Tension (pression) tangentielle autour de l'ouverture

$$\varrho_1 = 2\,p\,\frac{a^2+b^2-r^2}{a\,b}.$$

(figure 9). Répartition des deux tensions principales le long de l'axe des Y

$$\varrho_1 = \frac{y\,(y^2-a^2+2\,b^2)}{(y^2-a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}}\,p \qquad \varrho_2 = \frac{y\,(y^2-a^2)}{(y^2-a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}}\,p.$$

Pour l'axe des Z on remplace y par z et change a et b.

Pour les bouts des axes principaux de l'ellipse on trouve pour $r=a$

$\varrho_1 = 2\,\frac{a}{b}\,p$ et pour $r=b$ $\varrho_1 = 2\,\frac{b}{a}\,p$.

Pour le cercle, pour $a=b=r$, on obtient les formules de LAMÉ, de la distribution des tensions autour du cylindre.

Avant de conclure ce paragraphe nous donnons en la figure 10 la distribution des tensions autour d'une cavité sphérique creusée dans le rocher. Il faut la comparer avec celle de figure 4 et on remarque que la

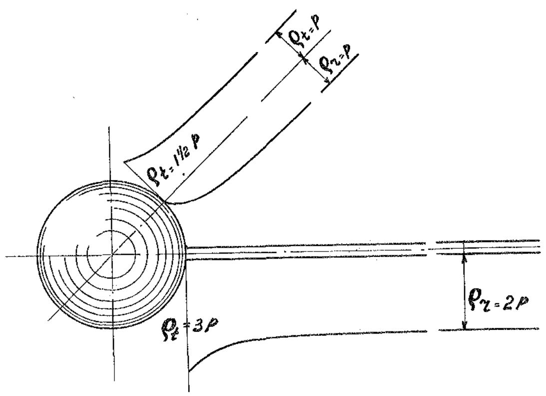

Fig. 10. Distribution des pressions autour d'une cavité sphérique et autour de la galerie d'entrée cylindrique.

perturbation de la pression homogène s'est moins accentuée. En effet l'élévation de la pression n'est que la moitié, $\varrho\,max. = \frac{3}{2}\,p$ au lieu de $\varrho\,max. = 2\,p$, et l'amortissement est plus rapide. Mais on ne saurait pas exécuter le creux sans pratiquer une galerie d'accès et si l'on n'arrondit pas la jonction, les tensions doublent au cercle de section de cylindre et sphère et deviennent $\varrho = 3\,p$.

Mathematics. — *Ueber affine Invarianten bei Kegelschnitten.* Von R. WEITZENBÖCK.

(Communicated at the meeting of January 27, 1940.)

Uebersicht. Eine ternäre quadratische Form und eine Linearform in Punktkoordinaten haben bei der speziellen affinen Gruppe fünf ganze rationale Invarianten, aus denen sich zwei absolute Invarianten bilden lassen. Wir geben für die letzteren eine geometrische Deutung bei der Figur, die aus einem Kegelschnitt und einer Geraden besteht und lösen im Anschlusse hieran einige naheliegende Fragen der Affingeometrie.

§ 1.

Es seien

$$f = \sum_{1,2,3} a_{ik}\,x_i\,x_k = (a'\,x)^2 \quad , \quad (v'\,x) = \sum_1^3 v'_i\,x_i \;.\;\;.\;\;.\;\;.\quad (1)$$

eine ternäre quadratische Form und eine lineare Form in homogenen Punktkoordinaten $x_1 : x_2 : x_3$. Die uneigentliche Gerade der affinen Ebene denken wir uns gegeben durch die Gleichung

$$(l'\,x) = \sum l'_i\,x_i = 0\,.\,x_1 + 0\,.\,x_2 + 1\,.\,x_3 = x_3 = 0, \;\;.\;\;.\;\;.\quad (2)$$

halten sie also durch den Buchstaben l' fest.

Man beweist dann leicht nach allgemeinen Methoden [1]), dass die zwei Formen (1) ein kleinstes volles System von ganz-rationalen affinen Invarianten besitzen, das aus folgenden fünf Bildungen besteht:

$$\left.\begin{array}{lll} D = \frac{1}{6}\,(a'\,b'\,c')^2 & & C = \frac{1}{2}\,(a'\,b'\,l')^2 \\ \Phi = \frac{1}{2}\,(a'\,b'\,v')^2 & M = \frac{1}{2}\,(a'\,b'\,v')\,(a'\,b'\,l') & U = (a'\,v'\,l')^2 \end{array}\right\} . \quad (3a)$$

Hier ist D die Diskriminante von f, $D=0$ gibt Entartung des Kegelschnittes $f=0$. $C=0$ gibt bei $D \neq 0$ die Parabeln. $\Phi = 0$ ist bei veränderlichen Linienkoordinaten v' die Gleichung von f in Linienkoordinaten. $M=0$ sagt aus, dass die Gerade v' durch den Mittelpunkt m von f geht. Schliesslich ist bei veränderlichem v' $U=0$ die Gleichung der beiden uneigentlichen oder unendlich-fernen Punkte von f.

1) Vgl. z.B. meine „Invariantentheorie", Groningen (1923), p. 223 ff.

Die nicht-symbolischen Ausdrücke für diese Komitanten lauten:

$$\left.\begin{array}{ll}
D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & C=a_{11}\,a_{22}-a_{12}^2 \\
\Phi=-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & v_1' \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & v_2' \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & v_3' \\ v_1' & v_2' & v_3' & 0 \end{vmatrix} & \begin{array}{l} M=v_1'\,(a_{12}\,a_{23}-a_{13}\,a_{22})+ \\ \qquad +\,v_2'\,(a_{13}\,a_{12}-a_{11}\,a_{23})+ \\ \qquad +\,v_3'\,(a_{11}\,a_{22}-a_{12}^2) \\ U=a_{11}\,v_2'^2-2a_{12}\,v_1'\,v_2'+a_{22}\,v_1'^2 \end{array}
\end{array}\right\}\quad (3b)$$

Wie man ebenfalls leicht nachweist, besteht zwischen diesen fünf Komitanten eine einzige Syzygie

$$C\,.\,\Phi=D\,.\,U+M^2\,.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (4)$$

Sie drückt geometrisch aus, dass f als Klassenkegelschnitt der durch $U=0$ und $M=0$ bestimmten Schaar angehört.

§ 2.

Auf Grund der Gleichung (4) können wir uns bei der Bestimmung von *absoluten* Invarianten auf nur vier der fünf Komitanten (3a) beschränken. Lassen wir D weg, so gibt der Ansatz

$$J=C^a\,\Phi^b\,M^c\,U^d,$$

da J vom Grade Null in den Koeffizienten a_{ik} und in den Linienkoordinaten v_i sein muss, für die Gradzahlen a, b, c und d die Gleichungen

$$2a+2b+2c+d=0 \quad , \quad 2b+c+2d=0,$$

woraus

$$b=-\tfrac{1}{2}c-d \quad \text{und} \quad a=-\tfrac{1}{2}c+\tfrac{1}{2}d,$$

also

$$J=\frac{C^{\frac{1}{2}d}}{C^{\frac{1}{2}c}\,\Phi^{\frac{1}{2}c+d}}\,M^c\,U^d=\left(\frac{M}{C^{\frac{1}{2}}\,\Phi^{\frac{1}{2}}}\right)^c\cdot\left(\frac{U\,C^{\frac{1}{2}}}{\Phi}\right)^d$$

folgt. Es sind also

$$\alpha=\frac{M^2}{C\,\Phi} \qquad \beta=\frac{C\,U^2}{\Phi^2}\,.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (5)$$

zwei rationale absolute Invarianten, durch die alle weiteren absoluten affinen Invarianten ausdrückbar werden.

Im reellen Falle und bei $\Phi<0$ wollen wir von zwei positiven absoluten

Invarianten R und S Gebrauch machen, die wir durch die Gleichungen definieren

$$R^2=-\frac{1}{\alpha\,\beta}=-\frac{\Phi^3}{M^2\,U^2} \quad , \quad S^2=-\frac{\alpha}{\beta}=-\frac{M^2\,\Phi}{C^2\,U^2}\;.\;.\;. \quad (6)$$

Es ist dann umgekehrt

$$\alpha=\begin{cases}-\dfrac{S}{R} & \text{bei } C>0 \\[2ex] +\dfrac{S}{R} & \text{bei } C<0\end{cases} \quad \text{und} \quad \beta=\begin{cases}+\dfrac{1}{RS} & \text{bei } C>0 \\[2ex] -\dfrac{1}{RS} & \text{bei } C<0\end{cases}\;.\;.\;. \quad (7)$$

und mit Hilfe von (4) erhalten wir die Formeln

$$\left.\begin{array}{ll}
\dfrac{C\Phi}{DU}=\dfrac{1}{1-\alpha}=\dfrac{R}{R+S}\ \text{bei}\ C>0\ , & =\dfrac{R}{R-S}\ \text{bei}\ C<0; \\[2ex]
\dfrac{M^2}{DU}=\dfrac{\alpha}{1-\alpha}=-\dfrac{S}{R+S}\ \text{bei}\ C>0\ , & =\dfrac{S}{R-S}\ \text{bei}\ C<0; \\[2ex]
\dfrac{M^2\,C\,\Phi}{D^2\,U^2}=\dfrac{\alpha}{(1-\alpha)^2}=-\dfrac{RS}{(R+S)^2}\ \text{bei}\ C>0\ , & =\dfrac{RS}{(R-S)^2}\ \text{bei}\ C<0; \\[2ex]
\dfrac{D^2}{C^3}=\dfrac{(1-\alpha)^2}{\beta}=\dfrac{S}{R}\,(R+S)^2\ \text{bei}\ C>0\ , & =\dfrac{S}{R}\,(R-S)^2\ \text{bei}\ C<0.
\end{array}\right\}.\ (8)$$

Die durch (6) definierten absoluten Invarianten R und S haben eine einfache geometrische Bedeutung. Bei den reellen Transformationen der speziellen affinen Gruppe (mit der Transformationsdeterminante $=1$) ist der Flächeninhalt eines durch die drei Punkte y, z und t bestimmten Dreieckes gegeben durch

$$F=\frac{1}{2}\,\frac{(y\,z\,t)}{(l'\,y)\,(l'\,z)\,(l'\,t)}\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (9)$$

Wir denken uns nun die Gerade v' durch ihre zwei Schnittpunkte y und z mit dem Kegelschnitte $f=0$ gegeben. Dann haben wir

$$v_k'=(y\,z)_{ij}=y_i\,z_j-y_j\,z_i\,,\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (10)$$

$$(a'\,y)^2=0,\quad (a'\,z)^2=0,\quad (a'\,y)\,(a'\,z)\neq 0\,.\;.\;.\;.\;. \quad (11)$$

Als Punkt t nehmen wir erstens in (9) den Pol

$$t_k=a_k\,(a\,v')=(a'\,b')_{ij}\,(a'\,b'\,v')\,.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (12)$$

der Geraden v'. Die Fläche F_1 des Dreieckes $y\,z\,t$ wird dann

$$F_1=\frac{1}{2}\,\frac{(y\,z\,a)\,(a\,v')}{(l'\,y)\,(l'\,z)\,(a'\,b'\,l')\,(a'\,b'\,v')}=\frac{1}{2}\,\frac{(y\,z\,a)\,(a\,v')}{2\,M\,(l'\,y)\,(l'\,z)}.$$

Nach (10) wird hier der Zähler

$$(y\,z\,a)\,(a\,v') = (a\,v')^2 = (a'\,b'\,v')^2 = 2\,\Phi\,. \quad \quad (13)$$

Weiters ist nach (11)

$$2\,\Phi = (a'\,b'\,v')^2 = [(a'\,y)\,(b'\,z) - (a'\,z)\,(b'\,y)]^2 = -2\,[(a'\,y)\,(a'\,z)]^2,$$

also

$$(a'\,y)\,(a'\,z) = \sqrt{-\Phi}\,. \quad \quad (14)$$

Ebenso hat man

$$U = (a'\,l'\,v')^2 = [(a'\,y)\,(l'\,z) - (a'\,z)\,(l'\,y)]^2 = -2\,(a'\,y)\,(a'\,z)\,(l'\,y)\,(l'\,z),$$

also nach (14):

$$(l'\,y)\,(l'\,z) = \frac{U\sqrt{-\Phi}}{2\,\Phi}\,. \quad \quad (15)$$

Demnach wird

$$F_1^2 = \frac{-\Phi^3}{M^2\,U^2} = R^2, \quad \quad (16)$$

wodurch die Bedeutung der Invariante R von (6) ermittelt ist.

Zweitens nehmen wir in (9) bei einem Mittelpunktskegelschnitt $t = m =$ Mittelpunkt, also

$$t_k = a_k\,(a\,l') = (a'\,b')_{ij}\,(a'\,b'\,l').$$

Mit diesem t findet man auf analoge Weise für die Fläche F_2 des Dreieckes mzy:

$$F_2 = \tfrac{1}{2}\,\frac{(a\,z\,y)\,(a\,l')}{(l'\,y)\,l'\,z)\,.\,2\,C}$$

also nach (6) und (15):

$$F_2^2 = -\frac{M^2\,\Phi}{C^2\,U^2} = S^2. \quad \quad (17)$$

R und S sind also im reellen Falle und bei $\Phi < 0$ die positiven Flächeninhalte der Dreiecke yzt und mzy.

§ 3.

Wir halten weiterhin daran fest, dass die Gerade $v' = (y\,z)$ durch die beiden Punkte y und z auf $f = 0$ gegeben sei. Die uneigentlichen Punkte von f, also die Schnittpunkte von f mit l' nennen wir U_1 und U_2. Mit dem

Mittelpunkte m verbunden geben sie die Asymptoten von f. Deren Schnittpunkte mit v' seien V_1 und V_2. $t = a(a\,v')$ sei wieder der Pol von v' und die Tangenten in y und z mögen die uneigentliche Gerade l' in den Punkten Y und Z schneiden.

Für das Produkt der beiden Tangenten in y und z findet man leicht die Gleichung

$$(a'\,x)^2\,.\,\Phi - D\,.\,(v'\,x)^2 = 0$$

und für das Produkt der Asymptoten

$$(\varphi'\,x)^2 = C\,.\,(a'\,x)^2 - D\,.\,(l'\,x)^2 = 0\,.$$

Setzt man hier für V_1 und V_2 $y + \mu z$, so ergibt sich für μ die Gleichung

$$(\varphi'\,y)^2 + 2\,\mu\,(\varphi'\,y)\,(\varphi'\,z) + \mu^2\,(\varphi'\,z)^2 = 0. \quad \quad (18)$$

Das Doppelverhältnis

$$\varrho = (y\,z\,V_1\,V_2) \quad \quad (19)$$

der vier Punkte y, z, V_1 und V_2 auf der Geraden v' wird dann $\varrho = \frac{\mu_1}{\mu_2}$.

Daher wird

$$\varrho + \frac{1}{\varrho} = \frac{\mu_1}{\mu_2} + \frac{\mu_2}{\mu_1} = \frac{(\mu_1 + \mu_2)^2}{\mu_1\,\mu_2} - 2$$

also nach (18)

$$\varrho + \frac{1}{\varrho} + 2 = \frac{4\,[(\varphi'\,y)\,(\varphi'\,z)]^2}{(\varphi'\,y)^2\,.\,(\varphi'\,z)^2}.$$

Dies gibt, da wegen (14) und (15)

$$\frac{(a'\,y)\,(a'\,z)}{(l'\,y)\,(l'\,z)} = \frac{2\,\Phi}{U} \quad \quad (20)$$

ist,

$$\varrho + \frac{1}{\varrho} - 2 = 16\,\frac{C\,\Phi}{D\,U}\left(\frac{C\,\Phi}{D\,U} - 1\right) = 16\,\frac{C\,\Phi}{D\,U}\,\frac{M^2}{D\,U} \quad \quad (21)$$

oder nach (8):

$$\varrho + \frac{1}{\varrho} - 2 = \frac{\alpha}{(1 - \alpha)^2} \quad \quad (22)$$

Hierdurch ist das Doppelverhältnis ϱ als irrationale absolute Invariante gegeben. In der rechten Seite von (21) haben wir Symmetrie bezgl. der Geraden v' und l'. ϱ ist daher auch gleich dem Doppelverhältnis der vier Punkte U_1, U_2, Y und Z auf der Geraden l'.

Vom Schnittpunkte der Geraden v' und l' aus lassen sich zwei Tangenten $v' + \lambda l'$ an f legen, wobei für λ die Gleichung gilt

$$\Phi + 2\lambda . M + \lambda^2 . C = 0.$$

Hieraus ergibt sich, so wie oben, für das Doppelverhältnis ϑ der vier Geraden v', l' und der beiden Tangenten

$$\vartheta + \frac{1}{\vartheta} + 2 = \frac{4 M^2}{C \Phi}$$

was man mit Hilfe von (4) und (8) auch so schreiben kann:

$$\vartheta + \frac{1}{\vartheta} + 2 = 4 a. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (23)$$

ϑ ist nichts anderes als das Teilverhältnis der drei Geraden: v' und die beiden zu v' parallelen Tangenten.

Wir berechnen schliesslich noch ein drittes Doppelverhältnis τ: das der vier Punkte y, z, U_1 und U_2 auf f. Es ist gegeben durch das Doppelverhältnis der vier Geraden: Tangente in y an f, Gerade v', die beiden Verbindungslinien von y mit U_1 und U_2. Macht man für die beiden letztgenannten den Ansatz

$$w' = a' (a' y) + \mu v',$$

dann muss der Punkt $(w' l')$ auf f liegen, d.h. $(a' w' l')^2 = 0$ sein. Dies gibt

$$(a' b' l') (a' c' l') (b' y) (c' y) + 2 \mu (a' b' l') (a' v' l') (b' y) + \mu^2 (a' v' l')^2 = 0.$$

Hier kann man den ersten und den zweiten Term umformen und erhält

$$D . (l' y)^2 + 2 \mu M . (l' y) - \mu^2 . U = 0.$$

Hieraus folgt wieder für $\tau = \frac{\mu_1}{\mu_2}$:

$$\tau + \frac{1}{\tau} + 2 = \frac{(\mu_1 + \mu_2)^2}{\mu_1 \mu_2} = \frac{-4 M^2}{D U},$$

also nach (8):

$$\tau + \frac{1}{\tau} + 2 = -\frac{4 a}{1 - a}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (24)$$

§ 4.

Wenn $f = 0$ eine reelle Ellipse ist und von den Geraden v' in zwei reellen Punkten y und z geschnitten wird, so zerschneidet v' die Ellipse in zwei Segmente P und Q. Wie drücken sich die Flächeninhalte dieser Segmente in den absoluten affinen Invarianten aus?

Wir denken uns auf einem der Bogen $y z$ der Ellipse einen veränderlichen Punkt P_λ durch die Gerade

$$w' = v' + \lambda a' (a' y)$$

ausgeschnitten. Für $\lambda = 0$ ist w' mit v', für $\lambda = \infty$ ist w' mit der Tangente in y identisch.

Der Punkt $(u' w')$ muss dann auf f liegen, also

$$(a' w' u')^2 = (a' v' u')^2 + 2 \lambda (a' v' u') (a' b' u') (b' y) + \\ + \lambda^2 (a' b' u') (a' c' u') (b' y) (c' y) = 0. \qquad (25)$$

Hier wird das von λ freie Glied nach (11) und (14):

$$(a' v' u')^2 = [(a' y) (u' z) - (a' z) (u' y)]^2 = \\ = -2 (u' y) (u' z) (a' y) (a' z) = -2 \sqrt{-\Phi} (u' y) (u' z).$$

Der Koeffizient von 2λ wird, wenn wir $(a' v' u') (b' y)$ umformen:

$$-\tfrac{1}{2} (a' b' v') (u' y) (a' b' u') = -\tfrac{1}{2} (u' y) . (a u') (a v').$$

Der dritte Term in (25) wird auf analoge Weise

$$-\tfrac{1}{2} (a' b' c') (a' b' u') (c' y) . (u' y) = -D . (u' y).$$

Nach Weglassung des Faktors $(u' y)$ erhalten wir also für P_λ:

$$(u' P_\lambda) = \lambda^2 . D (u' y) + \lambda (a u') (a v') + (u' z) . 2 \sqrt{-\Phi}. \quad . \quad . \qquad (26)$$

Hieraus finden wir für die Fläche dP des Dreieckes y, P_λ, $P_{\lambda + d\lambda}$:

$$dP = \frac{1}{2} \frac{(y P_\lambda P_{\lambda + d\lambda})}{(l' y) (l' P_\lambda)^2} = \frac{-2 \Phi \sqrt{-\Phi}}{(l' y)} . \frac{d \lambda}{[\lambda^2 . D (l' y) + 2 M \lambda + 2 (l' z) \sqrt{-\Phi}]^2};$$

somit wird

$$P = \frac{-2 \Phi \sqrt{-\Phi}}{(l' y)} . \int_0^\infty \frac{d \lambda}{[\lambda^2 D (l' y) + 2 M \lambda + 2 (l' z) \sqrt{-\Phi}]^2}. \qquad (27)$$

Den Integrand gestalten wir wie folgt um:

$$P = \frac{2 \Phi \sqrt{-\Phi}}{(l' y)} . \frac{1}{D^2 (l' y)^2} . \int_0^\infty \frac{d \lambda}{\left[\left(\lambda + \frac{M}{D (l' y)}\right)^2 - \frac{M^2 - 2 D \sqrt{-\Phi} (l' y) (l' z)}{D^2 (l' y)^2}\right]^2}$$

also, da wegen (15) und (4)

$$M^2 - 2 D \sqrt{-\Phi} (l' y) (l' z) = M^2 + D U = C \Phi$$

ist

$$P = \frac{-2 \Phi \sqrt{-\Phi}}{D^2 (l' y)^3} . \int_0^\infty \frac{d \lambda}{\left[\left(\lambda + \frac{M}{D (l' y)}\right)^2 - \frac{C \Phi}{D (l' y)^2}\right]^2} \quad . \quad . \qquad (28)$$

Nehmen wir zuerst den Fall einer reellen Ellipse $C > 0$, die von v' in zwei reellen Punkten y und z geschnitten wird, wo also $\Phi < 0$ ist. Dann ist $C\Phi < 0$ und wir erhalten im Nenner des Integranden den Ausdruck

$$\left(\lambda + \frac{M}{D(l'y)}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{-C\Phi}}{D(l'y)}\right)^2 = -\frac{C\Phi}{D^2(l'y)^2}\left[1 + \left(\frac{\lambda D(l'y) + M}{\sqrt{-C\Phi}}\right)^2\right].$$

Setzen wir also

$$\mu = \frac{\lambda D(l'y) + M}{\sqrt{-C\Phi}} \quad . \quad d\lambda = \frac{\sqrt{-C\Phi}}{D(l'y)} \cdot d\mu \quad , \quad \mu_0 = \frac{M}{\sqrt{-C\Phi}}, \qquad (29)$$

so entsteht:

$$P = \frac{-2\Phi\sqrt{-\Phi}}{D^2(l'y)^3} \cdot \frac{D^4(l'y)^4}{C^2\Phi^2} \cdot \frac{\sqrt{-C\Phi}}{D(l'y)} \cdot \int_{\mu_0}^{\infty} \frac{d\mu}{(\mu^2+1)^2} = \pm \frac{2D}{C^{\frac{3}{2}}} \int_{\mu_0}^{\infty} \frac{d\mu}{(\mu^2+1)^2}.$$

Da weiters

$$\int_{\mu_0}^{\infty} \frac{d\mu}{(\mu^2+1)^2} = \left[\frac{\mu}{2(\mu^2+1)} + \frac{1}{2} \operatorname{arctang} \mu\right]_{\mu_0}^{\infty} =$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{\mu_0}{2(\mu_0^2+1)} - \frac{1}{2} \operatorname{arctang} \mu_0 = \frac{\pi}{4} + \frac{M\sqrt{-C\Phi}}{2DU} - \frac{1}{2} \operatorname{arctang} \frac{M}{\sqrt{-C\Phi}}$$

ist, wird schliesslich, mit $\sqrt{-C\Phi} > 0$:

$$P = \pm \frac{D}{C^{\frac{3}{2}}} \left\{ \frac{\pi}{2} + \frac{M\sqrt{-C\Phi}}{DU} - \operatorname{arctang} \frac{M}{\sqrt{-C\Phi}} \right\}. \quad . \quad . \quad (30)$$

Für das zweite Segment Q, das die Gerade v' bei der Ellipse f bestimmt, erhält man auf dieselbe Art durch Integration zwischen den Grenzen $-\infty$ und 0:

$$Q = \pm \frac{D}{C^{\frac{3}{2}}} \left\{ \frac{\pi}{2} - \frac{M\sqrt{-C\Phi}}{DU} + \operatorname{arctang} \frac{M}{\sqrt{-C\Phi}} \right\} \quad . \quad . \quad (31)$$

Die Summe $P + Q$ ergibt dann $\pm \frac{\pi D}{C^{3/2}}$ als Flächeninhalt der ganzen Ellipse.

Drückt man in (30) die absoluten Invarianten durch R und S aus, so wird

$$P = \pm (R+S) \cdot \sqrt{\frac{S}{R}} \left\{ \frac{\pi}{2} + \frac{\sqrt{RS}}{R+S} - \operatorname{arctang} \sqrt{\frac{R}{S}} \right\} \quad . \quad . \quad (32)$$

wobei alle Wurzeln positif genommen sind.

(30) und (31) gelten auch noch für den Fall $\Phi = 0$, dann ist $P = 0$ und Q gleich der Fläche der ganzen Ellipse.

Bei einer reellen Parabel $C = 0$, die von der Geraden v' in reellen Punkten geschnitten wird, ist wieder $\Phi < 0$. Hier führt (28) auf das Integral

$$\int_0^{\infty} \frac{d\lambda}{\left(\lambda + \frac{M}{D(l'y)}\right)^4}$$

und schliesslich zur Formel

$$P = \pm \frac{2}{3} \frac{D\Phi\sqrt{-\Phi}}{M^3} = \pm \frac{2}{3} R \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (33)$$

Bei einer reellen *Hyperbel* mit $C < 0$ schneidet v' von einem Aste ein reelles Segment ab für $\Phi < 0$, $DU < 0$. In diesem Falle führt (28) auf ein Integral

$$\int \frac{d\mu}{(\mu^2-1)^2} = \frac{1}{4} \log \frac{\mu+1}{\mu-1} - \frac{1}{2} \frac{\mu}{\mu^2-1}$$

und man erhält als Endformel für das Segment P:

$$P = \pm \frac{D}{(-C)^{\frac{3}{2}}} \left\{ \frac{1}{2} \log \frac{(M + \sqrt{C\Phi})^2}{-DU} + \frac{M\sqrt{C\Phi}}{DU} \right\} . \quad . \quad . \quad (34)$$

oder nach (8), ausgedrückt in den Invarianten R und S:

$$\pm P = S - (S-R) \cdot \sqrt{\frac{S}{R}} \cdot \log \frac{(\sqrt{R} + \sqrt{S})^2}{S-R} \quad . \quad . \quad . \quad (35)$$