\mathfrak{x}}{\mu}\,X_b\,\overset{\mathfrak{x}}{q}_\lambda = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (38)$$

Die $n-3$ so erhaltenen Vektoren sind in einer Umgebung von $x^\varkappa = \underset{0}{x}{}^\varkappa$ linear unabhängig, denn für $x^\varkappa = \underset{0}{x}{}^\varkappa$ ist

$$'w_\alpha = \overset{0,\mathfrak{x}}{P}_\alpha + \overset{\mathfrak{x}}{\mu}\, \overset{0}{Q}_\alpha \;;\; \alpha = 2, \ldots n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (39)$$

und aus der linearen Unabhängigkeit von $\overset{0,\mathfrak{x}}{P}_\alpha$ und $\overset{0}{Q}_\alpha$ folgt in $x^\varkappa = \underset{0}{x}{}^\varkappa$

$$'\overset{1}{w}_{[\alpha_1} \ldots '\overset{n-3}{w}_{\alpha_{n-3}]} \neq 0 \;;\; \alpha = 2, \ldots, n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (40)$$

also auch

$$'\overset{1}{w}_{[\lambda_1} \ldots '\overset{n-3}{w}_{\lambda_{n-3}]} \neq 0 \;;\; \lambda = 1, \ldots, n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (41)$$

Das Gleichungssystem $\overset{x}{w}{}^\lambda\, dx_\lambda = 0$ ist also gleichwertig mit dem System von $n-3$ Gleichungen der Klasse 3

$$(\overset{\mathfrak{x}}{p}_\lambda + \overset{\mathfrak{x}}{\mu}\, \overset{\mathfrak{x}}{q}_\lambda)\, dx^\lambda = 0 \,. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (42)$$

womit das Theorem für $q = n-3$ bewiesen ist. Die gefundene Form für $w_{\lambda_1 \ldots \lambda_{n-3}}$ enthält $3\,(n-3)$ beliebige Funktionen und diese Anzahl ist der höchsten Anzahl von unabhängigen Bedingungszahlen von $w_{\lambda_1 \ldots \lambda_{n-3}}$ gleich, sodass wir eine Normalform gefunden haben.

Es ist für das weitere wichtig ganz genau zu diskutieren welche algebraische Bedingungen man einem Faktor $\lambda p_\lambda + \mu q_\lambda$ in einem Punkt $x^\varkappa = \underset{0}{x}{}^\varkappa$ auferlegen muss und welche Freiheit man behält. Es seien $P_\lambda, Q_\lambda$ zwei Vektoren im Punkte $x^\varkappa = \underset{0}{x}{}^\varkappa$, die dort den algebraischen Bedingungen

$$\left.\begin{array}{ll}
a) & v^{\varkappa\lambda\mu} P_\lambda Q_\mu = 0 \qquad\qquad b) \quad v^{\varkappa\lambda\mu} P_{[\mu} Q_{\nu]} \neq 0 \\
c) & \left\{\begin{array}{l} \underset{1}{v}{}^\lambda P_\lambda = \sigma\, \underset{2}{v}{}^\lambda P_\lambda \\ \underset{1}{v}{}^\lambda Q_\lambda = \sigma\, \underset{2}{v}{}^\lambda Q_\lambda \end{array}\right. \\
d) & \sigma\, \underset{4}{v}{}^{[\varkappa}\, \underset{2}{v}{}^{\lambda]} P_\varkappa Q_\lambda + (\underset{5}{v}{}^{[\varkappa}\, \underset{2}{v}{}^{\lambda]} + \underset{6}{v}{}^{[\varkappa}\, \underset{3}{v}{}^{\lambda]}) P_\varkappa Q_\lambda = 0 ; \quad \underset{4}{v}{}^\varkappa = 2\, \underset{[2}{v}{}^\mu\, \partial_\mu\, \underset{3]}{v}{}^\varkappa ; \\
 & \qquad \underset{5}{v}{}^\varkappa = 2\, \underset{[3}{v}{}^\mu\, \partial_\mu\, \underset{1]}{v}{}^\varkappa ; \quad \underset{6}{v}{}^\varkappa = 2\, \underset{[1}{v}{}^\mu\, \partial_\mu\, \underset{2]}{v}{}^\varkappa \\
e) & \underset{4}{v}{}^{[\varkappa}\, \underset{2}{v}{}^{\lambda]} P_\varkappa Q_\lambda \neq 0
\end{array}\right\} . \quad (43)$$

genügen. Wir bemerken sogleich, dass sich die Gleichungen (43*a*, *c*, *d*) ersetzen lassen durch (43*a*) und

$$f) \qquad (\underset{4}{v}{}^{[\varkappa}\, \underset{1}{v}{}^{\lambda]} + \underset{5}{v}{}^{[\varkappa}\, \underset{2}{v}{}^{\lambda]} + \underset{6}{v}{}^{[\varkappa}\, \underset{3}{v}{}^{\lambda]}) P_\varkappa Q_\lambda = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (43)$$

welche letztere Gleichung sich auch schreiben lässt

$$g) \qquad (\partial_\mu\, v^{\mu\lambda\varkappa}) P_\lambda Q_\varkappa = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (43)$$



sodass wir für $P_\lambda$ und $Q_\lambda$ schliesslich nur die Gleichungen (43*a*, *g*) und die Ungleichungen (43*b*, *e*) übrig behalten. Aus dem Umstande, dass $\underset{2}{v}{}^l = \underset{3}{v}{}^l = \underset{4}{v}{}^l = 0$ ist, folgt, dass für $P_\alpha$ und $Q_\alpha$, $\alpha = 2, \ldots, n$, die Bedingungen (33) und (34) gelten, und dass sich ein Lösungssystem $p$, $q$ konstruieren lässt für welches $\partial_\alpha p = P_\alpha$ und $\partial_\alpha q = Q_\alpha$ für $x^\varkappa = \underset{0}{x}{}^\varkappa$. Es ist also nur noch zu zeigen, dass in $x^\varkappa = \underset{0}{x}{}^\varkappa$ auch $p_1 = \partial_1 p = P_1$ und $q_1 = \partial_1 q = Q_1$ ist. Nun genügen $p_\lambda = \partial_\lambda p$ und $q_\lambda = \partial_\lambda q$ den Gleichungen

$$v^{\varkappa\lambda\mu} p_\lambda q_\mu = 0 \,. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (44)$$

$$(\underset{4}{v}{}^{[\varkappa}\, \underset{1}{v}{}^{\lambda]} + \underset{5}{v}{}^{[\varkappa}\, \underset{2}{v}{}^{\lambda]} + \underset{6}{v}{}^{[\varkappa}\, \underset{3}{v}{}^{\lambda]}) p_\varkappa q_\lambda = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (45)$$

$P_\lambda$ und $Q_\lambda$ aber den Gleichungen (43*a*) und (43*f*). Unter Berücksichtigung des Umstandes, dass die 1-Komponenten von $\underset{2}{v}{}^\varkappa$, $\underset{3}{v}{}^\varkappa$, $\underset{4}{v}{}^\varkappa$, $\underset{5}{v}{}^\varkappa$ und $\underset{6}{v}{}^\varkappa$ alle verschwinden, ergeben sich daraus folgende Gleichungen für $p - P_1$ und $q_1 - Q_1$ in $x^\varkappa = \underset{0}{x}{}^\varkappa$

$$\left.\begin{array}{l}
(p_1 - P_1)\, \underset{2}{v}{}^\mu Q_\mu - (q_1 - Q_1)\, \underset{2}{v}{}^\mu P_\mu = 0 \\
(p_1 - P_1)\, \underset{3}{v}{}^\mu Q_\mu - (q_1 - Q_1)\, \underset{3}{v}{}^\mu P_\mu = 0 \\
(p_1 - P_1)\, \underset{4}{v}{}^\mu Q_\mu - (q_1 - Q_1)\, \underset{4}{v}{}^\mu Q_\mu = 0
\end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (44)$$

und die Matrix dieses Systems hat infolge (43*e*) den Rang 2, sodass $p_1 = P_1$ und $q_1 = Q_1$. Wir fassen das Ergebniss folgendermassen zusammen und formulieren alles in Bezug auf beliebige Wahl der Koordinaten und der Faktoren:

*Das Gleichungssystem*

$$\left\| \begin{array}{ll} X_1 p & X_1 q \\ X_2 p & X_2 q \\ X_3 p & X_3 q \end{array} \right\| = 0 \quad \text{oder:} \quad \left.\begin{array}{l} \lambda X_1 p + \mu X_1 q = 0 \\ \lambda X_2 p + \mu X_2 q = 0 \\ \lambda X_3 p + \mu X_3 q = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} X_a = \underset{a}{v}{}^\mu \partial_\mu \\ a = 1, 2, 3 \end{array}\right\} . \quad (45)$$

*in $n$ Variablen besitzt mindestens ein System von $n-3$ Lösungssystemen $\overset{\mathfrak{x}}{p}$, $\overset{\mathfrak{x}}{q}$, $(\mathfrak{x} = 1, \ldots, n-3)$, deren zugehörige Vektoren $\lambda^{\mathfrak{x}}\, \overset{\mathfrak{x}}{p}_\lambda + \overset{\mathfrak{x}}{\mu}\, \overset{\mathfrak{x}}{q}_\lambda$ linear unabhängig sind. Zu jedem System von zwei Vektoren $P_\lambda$, $Q_\lambda$ in $x^\varkappa = \underset{0}{x}{}^\varkappa$, das den algebraischen Bedingungen*

$$\left.\begin{array}{ll}
a) & v^{\varkappa\lambda\mu} P_\lambda Q_\mu = 0 \\
b) & v^{\varkappa\lambda\mu} P_{[\mu} Q_{\nu]} \neq 0 \\
c) & (\partial_\mu\, v^{\mu\lambda\varkappa}) P_\lambda Q_\varkappa = 0 \\
d) & \left\| \begin{array}{ccc} \underset{1}{v}{}^\lambda P_\lambda & \ldots & \underset{6}{v}{}^\lambda P_\lambda \\ \underset{1}{v}{}^\lambda Q_\lambda & \ldots & \underset{6}{v}{}^\lambda Q_\lambda \end{array} \right\| = \text{Matrix vom Range 2;} \;\; X_4 = X_{23}, \text{ u.s.w.}
\end{array}\right\} (46)$$

*genügt, gibt es wenigstens ein Lösungssystem, für welches* $\partial_\lambda p = P_\lambda$, $\partial_\lambda q = Q_\lambda$ *in* $x^\varkappa = \underset{0}{x}{}^\varkappa$.

4. *Beweis für gerades p, wenn der Beweis für das vorhergehende ungerade p geliefert ist.*

Wir nehmen an das Theorem sei schon bewiesen für $p = 2u - 1$. Ist dann $q_\lambda$ ein beliebiger Gradientvektor, der kein Teiler von $w_{\lambda_1 \ldots \lambda_q}$, $q = n - 2u$, ist, so ist

$$w_{[\lambda_1 \ldots \lambda_q} q_{\lambda]} \neq 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (47)$$

und dieser $(n - 2u + 1)$ Vektor lässt sich nach Voraussetzung zerlegen $(n - 2u + 1)$ Faktoren, darunter $q_\lambda$ und $n - 2u$ Faktoren der Klasse $\leqq 2u - 1$

$$\overset{p+1}{w}_{[\lambda_1} \ldots \overset{n}{w}_{\lambda_q} q_{\lambda]} = \overset{1}{u}_{[\lambda_1} \ldots \overset{q}{u}_{\lambda_q} q_{\lambda]} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (48)$$

Daraus folgt, dass sich jeder der Vektoren $u_\lambda$ linear in $\overset{x}{w}_\lambda$ und $q_\lambda$ ausdrücken lässt und es ergeben sich also $q$ lineare Kombinationen der $\overset{x}{w}_\lambda$, die sich als Summe von Vielfachen von $q_\lambda$ und *einem* der $u_\lambda$ schreiben lassen. Diese Kombinationen müssen linear unabhängig sein, da die $u_\lambda$ und $q_\lambda$ es sind und ihr Produkt ist also gleich $w_{\lambda_1 \ldots \lambda_q}$ wenn man den freien skalaren Faktor in $w_{\lambda_1 \ldots \lambda_q}$ richtig wählt. Da aber von den Vektoren $u_\lambda$ bekannt ist, dass ihre Klasse $\leqq 2u - 1$ ist, so ist die Klasse der erhaltenen Faktoren von $w_{\lambda_1 \ldots \lambda_q}$ sicher $\leqq 2u + 1$ womit der Beweis geliefert ist, Die Faktoren haben die Form

$$'\overset{\mathfrak{x}}{w}_\lambda = \overset{\mathfrak{x}}{s}_\lambda + \overset{1,\mathfrak{x}}{f}\ \overset{1,\mathfrak{x}}{s}_\lambda + \ldots \overset{u,\mathfrak{x}}{f}\ s_\lambda \,;\ \mathfrak{x} = 1, \ldots, n - 2u \quad . \quad . \quad . \quad (49)$$

Es ist zu beachten, dass der letzte Gradientvektor rechts, $s_\lambda$, für alle Faktoren derselbe ist, und dass das System in dieser Darstellung demnach $2uq + 1 = pq + 1$ frei wählbare Funktionen enthält. Da die maximale Anzahl der unabhängigen Bestimmungszahlen eines bis auf einen Zahlenfaktor festgelegten $q$-Vektors bekanntlich $pq$ beträgt, enthält die Darstellung also noch eine Funktion zu viel.

5. *Anfangsbedingungen für* $q = n - 4$.

Um für $q = n - 4$ die Bedingungen abzuleiten, die man einem Faktor der Klasse 5 in einem Punkt $x^\varkappa = \underset{0}{x}{}^\varkappa$ auferlegen darf, wählen wir in diesem Punkte einen kovarianten Vektor $R_\lambda$, dessen $(n-1)$-Richtung die 4-Richtung des Feldes nicht enthält, der aber übrigens beliebig ist. Die $(n-1)$-Richtung und die 4-Richtung haben dann eine 3-Richtung gemeinschaftlich und es ist also möglich die Richtung von $\underset{1}{v}{}^\varkappa$ ausserhalb dieser 3-Richtung zu wählen. Sodann wählen wir das Koordinatensystem und die Grösse von $\underset{1}{v}{}^\varkappa$ so, dass $\underset{1}{e}{}^\varkappa = \underset{1}{v}{}^\varkappa$ im ganzen betrachteten Gebiet und



dass $\overset{1}{e}_\lambda = R_\lambda$ in $x^\varkappa = \underset{0}{x}{}^\varkappa$. Es ist dann stets möglich $\underset{2}{v}{}^\varkappa$, $\underset{3}{v}{}^\varkappa$ und $\underset{4}{v}{}^\varkappa$ so zu wählen, dass

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= \partial_1 \\ X_2 &= \partial_2 + \underset{2}{v}{}^5 \partial_5 + \ldots + \underset{2}{v}{}^n \partial_n \\ X_3 &= \partial_3 + \underset{3}{v}{}^5 \partial_5 + \ldots + \underset{3}{v}{}^n \partial_n \\ X_4 &= \partial_4 + \underset{4}{v}{}^5 \partial_5 + \ldots + \underset{4}{v}{}^n \partial_n \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (50)$$

Für die Operatoren $X_{12}, X_{13}, X_{14}, X_{23}, X_{24}, X_{34}$ schreiben wir der Reihe nach $X_5, X_6, X_7, X_8, X_9, X_{10}$. Es seien jetzt $P_\lambda$ und $Q_\lambda$ zwei Vektoren in $x^\varkappa = \underset{0}{x}{}^\varkappa$, die den algebraischen Bedingungen

$$\underset{2}{v}{}^{[\varkappa} \underset{3}{v}{}^{\lambda} \underset{4}{v}{}^{\mu]} P_\lambda Q_\mu = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (51)$$

$$\underset{2}{v}{}^{[\varkappa} \underset{3}{v}{}^{\lambda} \underset{4}{v}{}^{\mu]} P_{[\mu} Q_{\nu]} \neq 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (52)$$

$$(\underset{8}{v}{}^{\varkappa} \underset{4}{v}{}^{\lambda} - \underset{9}{v}{}^{\varkappa} \underset{3}{v}{}^{\lambda} + \underset{10}{v}{}^{\varkappa} \underset{2}{v}{}^{\lambda}) P_{[\mu} Q_{\lambda]} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (53)$$

$$\left\| \begin{matrix} \underset{2}{v}{}^{\lambda} P_\lambda & \underset{2}{v}{}^{\lambda} Q_\lambda \\ \vdots & \vdots \\ \underset{4}{v}{}^{\lambda} P_\lambda & \underset{4}{v}{}^{\lambda} Q_\lambda \\ \underset{8}{v}{}_{\lambda} P_\lambda & \underset{8}{v}{}^{\lambda} Q_\lambda \\ \vdots & \vdots \\ \underset{10}{v}{}^{\lambda} P_\lambda & \underset{10}{v}{}^{\lambda} Q_\lambda \end{matrix} \right\| = \text{Matrix vom Range } 2 \quad . \quad . \quad . \quad (54)$$

genügen. Sodann existiert nach dem früher bewiesenen ein System von Lösungen $p, q$ der Gleichungen

$$\left\| \begin{matrix} X_2 p & X_2 q \\ X_3 p & X_3 q \\ X_4 p & X_4 q \end{matrix} \right\| = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (55)$$

für welches $p_\lambda = P_\lambda$ und $q_\lambda = Q_\lambda$ ist in $x^\varkappa = \underset{0}{x}{}^\varkappa$. Betrachten wir jetzt das Gleichungssystem

$$\left\| \begin{matrix} X_1 p & X_1 q & X_1 r \\ X_2 p & X_2 q & X_2 r \\ X_3 p & X_3 q & X_3 r \\ X_4 p & X_4 q & X_4 r \end{matrix} \right\| = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (56)$$

wo $p$ und $q$ schon die oben konstruierten Lösungen von (55) sind, so sieht man unmittelbar, dass $r = x^1$, also $r_\lambda = R_\lambda$ diese Gleichungen erfüllt. In der Tat enthalten $X_2$, $X_3$ und $X_4$ keine Differentiationen nach $x^1$ und die dreireihigen Determinanten verschwinden also alle vermöge (55). Nun war aber $R_\lambda$ ein Vektor in $x^\varkappa = \underset{0}{x}^\varkappa$, der nur der Bedingung

$$\| \underset{1}{v}^\lambda R_\lambda \;\; \underset{2}{v}^\lambda R_\lambda \;\; \underset{3}{v}^\lambda R_\lambda \;\; \underset{4}{v}^\lambda R_\lambda \| = \text{Matrix vom Range } 1 \quad . \quad . \quad (57)$$

zu genügen hatte, im übrigen aber beliebig war. Die Wahl des Bezugssystems und der Faktoren ist jetzt so getroffen dass in $x^\varkappa = \underset{0}{x}^\varkappa$

$$\underset{1}{v}^\lambda R_\lambda = 1, \; \underset{2}{v}^\lambda R_\lambda = 0, \ldots, \underset{4}{v}^\lambda R_\lambda = 0$$

ist. Die Bedingungen für $P_\lambda$, $Q_\lambda$ und $R_\lambda$ erscheinen hier in einer nicht symmetrischen Gestalt, die auf die spezielle Wahl des Bezugssystems und der Faktoren von $v^{\varkappa\lambda\mu\nu}$ zurückzuführen ist. Sie lassen sich aber unmittelbar in symmetrischer Form schreiben und für allgemein gewählte Koordinaten und Faktoren:

$$v^{\varkappa\lambda\mu\nu} P_\lambda Q_\mu R_\nu = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (58)$$

$$v^{\varkappa\lambda\mu\nu} P_{[\mu} Q_\nu R_{\varrho]} \neq 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (59)$$

$$(\underset{1}{v}^\varkappa \underset{2}{v}^\mu \underset{34}{v}^\lambda + \underset{2}{v}^\varkappa \underset{3}{v}^\mu \underset{14}{v}^\lambda + \underset{3}{v}^\varkappa \underset{1}{v}^\mu \underset{24}{v}^\lambda + \underset{1}{v}^\varkappa \underset{4}{v}^\mu \underset{23}{v}^\lambda + \underset{2}{v}^\varkappa \underset{4}{v}^\mu \underset{31}{v}^\lambda + \underset{3}{v}^\varkappa \underset{4}{v}^\mu \underset{12}{v}^\lambda) P_{[\varkappa} Q_\lambda R_{\mu]} = 0 \quad (60a)$$

oder einfacher

$$(\partial_\varkappa v^{\varkappa\mu\lambda\nu}) P_\mu Q_\lambda R_\nu = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (60b)$$

$$\left\| \begin{matrix} \underset{1}{v}^\lambda P_\lambda & \underset{1}{v}^\lambda Q_\lambda & \underset{1}{v}^\lambda R_\lambda \\ \vdots & & \\ \vdots & & \\ \underset{10}{v}^\lambda P_\lambda & \underset{10}{v}^\lambda Q_\lambda & \underset{10}{v}^\lambda R_\lambda \end{matrix} \right\| = \text{Matrix vom Range } 3; \; X_4 = X_{12}, \text{ u.s.w.} \quad (61)$$

In der Tat sind diese Bedingungen bei der speziellen Wahl des Bezugssystems und der Faktoren mit den Bedingungen (51—54) identisch, da bei allen Vektoren $v^\varkappa$ ausser $\underset{1}{v}^\varkappa$ die erste Bestimmungszahl Null ist und $R_\lambda = \overset{1}{e}_\lambda$ ist. Die jetzt erhaltene Form der Bedingungen ist aber von dieser speziellen Wahl unabhängig und zusammenfassend können wir also den Satz aussprechen.

*Das Gleichungsstem*

$$\left\| \begin{matrix} X_1 p & X_1 q & X_1 r \\ X_2 p & X_2 q & X_2 r \\ X_3 p & X_3 q & X_3 r \\ X_4 p & X_4 q & X_4 r \end{matrix} \right\| = 0 \text{ oder } \left. \begin{matrix} \lambda X_1 p + \mu X_1 q + \nu X_1 r = 0 \\ \lambda X_2 p + \mu X_2 q + \nu X_2 r = 0 \\ \lambda X_3 p + \mu X_3 q + \nu X_3 r = 0 \\ \lambda X_4 p + \mu X_4 q + \nu X_3 r = 0 \end{matrix} \right\} \begin{matrix} X_b = \underset{b}{v}^\mu \partial_\mu \\ b = 1, 2, 3, 4 \end{matrix} \quad (62)$$



*in $n$ Variablen besitzt mindestens ein System von $n-4$ Lösungssystemen $\overset{\mathfrak{x}}{p}, \overset{\mathfrak{x}}{q}, \overset{\mathfrak{x}}{r}$, $(\mathfrak{x} = 1, \ldots, n-3)$, deren zugehörige Vektoren $\overset{\mathfrak{x}}{\lambda} \overset{\mathfrak{x}}{p}_\lambda + \overset{\mathfrak{x}}{\mu} \overset{\mathfrak{x}}{q}_\lambda + \overset{\mathfrak{x}}{v} \overset{\mathfrak{x}}{q}_\lambda$ linear unabhängig sind. Zu jedem System von drei Vektoren $P_\lambda$, $Q_\lambda$, $R_\lambda$ in $x^\varkappa = \underset{0}{x}^\varkappa$, das den algebraischen Bedingungen (58—61) genügt, gibt es wenigstens ein Lösungssystem, für welches $\partial_\lambda p = P_\lambda, \partial_\lambda q = Q_\lambda, \partial_\lambda r = R_\lambda$ in $x^\varkappa = \underset{0}{x}^\varkappa$.*