

5. Les ensembles de capacité nulle sont particulièrement intéressants. On a les propriétés suivantes.

a. Soit E la somme d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable d'ensembles de capacité intérieure ou extérieure nulle. Alors, comme il résulte de la propriété no. 3 du paragraphe précédent, $c(E)$ ou bien $\bar{c}(E)$ est zéro.

b. Un ensemble de capacité extérieure nulle a une mesure extérieure m_e nulle et est donc mesurable.

Supposons $m_e > 0$ et soit O un ensemble ouvert de mesure m , contenant E . Considérons sur O une distribution de masse telle que chaque sous-ensemble mesurable de O porte une masse égale à la mesure de cet sous-ensemble. Le potentiel de cette distribution est borné:

$$\iiint \frac{dm}{r} \equiv 2\pi \left(\frac{3m}{4\pi} \right)^{\frac{2}{3}} = M_O.$$

On a donc en vertu de la définition de M. DE LA VALLÉE POUSSIN

$$c(O) \equiv \frac{m}{M_O}.$$

Par passage à la limite donc

$$\bar{c}(E) \equiv \frac{m_e}{M} > 0,$$

où

$$M = 2\pi \left(\frac{3m_e}{4\pi} \right)^{\frac{2}{3}}.$$

Également il résulte de $c(E) = 0$ que $m_i(E) = 0$ (voir DE LA VALLÉE POUSSIN l.c. p. 21; aussi FROSTMAN l.c. ch. VII).

Dordrecht, décembre 1939.

Mathematics. — Sur les notions de „point stable” et „point régulier” dans le problème de DIRICHLET. Par A. F. MONNA. (Communicated by Prof. W. v. D. WOUDE).

(Communicated at the meeting of December 30, 1939.)

Dans une communication précédente¹⁾ j'ai donné les définitions des notions „point-frontière stable” et „point-frontière régulier” d'un ensemble borné mesurable B . Il s'agit maintenant d'une généralisation des critères de stabilité et régularité donnés par M. M. WIENER et BRELOT²⁾. Nous supprimons la plupart des démonstrations parce qu'on trouve facilement les modifications nécessaires dans les épreuves bien connues aux cas d'un ensemble ouvert ou fermé.

Théorème 1. Pour que Q soit stable il faut et il suffit que pour une fonction continue $\phi(P)$, sous-harmonique dans un ensemble ouvert contenant E , nulle en Q et > 0 ailleurs, on ait $u(Q) = \phi(Q)$ (on peut prendre p. ex. $\phi(P) = \overline{PQ}$).

Critère analogue pour la régularité. C'est une conséquence de ce critère que la stabilité et la régularité sont conservées quand l'ensemble donné E décroît, Q restant point-frontière. Il en résultent encore les deux théorèmes de comparaisons suivants:

a. Soit E contenu dans un ensemble ouvert Ω , sauf un seul point Q_0 des frontières de E et Ω qui appartient à E mais non à Ω . Soit de plus Q un point-frontière régulier pour Ω . Alors Q est stable pour E . La démonstration est tout à fait analogue à celle de M. BRELOT pour le cas de E fermé (les circonstances que E et Ω peuvent avoir de points-frontière en commun autre que Q_0 — ces points n'appartiennent alors pas à E — et que E éventuellement n'est approximable que par l'intérieur, ne présentent pas de difficultés). Remarquons que l'inverse n'a pas toujours lieu.

b. Soit $E_2 \subset E_1$, le point-frontière Q de E_1 et E_2 appartenant à E_1 mais non à E_2 . Alors la stabilité de Q pour E_1 entraîne la régularité pour E_2 . La démonstration est immédiate (toute solution est continue en un point stable).

De ce dernier critère il résulte la propriété-suivante:

Soit \bar{E} la fermeture de E (c. a. d. la somme de E et les points-frontière

¹⁾ A. F. MONNA, Proc. Kon. Ned. Akad. v. Wetensch., Amsterdam, 42, 745—752 (1939).

²⁾ M. BRELOT, Problème de Dirichlet et majorantes harmoniques. Bull. des Sc. Math. t. LXIII (1939).

de E). Alors chaque point stable de \bar{E} est stable ou régulier pour E selon que Q appartienne à E ou non. Néanmoins, un point régulier ou stable pour E peut être instable pour \bar{E} . L'ensemble e_{sr} des points réguliers et des points stables pour E contient donc l'ensemble des points stables pour \bar{E} . Or, M. BRELOT a montré¹⁾ que ce dernier ensemble est partout dense sur la frontière de \bar{E} . Donc aussi e_{sr} est partout dense sur la frontière de E .

Théorème 2. Soit σ une sphère de centre Q et de rayon ρ . Soit $(CE)_\rho$ l'ensemble des points de CE situés sur ou dans σ et supposons ρ suffisamment petit pour que E soit situé dans l'ensemble connexe infini déterminé par $(CE)_\rho$. Pour la régularité de Q il faut et il suffit alors que

1°. Si E est approximable par l'intérieur (donc $(CE)_\rho$ par l'extérieur):

$$\lim_{P \rightarrow Q} \bar{v}(P) = 1$$

$$(P \supset E)$$

2°. Si E est approximable par l'extérieur (donc $(CE)_\rho$ par l'intérieur):

$$\lim_{P \rightarrow Q^-} v(P) = 1$$

$$(P \supset E)$$

où \bar{v} resp. v signifient le potentiel capacitair extérieur et intérieur de $(CE)_\rho$ ²⁾.

Critère analogue pour la stabilité.

La nécessité est une conséquence immédiate du caractère local de la stabilité ou régularité d'un point-frontière (voir aussi la première remarque du § 2 de l'article mentionné ci-dessus).

La suffisance s'établit d'une façon analogue à la démonstration du critère bien connu de BOULIGAND pour ensembles ouverts³⁾. D'abord on voit qu'il suffit de considérer une fonction continue ϕ sur la frontière E^* de E qui est zéro sur la portion E_ρ^* de E^* située sur ou dans une sphère σ_ρ de centre Q et rayon ρ suffisamment petit et qui est $\equiv 1$ ailleurs sur E^* . La borne inférieure de $w = 1 - \bar{v}(P)$ (resp. $1 - v(P)$) est peut-être zéro sur $E^* - E_\rho^*$, mais il est possible d'éliminer de $E^* - E_\rho^*$ une portion de mesure δ aussi petite que l'on veut telle que $w > m > 0$ sur la portion restante. Soit alors $\theta(P)$ la solution pour $E + \sigma_\rho$ et valeurs-frontière 1 sur δ et zéro ailleurs (rendre continue). Alors les valeurs de ϕ sont au plus égales sur E^* à celles correspondants à $\frac{w}{m} + \theta$. Remarquons que la

¹⁾ M. BRELOT, Sur un balayage d'ensembles fermés. C. R. Ac. des Sc. t. 207, 1157 (1938).

²⁾ Voir l'article précédent: Sur la capacité des ensembles.

³⁾ Annales de la Soc. pol. de Math., 1925, p. 89.

valeur de θ en Q peut être rendue aussi petite que l'on veut avec δ et ε . Il suffit alors évidemment de montrer que la solution pour ϕ est majorée par $w(P)$ car, d'après la supposition, $w(P)$ tend vers zéro en Q . Or, on montre sans peine par induction que de $\phi(P) \equiv w(P)$ sur $E + E^*$ il résulte que la solution pour ϕ est majorée par $w(P)$. Le théorème est donc démontré.

Pour ensembles fermés M. BRELOT a déjà généralisé le critère nécessaire et suffisant de WIENER (série de WIENER) pour ensembles ouverts. Au cas général d'un ensemble borélien on obtient le critère suivant:

Théorème 3. Soit Γ_n la sphère de centre Q_0 et rayon λ^n où $0 < \lambda < 1$. Soit A_n la portion du complémentaire de E comprise au sens large entre les sphères Γ_n et Γ_{n-1} et soient \bar{c}_n et \underline{c}_n les capacités extérieures et intérieures de A_n . Pour que Q_0 soit stable ou régulier (selon que Q_0 appartienne à E ou non) il faut et suffit que,

1°. si E est approximable par l'intérieur, la série

$$\sum_1^\infty \frac{\bar{c}_n}{\lambda^n}$$

diverge;

2°. si E est approximable par l'extérieur, la série

$$\sum_1^\infty \frac{\underline{c}_n}{\lambda^n}$$

diverge.

Supposons (en prenant le premier cas) que la série indiquée converge et supposons, par impossible, que Q_0 soit régulier. Choisissons m assez grand pour que $\sum_m^\infty \frac{\bar{c}_n}{\lambda^n} < \frac{\lambda}{4}$. En vertu du théorème 2 le potentiel capacitair extérieur de la portion du complémentaire de E située sur ou dans Γ_{m+p} ($p = 0, 1, \dots$) tend vers 1 en Q_0 . Il en résulte qu'on peut prendre k assez grand pour que le potentiel capacitair extérieur $\bar{v}_{m,m+k}$ de $A_m + \dots + A_{m+k}$ soit supérieur à $\frac{1}{2}$ dans un voisinage de Q_0 . Remarquons alors que si $E = E_1 + E_2$, on a, comme on le voit aisément,

$$\bar{v}_E(P) \equiv \bar{v}_{E_1}(P) + \bar{v}_{E_2}(P)$$

et

$$v_E(P) \equiv v_{E_1}(P) + v_{E_2}(P).$$

Si donc \bar{v}_n désigne le potentiel capacitair extérieur de A_n , on a

$$\bar{v}_{m,m+k} \equiv \sum_m^{m+k} \bar{v}_n$$

et donc, en appliquant une relation connue (voir § 4 de la communication précédente), on a en Q_0

$$\bar{v}_{m,m+k} \equiv \sum_m^{m+k} \frac{\bar{c}_n}{\lambda^{n+1}} < \frac{1}{4}.$$

C'est là une contradiction et le point est donc irrégulier (resp. instable)¹⁾.

Supposons ensuite que la série diverge et soit E approximable par l'extérieur. Choisissons les $\varepsilon_n > 0$ de manière que la série $\sum \frac{\varepsilon_n}{\lambda^n}$ converge.

Il existe alors dans chaque A_n un sous-ensemble B_n tel que

$$\underline{c}_n - c(B_n) < \varepsilon_n.$$

La somme des ensembles B_n augmentée de Q est fermée. L'ensemble complémentaire ouvert Ω contient E , sauf éventuellement le point Q_0 si Q appartient à E (E et Ω peuvent avoir en commun d'autres points-frontière mais ces points certainement n'appartiennent pas à E). En conséquence du choix des B_n la série correspondante pour Ω diverge encore et Q est donc régulier pour Ω . D'après le théorème de comparaison précédent, Q est donc stable (ou régulier) pour E .

La même démonstration, due à M. BRELOT pour ensembles ouverts, subsiste évidemment encore au cas d'un ensemble borélien approximable par l'intérieur si l'on suppose que la série $\sum \frac{c_n}{\lambda^n}$ diverge. Cependant,

en ce cas le théorème ne suppose que la divergence de la série des capacités extérieures ce qui n'entraîne pas la divergence de la série des capacités intérieures (au moins si l'on ne suppose pas que $\bar{c}_n = c_n$). Pour montrer la suffisance du critère au cas d'un ensemble approximable par l'intérieur il faut donc d'autres moyens. Nous supprimons l'épreuve puisqu'on n'a qu'à modifier la démonstration de KELLOGG (l.c.) comme ci-dessus²⁾.

Dordrecht, décembre 1939.

¹⁾ Cette démonstration n'est qu'une transposition de celle de KELLOGG pour ensembles ouverts; voir Bull. of the American Math. Soc. XXXII (1926).

²⁾ Comparez aussi une démonstration de M. DE LA VALLÉE POUSSIN au Bulletin de l'Académie royale de Belgique 1938, p. 673.

Mathematics. — *Eine Charakterisierung der konformeuklidischen Räume.*
Von J. HAANTJES. (Communicated by Prof. J. A. SCHOUTEN).

(Communicated at the meeting of December 30, 1939.)

In einer früheren Arbeit¹⁾ haben wir die folgenden zwei Sätze bewiesen:

1. *Eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass eine V_n ($n = 2m$) gerader Dimension konformeuklidisch sei, ist, dass die Summe der RIEMANNschen Krümmungsmasse für jedes System von m gegenseitig senkrechten 2-Richtungen in jedem Punkte von der besonderen Wahl dieses Systems unabhängig ist.*

2. *Eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass eine V_{2m} konformeuklidisch sei, ist, dass die Summe der skalaren Krümmungen von zwei beliebigen gegenseitig senkrechten m -Richtungen in jedem Punkte von der besonderen Wahl dieser m -Richtungen unabhängig ist.*

Diese zwei geometrischen Charakterisierungen der konformeuklidischen Räume gerader Dimension sind eine Folge eines allgemeineren Satzes, den wir jetzt formulieren. Es seien m_1, \dots, m_p p beliebige aber fest gewählte Zahlen, für die

$$m_i > 1 \quad (i = 1, \dots, p); \quad \sum_{i=1}^p m_i = n. \quad (1)$$

ist, wo n die Dimension des Raumes ist. Wir betrachten weiter Systeme von p gegenseitig senkrechten m -Richtungen der Dimensionen m_1, m_2, \dots, m_p ; also eine m_1 -Richtung, eine m_2 -Richtung, ... und eine m_p -Richtung, welche gegenseitig senkrecht sind. Es handelt sich nun um den folgenden Satz:

3. *Eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass eine V_n ($n \geq 4$) konformeuklidisch sei, ist, dass die Summe*

$$m_1 \kappa_1 + m_2 \kappa_2 + \dots + m_p \kappa_p \quad (2)$$

für jedes System von p ($p > 1$) gegenseitig senkrechten m -Richtungen der Dimensionen m_1, \dots, m_p ($m_i > 1$) in jedem Punkte von der besonderen Wahl dieses Systems unabhängig ist.

Dabei haben wir die skalare Krümmung¹⁾ (auch erzwungene skalare Krümmung genannt²⁾) der m_i -Richtung mit κ_i bezeichnet. Im Folgenden

¹⁾ J. HAANTJES und W. WRONA, Ueber konformeuklidische und EINSTEINSche Räume gerader Dimension. Proc. Kon. Ned. Akad. v. Wetensch., Amsterdam, 42, 626—636 (1939).

²⁾ J. A. SCHOUTEN und D. J. STRUIK, Einführung in die neueren Methoden der Differentialgeometrie II, S. 133.