

Mathematics. — *Zur Affingeometrie der F_2 im R_3 .* Von R. WEITZENBÖCK.

(Communicated at the meeting of January 27, 1940.)

Uebersicht. Eine lineare und eine quadratische Form in vier Veränderlichen besitzen fünf ganz-rationale affine Invarianten, zwischen denen eine algebraische Abhängigkeit besteht. Aus diesen fünf Invarianten lassen sich für die speziell-affine Gruppe zwei absolute Invarianten bilden. Wir geben für diese letzteren eine einfache geometrische Deutung bei der entsprechenden Raumfigur, bestehend aus einer Ebene und einer Fläche zweiter Ordnung. Ist diese ein reelles Ellipsoid und schneidet die Ebene dasselbe, so entsteht eine Kalotte, deren Volumen wir durch die oben genannten absoluten Invarianten ausdrücken. Die entsprechenden Formeln geben wir auch für das zweischalige Hyperboloid und für das elliptische Paraboloid.

§ 1.

Es seien

$$(v' x) = v'_1 x_1 + v'_2 x_2 + v'_3 x_3 + v'_4 x_4 \text{ und } F = (a' x)^2 = \sum a_{ik} x_i x_k \quad (1)$$

die beiden quaternären Formen.

Die uneigentliche oder unendlichferne Ebene bezeichnen wir mit l' und setzen für den Zusammenhang mit gewöhnlichen Cartesischen Koordinaten x, y, z mit den homogenen Koordinaten x_i :

$$x = \frac{x_1}{x_4}, y = \frac{x_2}{x_4}, z = \frac{x_3}{x_4}$$

$$(l' x) = 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 1 \cdot x_4 = x_4.$$

Man beweist dann leicht, dass die beiden Formen (1) bei der allgemeinen affinen Gruppe nur die folgenden Invarianten besitzen:

$$\left. \begin{aligned} D &= \frac{1}{2^4} (a' b' c' d')^2, & C &= \frac{1}{6} (a' b' c' l')^2 = \frac{1}{6} (l' a)^2 \\ \Phi &= \frac{1}{6} (a' b' c' v')^2 = \frac{1}{6} (av')^2, & M &= \frac{1}{6} (a' b' c' v') (a' b' c' l') = \frac{1}{6} (av') (al') \\ U &= \frac{1}{2} (a' b' v' l')^2. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

In nicht-symbolischer Schreibweise haben wir:

$$D = \text{Det. } |a_{ik}|, \quad C = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\Phi = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & v'_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & v'_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & v'_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & v'_4 \\ v'_1 & v'_2 & v'_3 & v'_4 & 0 \end{vmatrix}, \quad M = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & v'_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & v'_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & v'_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & v'_4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$U = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & v'_1 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & v'_2 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & v'_3 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & v'_4 & 1 \\ v'_1 & v'_2 & v'_3 & v'_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & v'_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & v'_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & v'_3 \\ v'_1 & v'_2 & v'_3 & 0 \end{vmatrix}$$

D ist die Diskriminante von F . $C=0$ gibt die Paraboloid. Für veränderliche Ebenenkoordinaten v' gibt $\Phi=0$ die Gleichung von F in Ebenenkoordinaten, $M=0$ die Gleichung des Mittelpunktes und $U=0$ die Gleichung des auf F gelegenen uneigentlichen Kegelschnittes.

Zwischen den fünf Invarianten (2) besteht eine einzige Syzygie

$$C \cdot \Phi = M^2 + D \cdot U. \quad \dots \quad (3)$$

Wie bereits in (2) angedeutet, gebrauchen wir für die dreireihigen Determinanten $(a' b' c')_{ijk}$ die Symbolreihe a und zwar in der Weise, dass

$$(u' a' b' c') = (u' a) = u'_1 a_1 + u'_2 a_2 + u'_3 a_3 + u'_4 a_4$$

wird. Es ist also

$$a_1 = +(a' b' c')_{234}, \quad a_2 = -(a' b' c')_{134}, \quad a_3 = +(a' b' c')_{124}, \quad a_4 = -(a' b' c')_{123}.$$

Allgemein setzen wir, wenn die Ebene v' durch drei Punkte y, z und t gegeben ist

$$(v' x) = (y z t x) = - \sum \pm x_1 y_2 z_3 t_4,$$

d.h. wir setzen:

$$v'_1 = -(y z t)_{234}, \quad v'_2 = +(y z t)_{134}, \quad v'_3 = -(y z t)_{124}, \quad v'_4 = +(y z t)_{123}.$$

§ 2.

Wir suchen absolute Invarianten aus den Komitanten (2) aufzubauen. Wegen (3) kann man eine der fünf Komitanten, z.B. D weglassen und hat dann den Ansatz

$$J = C^a \Phi^b M^c U^d$$

mit den Gleichungen

$$3a + 3b + 3c + 2d = 0, \quad 2b + c + 2d = 0,$$

woraus

$$c = -\frac{3}{2}a - \frac{1}{2}b \quad \text{und} \quad d = \frac{3}{4}a - \frac{3}{4}b$$

folgen. Also wird

$$J = \frac{C^a \Phi^b U^{\frac{3}{2}a}}{M^{\frac{3}{2}a + \frac{1}{2}b} U^{\frac{3}{2}b}} = \left(\frac{C U^{\frac{3}{2}}}{M^{\frac{3}{2}}}\right)^a \cdot \left(\frac{\Phi}{M^{\frac{1}{2}} U^{\frac{1}{2}}}\right)^b.$$

Somit sind z.B.

$$\alpha = \frac{C^4 U^3}{M^6}; \quad \beta = \frac{\Phi^4}{M^2 U^3} \dots \dots \dots (4)$$

zwei rationale, von einander unabhängige absolute Invarianten und jedes J lässt sich algebraisch durch sie ausdrücken. Wegen

$$\alpha\beta = \left(\frac{C\Phi}{M^2}\right)^4$$

kann man auch

$$\gamma = \frac{C\Phi}{M^2} \dots \dots \dots (5)$$

an Stelle von α nehmen. Es ist dann zufolge (3)

$$\frac{1}{\gamma} = \frac{M^2}{C\Phi} = \frac{C\Phi - DU}{C\Phi} = 1 - \frac{DU}{C\Phi} = 1 - \frac{1}{\delta},$$

sodass also auch

$$\delta = \frac{C\Phi}{DU} \dots \dots \dots (6)$$

an die Stelle von α oder γ treten kann.

§ 3.

Wir denken uns die Ebene v' durch drei Punkte y, z und t gegeben. v' schneidet die Fläche F nach einem Kegelschnitt f . Der Punkt t liege nicht auf diesem Kegelschnitte f und die Polare von t bezüglich f schneide f in den beiden Punkten y und z . Dann gilt also

$$\left. \begin{aligned} (a'y)^2 = 0, & \quad (a'z)^2 = 0 \\ (a'y)(a't) = 0, & \quad (a'z)(a't) = 0, & \quad (a'y)(a'z) = R \neq 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots (7)$$

Der Pol von v' bezüglich F sei der Punkt s . Es ist also

$$(u's) = (u'a)(av') = (u'a'b'c')(v'a'b'c')$$

und

$$(v's) = (v'a'b'c')(v'a'b'c') = 6\Phi \dots \dots \dots (8)$$

Ueberdies ist

$$(a's)(a'y) = (a's)(a'z) = (a's)(a't) = 0 \dots \dots \dots (9)$$

Aus diesen Festsetzungen folgen Gleichungen, die wir im Folgenden benötigen.

Drücken wir in $6\Phi = (a'b'c'v')^2$ die v'_i durch $(yzt)_{jkl}$ aus, so wird

$$6\Phi = \begin{vmatrix} (a'y) & (a'z) & (a't) \\ (b'y) & (b'z) & (b't) \\ (c'y) & (c'z) & (c't) \end{vmatrix}^2 = 6(a'y)(b'z)(c't) \cdot \begin{vmatrix} (a'y) & (a'z) & (a't) \\ (b'y) & (b'z) & (b't) \\ (c'y) & (c'z) & (c't) \end{vmatrix}$$

also, nach Entwicklung der Determinante, wegen (7):

$$(a't)^2 = -\frac{\Phi}{R^2} \dots \dots \dots (10)$$

Mit Hilfe der Gleichung

$$(d'a)(u'a)(d'x) = (a'b'c'd')(a'b'c'u')(d'x) = 6D \cdot (u'x)$$

erhält man für $(a's)^2$:

$$(a's)^2 = (a'a)(av')(a'b)(bv') = (a'c'd'e')(v'c'd'e')(a'b)(bv') = 6D \cdot (bv')^2,$$

also:

$$(a's)^2 = 36D\Phi \dots \dots \dots (11)$$

Schliesslich setzen wir auch in $2U = (a'b'l'v')^2$ für die v'_i die dreireihigen Determinanten $(yzt)_{jkl}$ und erhalten

$$2U = \begin{vmatrix} (a'y) & (a'z) & (a't) \\ (b'y) & (b'z) & (b't) \\ (l'y) & (l'z) & (l't) \end{vmatrix}^2.$$

Entwickeln wir dies, so ergibt sich wegen (7) und (10):

$$U = \frac{2\Phi}{R} (l'y)(l'z) - R^2 (l't)^2 \dots \dots \dots (12)$$

§ 4.

Wir berechnen jetzt den Inhalt V des Kegels mit der Basis f in v' und der Spitze $s = \text{Pol der Ebene } v'$. Hierzu wollen wir annehmen, dass F ein reelles Ellipsoid oder ein reelles zweischaliges Hyperboloid ist, das von v' in einer reellen Ellipse geschnitten wird. Für diesen Fall haben wir

$$D < 0, C > 0, \phi < 0, U > 0. \dots \dots \dots (13)$$

Einen Punkt P der Ebene v' halten wir dann durch zwei Parameter ϱ und σ fest

$$P(\varrho, \sigma) = P = \varrho y + \sigma z + t. \dots \dots \dots (14)$$

P liegt auf F , also auf dem Kegelschnitte f , für

$$2\varrho\sigma(a'y)(a'z) + (a't)^2 = 0,$$

also nach (10) für

$$\varrho\sigma = \frac{\phi}{2R^3}, \dots \dots \dots (15)$$

d.h. P auf f hat die Gestalt

$$P = P(\varrho) = \varrho \cdot y + \frac{\phi}{2R^3\varrho} \cdot z + t. \dots \dots \dots (15a)$$

Wir nehmen dann als Volumsdifferential dV die Pyramide mit Spitze s und mit dem Dreieck

$$y, P(\varrho), P' = P(\varrho + d\varrho)$$

als Basis. Es ist dann

$$dV = \frac{1}{6} \frac{(yPP's)}{(l'y)(l's)(l'P)^2},$$

also wird wegen

$$(yPP's) = (yzt's) \cdot \frac{\phi}{2R^3\varrho^2} \cdot d\varrho = \frac{3\phi^2}{R^3} \frac{d\varrho}{\varrho^2} \text{ und } (l's) = 6M:$$

$$V = \frac{1}{12} \frac{\phi^2}{MR^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\varrho}{\left[\varrho^2(l'y) + \varrho(l't) + \frac{\phi(l'z)}{2R^3} \right]^2}$$

Der Nenner des Integranden wird hier nach (12)

$$\begin{aligned} (l'y)^2 \left[\left(\varrho + \frac{(l't)}{2(l'y)} \right)^2 + \frac{\phi(l'z)}{2R^3(l'y)} - \frac{(l't)^2}{4(l'y)^2} \right]^2 = \\ = (l'y)^2 \left[\left(\varrho + \frac{(l't)}{2(l'y)} \right)^2 + \frac{U}{4R^2(l'y)^2} \right]^2 = \frac{U^2}{16R^4(l'y)^2} \left[\left(\frac{\varrho + \frac{(l't)}{2(l'y)}}{\sqrt{U}} \right)^2 + 1 \right]^2 \end{aligned}$$

Setzen wir also

$$\tau = \frac{2R(l'y)\varrho + R(l't)}{\sqrt{U}}, \quad d\varrho = \frac{\sqrt{U}}{2R(l'y)} d\tau,$$

so geht V über in

$$V = \frac{2}{3} \frac{\phi^2}{MU^{3/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\tau}{(\tau^2 + 1)^2}.$$

Da hier das Integral der Wert $\frac{1}{2}\pi$ hat, wird also

$$V = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{\phi^2}{MU^{3/2}} \dots \dots \dots (16)$$

Nehmen wir statt des Punktes s den Mittelpunkt $m = a(a')$ der Fläche F , so erhalten wir auf dieselbe Art für den Inhalt W des Kegels über f mit der Spitze m :

$$W = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{\phi M}{CU^{3/2}} \dots \dots \dots (17)$$

Durch die absoluten Invarianten des § 2 ausgedrückt haben wir nach (4) und (5):

$$V = \frac{\pi}{3} \sqrt{\beta} \quad , \quad W = \frac{V}{\gamma} = \frac{\sqrt{\beta}}{\gamma} \dots \dots \dots (18)$$

§ 5.

Wir machen bei einem reellen Ellipsoid F wieder die Annahme (13) und berechnen den Inhalt der beiden Teile T_1 und T_2 , in die die Ebene v' das Ellipsoid zerschneidet.

Zu diesem Zwecke gehen wir wieder wie im § 3 aus von dem Tetraeder y, z, t, s und suchen eine Parameterdarstellung der Punkte P auf der Fläche F . Sind $X_1 : X_2 : X_3 : X_4$ die Koordinaten von P bezüglich des genannten Tetraeders, also

$$P = X_1 y + X_2 z + X_3 t + X_4 s,$$

so legen wir eine durch den Punkt y gehende Gerade fest durch die beiden Ebenen

$$X_2 = \lambda X_4 \quad \text{und} \quad X_3 = \mu X_4 \dots \dots \dots (19)$$

Wenn P auf F liegen soll, wird nach (7), (9), (10) und (11):

$$2X_1 X_2 R - X_3^2 \frac{\phi}{R^2} + X_4^2 \cdot 36D\phi = 0.$$

Aus dieser Gleichung und aus (19) lassen sich die Verhältnisse der X_i für den Punkt P berechnen und wir erhalten

$$P = y \cdot \frac{\mu^2 \Phi - 36 D \Phi R^2}{2 R^3} + z \cdot \lambda^2 + t \cdot \lambda \mu + s \cdot \lambda = P(\lambda, \mu) \quad (20)$$

Wir setzen dann

$$P' = P(\lambda + d\lambda, \mu) \quad , \quad P'' = P(\lambda, \mu + d\mu) \quad , \quad P''' = P(\lambda + d\lambda, \mu + d\mu)$$

und erhalten als Elementarvolumen dT die Summe der Pyramiden mit der Spitze y und den Dreiecken $PP'P''$ bzw. $P'P'''P''$ als Basis:

$$dT = \frac{1}{6} \cdot \frac{(y P P' P'')}{(l' y)(l' P)^3} + \frac{1}{6} \cdot \frac{(y P' P''' P'')}{(l' y)(l' P)^3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{(y P P' P'')}{(l' y)(l' P)^3}$$

Ausgeführt gibt dies nach (20)

$$dT = 2 \Phi \cdot \frac{\lambda^3 d\lambda d\mu}{(l' y)(l' P)^3} \dots \dots \dots (21)$$

Für die beiden Teile T_1 und T_2 erhalten wir also

$$\left. \begin{aligned} T_1 &= 2 \frac{\Phi}{(l' y)} \int_0^{\infty} \lambda^3 d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\mu}{(l' P)^3} \\ T_2 &= 2 \frac{\Phi}{(l' y)} \int_0^{\infty} \lambda^3 d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\mu}{(l' P)^3} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (22)$$

Bei einem Hyperboloid gibt T_1 die Kalotte, die von einer der Schalen abgeschnitten wird. Analog bei einem elliptischen Paraboloid.

Wir berechnen zuerst das innere Integral in T_1 . Nach (20) ist

$$J_\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\mu}{\left[\mu^2 \frac{\Phi}{2 R^3} (l' y) + \mu \lambda (l' t) + \left(\lambda^2 (l' z) + \lambda (l' s) - \frac{18 D \Phi (l' y)}{R} \right) \right]^3} = \frac{8 R^9}{\Phi^3 (l' y)^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\mu}{N^3}$$

wobei wegen $(l' s) = 6M$ der Nenner

$$N = \mu^2 + \mu \cdot \frac{2 \lambda R^3 (l' t)}{\Phi (l' y)} + \frac{2 R^3}{\Phi (l' y)} \cdot \left\{ \lambda^2 (l' z) + \lambda \cdot 6M - \frac{18 D \Phi (l' y)}{R} \right\} = \left(\mu + \frac{\lambda R^3 (l' t)}{\Phi (l' y)} \right)^2 + \lambda^2 \left(\frac{2 R^3}{\Phi (l' y)} (l' z) - \frac{R^6 (l' t)^2}{\Phi^2 (l' y)^2} \right) + \lambda \cdot \frac{12 M R^3}{\Phi (l' y)} - 36 R^2 D,$$

also, nach (12):

$$N = \left(\mu + \frac{\lambda R^3 (l' t)}{\Phi (l' y)} \right)^2 + \lambda^2 \cdot \frac{R^4 U}{\Phi^2 (l' y)^2} + \lambda \cdot \frac{12 M R^3}{\Phi (l' y)} - 36 R^2 D = \left(\mu + \frac{\lambda R^3 (l' t)}{\Phi (l' y)} \right)^2 + \Delta(\lambda).$$

Hier wird die Diskriminante der in λ quadratischen Form $\Delta(\lambda)$ nach (3) gleich

$$\frac{36 M^2 R^6}{\Phi^2 (l' y)^2} + \frac{36 R^6 D U}{\Phi^2 (l' y)^2} = \frac{36 R^6}{\Phi^2 (l' y)^2} (M^2 + D U) = \frac{36 C R^6}{\Phi (l' y)^2} < 0.$$

Also ist, da $\Delta(0) > 0$, die Form $\Delta(\lambda)$ positiv-definit. Somit können wir setzen

$$N = \Delta(\lambda) \left\{ \left(\mu + \frac{\lambda R^3 (l' t)}{\Phi (l' y)} \right)^2 + 1 \right\} = \Delta(\lambda) \cdot (v^2 + 1)$$

mit

$$v = \frac{1}{\sqrt{\Delta(\lambda)}} \left(\mu + \frac{\lambda R^3 (l' t)}{\Phi (l' y)} \right) \quad , \quad d\mu = \sqrt{\Delta(\lambda)} \cdot dv.$$

Das Integral J_μ wird also

$$J_\mu = \frac{8 R^9}{\Phi^3 (l' y)^3 [\Delta(\lambda)]^{3/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dv}{(v^2 + 1)^3} = \frac{3 \pi R^9}{\Phi^3 (l' y)^3 [\Delta(\lambda)]^{3/2}}.$$

Damit wird

$$T_1 = \frac{6 \pi R^9}{\Phi^2 (l' y)^4} \int_0^{\infty} \frac{\lambda^3 d\lambda}{\left[\lambda^2 \frac{R^4 U}{\Phi^2 (l' y)^2} + \lambda \frac{12 M R^3}{\Phi (l' y)} - 36 R^2 D \right]^{3/2}} \quad (23)$$

Hier wird der Klammerausdruck des Nenners

$$\frac{R^4 U}{\Phi^2 (l' y)^2} \left\{ \left(\lambda + \frac{6 M \Phi (l' y)}{R U} \right)^2 - 36 \frac{\Phi^2 (l' y)^2}{R^2 U^2} (M^2 + D U) \right\},$$

also nach (3) und wegen $C \Phi < 0$:

$$= \frac{R^4 U}{\Phi^2 (l' y)^2} \left\{ \left(\lambda + 6 \frac{M \Phi (l' y)}{R U} \right)^2 + 36 \frac{\Phi^2 (l' y)^2 (-C \Phi)}{R^2 U^2} \right\} = 36 \frac{R^2 (-C \Phi)}{U} \left\{ \left(\frac{\lambda \cdot R U + 6 M \Phi (l' y)}{6 \Phi (l' y) \sqrt{-C \Phi}} \right)^2 + 1 \right\}$$

Setzen wir also

$$\tau = \frac{\lambda \cdot RU + 6M\phi(l'y)}{6\phi(l'y)\sqrt{-C\phi}}, \quad \lambda = \frac{6\phi(l'y)}{RU} (\tau \cdot \sqrt{-C\phi} - M)$$

$$d\lambda = \frac{6\phi(l'y)\sqrt{-C\phi}}{RU} d\tau, \quad \tau_0 = \frac{M}{\sqrt{-C\phi}},$$

so geht (23) über in

$$T_1 = \frac{\pi}{C^2 U^{3/2}} \int_{\tau_0}^{\infty} \frac{(\tau \cdot \sqrt{-C\phi} - M)^3}{(\tau^2 + 1)^{3/2}} d\tau,$$

d.h.

$$T_1 = \frac{\pi}{C^2 U^{3/2}} \left\{ -C\phi \sqrt{-C\phi} \int_{\tau_0}^{\infty} \frac{\tau^3 d\tau}{(\tau^2 + 1)^{3/2}} + 3MC\phi \int_{\tau_0}^{\infty} \frac{\tau^2 d\tau}{(\tau^2 + 1)^{3/2}} + \right. \\ \left. + 3M^2 \sqrt{-C\phi} \int_{\tau_0}^{\infty} \frac{\tau d\tau}{(\tau^2 + 1)^{3/2}} - M^3 \int_{\tau_0}^{\infty} \frac{d\tau}{(\tau^2 + 1)^{3/2}} \right\} \quad (24)$$

Nennen wir die hier auftretenden Integrale von links nach rechts J_3, J_2, J_1 und J_0 , dann ist für

$$\tau = \text{tang } \varphi, \quad \text{tang } \varphi_0 = \frac{M}{\sqrt{-C\phi}},$$

also

$$\cos \varphi_0 = \sqrt{\frac{C\phi}{DU}}, \quad \sin \varphi_0 = \frac{M}{\sqrt{-DU}},$$

$$J_3 = \int_{\varphi_0}^{\pi/2} \sin^3 \varphi d\varphi = \left[-\frac{1}{3} \cos \varphi \sin^2 \varphi - \frac{2}{3} \cos \varphi \right]_{\varphi_0}^{\pi/2} = \\ = -\frac{1}{3} \frac{M^2}{DU} \sqrt{\frac{C\phi}{DU}} + \frac{2}{3} \sqrt{\frac{C\phi}{DU}}$$

$$J_2 = \int_{\varphi_0}^{\pi/2} \sin^2 \varphi \cos \varphi d\varphi = \left[\frac{1}{3} \sin^3 \varphi \right]_{\varphi_0}^{\pi/2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \frac{M^3}{DU \sqrt{-DU}}$$

$$J_1 = \int_{\varphi_0}^{\pi/2} \sin \varphi \cos^2 \varphi d\varphi = \left[-\frac{1}{3} \cos^3 \varphi \right]_{\varphi_0}^{\pi/2} = +\frac{1}{3} \frac{C\phi}{DU} \sqrt{\frac{C\phi}{DU}}$$

$$J_0 = \int_{\varphi_0}^{\pi/2} \cos^3 \varphi d\varphi = \left[\frac{1}{3} \sin \varphi \cos^2 \varphi + \frac{2}{3} \sin \varphi \right]_{\varphi_0}^{\pi/2} = \\ = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \frac{C\phi M}{DU \sqrt{-DU}} - \frac{2}{3} \frac{M}{\sqrt{-DU}}$$

Setzt man dies in (24) ein, so kommt schliesslich:

$$T_1 = \pi \left[\frac{2}{3} \sqrt{-\frac{D^3}{C^4}} + \frac{M\phi}{CU^{3/2}} - \frac{2}{3} \frac{M^3}{C^2 U^{3/2}} \right] \quad \dots \quad (25)$$

und analog

$$T_2 = \pi \left[\frac{2}{3} \sqrt{-\frac{D^3}{C^4}} - \frac{M\phi}{CU^{3/2}} + \frac{2}{3} \frac{M^3}{C^2 U^{3/2}} \right] \quad \dots \quad (26)$$

Es ist also

$$T_1 + T_2 = \frac{4}{3} \pi \sqrt{-\frac{D^3}{C^4}}$$

das Volumen des Ellipsoides.

Die in (25) stehenden absoluten Invarianten können durch die im § 2 genannten wie folgt ausgedrückt werden:

$$\left. \begin{aligned} \frac{D^3}{C^4} &= \frac{\beta\gamma}{\delta^3} = \frac{\gamma^2(\gamma-1)^3}{a} \\ \frac{M\phi}{CU^{3/2}} &= \frac{\sqrt{\beta}}{\gamma} = \frac{3}{\pi} W \\ \frac{M^3}{C^2 U^{3/2}} &= \frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{\beta}}{\gamma^2} \end{aligned} \right\} \quad (\text{Vgl. Gleichung (17)}).$$

Die Formeln (25) und (26) gelten auch noch für $\phi=0$, d.h. für den Fall, dass die Ebene v' das Ellipsoid berührt. Es ist dann $M^2 = -DU$ und T_1 wird Null, während T_2 das Volumen des ganzen Ellipsoides gibt.

§ 6.

Bei einem reellen elliptischen Paraboloid, das von der Ebene v' nach einem reellen Kegelschnitte f geschnitten wird, haben wir analog zu (13)

$$D < 0, \quad C = 0, \quad \phi < 0, \quad U > 0. \quad \dots \quad (27)$$

Für das Volumen V des Tangentenkegels über f erhalten wir genau so wie im § 4 die Formel

$$V = \frac{\pi}{3} \frac{\phi^2}{MU^{3/2}}$$

Und für die durch v' vom Paraboloid abgeschnittene Kalotte ergibt sich so wie bei (22)

$$T_1 = \frac{8R^3}{\phi^2(l'y)^4} \int_0^\infty \lambda^3 d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\mu}{\left[\left(\mu + \frac{\lambda R^3(l't)}{\phi(l'y)} \right)^2 + \Delta(\lambda) \right]^{3/2}} \dots (28)$$

wobei jetzt die Diskriminante von $\Delta(\lambda)$ wegen $C=0$ Null ist. Für alle λ ist $\Delta(\lambda) \geq 0$. Ist $\Delta(\lambda) > 0$, so verläuft die Rechnung, die zu (23) führt, genau so wie beim Ellipsoid und wegen

$$M^2 = -DU$$

ist jetzt

$$\Delta(\lambda) = \left(\lambda \frac{R^2 M}{\phi(l'y)\sqrt{-D}} + 6R\sqrt{-D} \right)^2$$

und (28) geht über in

$$T_1 = \frac{6\pi R^9}{\phi^2(l'y)^4} \int_0^\infty \frac{\lambda^3 d\lambda}{\left[\lambda \frac{R^2 M}{\phi(l'y)\sqrt{-D}} + 6R\sqrt{-D} \right]^5} \dots (29)$$

Beim Ausnahmewert

$$\lambda_0 = \frac{6\phi(l'y)D}{MR},$$

für welchen $\Delta(\lambda_0) = 0$ wird, geht das innere Integral von (28) über in

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\mu}{\left(\mu + \lambda_0 \frac{R^3(l't)}{\phi(l'y)} \right)^6} = 0.$$

Es gilt also (29) für alle λ und wir haben

$$T_1 = \frac{6\pi\phi^3(l'y)}{RU^{3/2}} \int_{\tau_0}^\infty \frac{1}{\tau^5} \left(\tau - \frac{6M\phi(l'y)}{RU} \right)^3 d\tau$$

mit $\tau_0 = \frac{6M\phi(l'y)}{RU}$.

Damit wird schliesslich

$$T_1 = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\phi^2}{MU^{3/2}} = \frac{3}{4} V \dots (30)$$

der Inhalt der Kalotte beim elliptischen Paraboloid.

Mathematics. — *Beiträge zur Theorie der Systeme PFAFFscher Gleichungen. II. Beweis des Haupttheorems für $q = n - 5$.* Von J. A. SCHOUTEN und W. VAN DER KULK.

(Communicated at the meeting of January 27, 1940.)

Vorbereitungen für den Beweis für ungerades $n - q$.

Es gilt ein System von q unabhängigen Vektoren von der Form

$$\mu \partial_\lambda^1 p + \dots + \mu \partial_\lambda^u p; 2u - 1 = p = n - q \dots (1)$$

zu finden, die den p Gleichungen

$$\mu \partial_\lambda^1 p + \dots + \mu \partial_\lambda^u p = 0; b = 1, \dots, p \dots (2)$$

oder auch

$$\mu X_b^1 p + \dots + \mu X_b^u p = 0; b = 1, \dots, p \dots (3)$$

genügen. Elimination von $\mu \dots \mu$ ergibt

$$\left\| \begin{matrix} X_1^1 p & \dots & X_1^u p \\ \vdots & & \vdots \\ X_p^1 p & \dots & X_p^u p \end{matrix} \right\| = \text{Matrix vom Range} < u \dots (4)$$

Durch lineare Transformation der v^b in v^b , ($b = 1, \dots, p$) lässt sich immer erreichen, dass

$$X_b = \partial_b + v^{p+1} \partial_{p+1} + \dots + v^n \partial_n; b = 1, \dots, p \dots (5)$$

wird. Wir bemerken, dass jetzt alle Klammerausdrücke X_{ab} keine Differentiationen nach x^1, \dots, x^p mehr enthalten. Statt des schwer zu behandelnden Systems (4) betrachten wir das System

$$\left. \begin{matrix} X_1^1 p = \sigma X_2^1 p + \dots + \sigma X_u^1 p \\ \vdots \\ X_1^u p = \sigma X_2^u p + \dots + \sigma X_u^u p \end{matrix} \right\} \dots (6a)$$

$$\theta_t = (X_t^1 p)(X_2^2 p) \dots (X_u^u p) = 0; t = u + 1, \dots, p \dots (6b)$$