Und für die durch v' vom Paraboloid abgeschnittene Kalotte ergibt sich so wie bei (22)

$$T_1 = \frac{8R^3}{\Phi^2(l'y)^4} \int_0^{\infty} \lambda^3 d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\mu}{\left[\left(\mu + \frac{\lambda R^3(l't)}{\Phi(l'y)}\right)^2 + \Delta(\lambda)\right]^3} \quad . \; . \; . \quad (28)$$

wobei jetzt die Diskriminante von $\Delta(\lambda)$ wegen $C = 0$ Null ist. Für alle λ ist $\Delta(\lambda) \geqq 0$. Ist $\Delta(\lambda) > 0$, so verläuft die Rechnung, die zu (23) führt, genau so wie beim Ellipsoid und wegen

$$M^2 = -DU$$

ist jetzt

$$\Delta(\lambda) = \left(\lambda \frac{R^2 M}{\Phi(l'y)\sqrt{-D}} + 6R\sqrt{-D}\right)^2$$

und (28) geht über in

$$T_1 = \frac{6\pi R^9}{\Phi^2(l'y)^4} \int_0^{\infty} \frac{\lambda^3 d\lambda}{\left[\lambda \frac{R^2 M}{\Phi(l'y)\sqrt{-D}} + 6R\sqrt{-D}\right]^5} \quad . \; . \; . \quad (29)$$

Beim Ausnahmewert

$$\lambda_0 = \frac{6\Phi(l'y)D}{MR},$$

für welchen $\Delta(\lambda_0) = 0$ wird, geht das innere Integral von (28) über in

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\mu}{\left(\mu + \lambda_0 \frac{R^3(l't)}{\Phi(l'y)}\right)^6} = 0.$$

Es gilt also (29) für alle λ und wir haben

$$T_1 = \frac{6\pi\Phi^3(l'y)}{RU^{5/2}} \int_{\tau_0}^{\infty} \frac{1}{\tau^5}\left(\tau - \frac{6M\Phi(l'y)}{RU}\right)^3 d\tau$$

mit $\tau_0 = \dfrac{6M\Phi(l'y)}{RU}$.

Damit wird schliesslich

$$T_1 = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\Phi^2}{MU^{3/2}} = \frac{3}{4} V \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (30)$$

der Inhalt der Kalotte beim elliptischen Paraboloid.

Mathematics. — *Beiträge zur Theorie der Systeme* PFAFF*scher Gleichungen. II. Beweis des Haupttheorems für* $q = n - 5$. Von J. A. SCHOUTEN und W. VAN DER KULK.

(Communicated at the meeting of January 27, 1940.)

Vorbereitungen für den Beweis für ungerades $n - q$.

Es gilt ein System von q unabhängigen Vektoren von der Form

$$\underset{1}{\mu}\, \partial_\lambda \overset{1}{p} + \ldots + \underset{\mathfrak{u}}{\mu}\, \partial_\lambda \overset{\mathfrak{u}}{p}\,;\; 2u - 1 = p = n - q \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

zu finden, die den p Gleichungen

$$\underset{1}{\mu}\, \underset{b}{v^\lambda}\, \partial_\lambda \overset{1}{p} + \ldots + \underset{\mathfrak{u}}{\mu}\, \underset{b}{v^\lambda}\, \partial_\lambda \overset{\mathfrak{u}}{p} = 0\,;\; b = 1, \ldots, \mathfrak{p} \quad . \; . \; . \; . \quad (2)$$

oder auch

$$\underset{1}{\mu}\, X_b \overset{1}{p} + \ldots + \underset{\mathfrak{u}}{\mu}\, X_b \overset{\mathfrak{u}}{p} = 0\,;\; b = 1, \ldots, \mathfrak{p} \quad . \; . \; . \; . \quad (3)$$

genügen. Elimination von $\underset{1}{\mu} \ldots \underset{\mathfrak{u}}{\mu}$ ergibt

$$\left\| \begin{matrix} X_1 \overset{1}{p} & \ldots\ldots & X_1 \overset{\mathfrak{u}}{p} \\ \vdots & & \vdots \\ X_\mathfrak{p} \overset{1}{p} & \ldots\ldots & X_\mathfrak{p} \overset{\mathfrak{u}}{p} \end{matrix} \right\| = \text{Matrix vom Range} < u \quad . \; . \; . \quad (4)$$

Durch lineare Transformation der $\underset{b}{v^\varkappa}$ in $\underset{\mathfrak{b}}{v^\varkappa}$, $(\mathfrak{b} = 1, \ldots, p)$ lässt sich immer erreichen, dass

$$X_\mathfrak{b} = \partial_\mathfrak{b} + \underset{\mathfrak{b}}{v^{p+1}}\, \partial_{p+1} + \ldots\ldots + \underset{\mathfrak{b}}{v^n}\, \partial_n\,;\; \mathfrak{b} = 1, \ldots, p \quad . \; . \; . \quad (5)$$

wird. Wir bemerken, dass jetzt alle Klammerausdrücke $X_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}$ keine Differentionen nach $x^1, \ldots, x^p$ mehr enthalten. Statt des schwer zu behandlenden Systems (4) betrachten wir das System

$$\left.\begin{aligned} X_1 \overset{1}{p} &= \overset{2}{\sigma} X_2 \overset{1}{p} + \ldots\ldots + \overset{u}{\sigma} X_u \overset{1}{p} \\ &\vdots \\ X_1 \overset{\mathfrak{u}}{p} &= \overset{2}{\sigma} X_2 \overset{\mathfrak{u}}{p} + \ldots\ldots + \overset{u}{\sigma} X_u \overset{\mathfrak{u}}{p} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6a)$$

$$\theta_\mathfrak{k} = (X_\mathfrak{k} \overset{[1}{p})(X_2 \overset{2}{p}) \ldots\ldots (X_u \overset{\mathfrak{u}]}{p}) = 0\,;\; \mathfrak{k} = u + 1, \ldots, p \quad . \; . \quad (6b)$$

das jedoch nur dann mit (4) gleichwertig ist, wenn die Bedingung

$$(X_2 \overset{[i_2}{p}) \ldots (X_u \overset{i_u]}{p}) \neq 0 ;\; i_2 \ldots i_u = 1, 2, \ldots, u \tag{6c}$$

erfüllt ist, d.h. wenn nicht *alle* Determinanten, die entstehen können durch einsetzen von $u-1$ der Zahlen $1,\ldots,u$ für $i_2 \ldots i_u$ verschwinden.

Sind $\overset{1}{p},\ldots,\overset{u}{p}$ Lösungen von (6a), so gilt für $\theta_\mathfrak{k}$

$$X_1 \theta_\mathfrak{k} = X_2 (\overset{2}{\sigma} \theta_\mathfrak{k}) + \ldots + X_u (\overset{u}{\sigma} \theta_\mathfrak{k}) + \zeta_\mathfrak{k} \tag{7}$$

wo

$$\zeta_\mathfrak{k} = \Psi_{1,\mathfrak{k}} - \overset{2}{\sigma} \Psi_{2,\mathfrak{k}} - \ldots - \overset{u}{\sigma} \Psi_{u,\mathfrak{k}} ;\; \mathfrak{k} = u+1, \ldots, p \tag{8a}$$

und

$$\left.\begin{aligned} \Psi_{\mathfrak{i}\mathfrak{k}} = {} & (X_{\mathfrak{i}\mathfrak{k}} \overset{[1}{p}) (X_2 \overset{2}{p}) \ldots (X_u \overset{u]}{p}) + (X_\mathfrak{k} \overset{[1}{p}) (X_{\mathfrak{i}2} \overset{2}{p}) \ldots (X_u \overset{u]}{p}) + \\ & + \ldots + (X_\mathfrak{k} \overset{[1}{p}) (X_2 \overset{2}{p}) \ldots (X_{u-1} \overset{u-1}{p}) (X_{\mathfrak{i}u} \overset{u]}{p}) ;\; \mathfrak{i} = 1, \ldots, u \end{aligned}\right\} \tag{8b}$$

ist. Sollen nun $\overset{1}{p},\ldots,\overset{u}{p}$ auch Lösungen von (6*b*) sein, so müssen sie die Ausdrücke $\theta_\mathfrak{k}$, $(\mathfrak{k} = u+1, \ldots, p)$ Null machen, und es müssen also jedenfalls die $\zeta_\mathfrak{k}$ verschwinden. Die $p-u = u-1$ Gleichungen $\zeta_\mathfrak{k} = 0$ können also dazu benutzt werden die σ aus den Gleichungen (6a) fortzuschaffen, vorausgesetzt, dass die $(u-1)$-reihige Determinante

$$\begin{vmatrix} \Psi_{2,u+1} & \ldots & \Psi_{u,u+1} \\ \vdots & & \vdots \\ \Psi_{2,p} & \ldots & \Psi_{u,p} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{9}$$

ist. Es entstehen dann aus (6a) Gleichungen von der Form

$$\left.\begin{aligned} \partial_1 \overset{1}{p} &= \overset{2}{\sigma} X_2 \overset{1}{p} + \ldots + \overset{u}{\sigma} X_u \overset{1}{p} - \underset{1}{v^{p+1}} \partial_{p+1} \overset{1}{p} - \ldots - \underset{1}{v^n} \partial_n \overset{1}{p} \\ &\;\vdots \\ \partial_1 \overset{u}{p} &= \overset{2}{\sigma} X_2 \overset{u}{p} + \ldots + \overset{u}{\sigma} X_u \overset{u}{p} - \underset{1}{v^{p+1}} \partial_{p+1} \overset{u}{p} - \ldots - \underset{1}{v^n} \partial_n \overset{u}{p} \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

wo $\overset{2}{\sigma} \ldots \overset{u}{\sigma}$ jetzt bekannte Funktionen der $x^1, \ldots, x^n$ und der $\partial_\beta \overset{i}{p}$, $(i = 1, \ldots, u;\; \beta = 2, \ldots n)$ sind, mit der Nebenbedingung (9). Die rechten Seiten von (10) enthalten keine Differentiationen nach x^1 und alle Differentiationen sind von der ersten Ordnung. Sind die Koeffizienten also regulär in der Umgebung von $x^\varkappa = \underset{0}{x}^\varkappa$, so gibt es (vorläufig

abgesehen von den Nebenbedingungen (6c) und (9)) nach CAUCHY—KOWALEWSKI ein einziges Lösungssystem von (10), das für $x^1 = \underset{0}{x}$ übergeht in die beliebigen Funktionen der $x^2, \ldots, x^n$

$$\left.\begin{aligned} \overset{1}{p} (\underset{0}{x^1}, x^2, \ldots, x^n) &= \underset{0}{\overset{1}{p}} (x^2, \ldots, x^n) \\ &\;\vdots \\ \overset{u}{p} (\underset{0}{x^1}, x^2, \ldots, x^n) &= \underset{0}{\overset{u}{p}} (x^2, \ldots, x^n) \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Wir müssen nun aber diese Funktionen so wählen, dass die Nebenbedingungen (6c) und (9) für $x^1 = \underset{0}{x}^1$ erfüllt sind, also

$$(X_2 \underset{0}{\overset{[i_2}{p}}) \ldots (X_u \underset{0}{\overset{i_u]}{p}}) \neq 0;\; i_2, \ldots, i_u = 1, \ldots, u \tag{12}$$

$$\begin{vmatrix} (\Psi_{2,u+1})_0 & \ldots & (\Psi_{u,u+1})_0 \\ \vdots & & \vdots \\ (\Psi_{2,p})_0 & \ldots & (\Psi_{u,p})_0 \end{vmatrix} \neq 0;\; (\,)_0 = \text{Wert von } (\,) \text{ für } x^1 = \underset{0}{x}^1. \tag{13}$$

Wäre (13) nicht erfüllt, so liessen sich $\overset{2}{\sigma}, \ldots, \overset{u}{\sigma}$ schon für $x^1 = \underset{0}{x}^1$ nicht aus $\zeta_\mathfrak{k} = 0$ lösen. Ausserdem soll das Lösungssystem von (10) so gewählt werden, dass es auch die $\theta_\mathfrak{k}$ Null macht, und wir verlangen also, dass die $\theta_\mathfrak{k}$ jedenfalls schon für $x^1 = \underset{0}{x}^1$ verschwinden:

$$(X_{[\mathfrak{k}} \underset{0}{\overset{1}{p}})_0 (X_2 \underset{0}{\overset{2}{p}})_0 \ldots (X_{u]} \underset{0}{\overset{u}{p}})_0 = 0;\; \mathfrak{k} = u+1, \ldots, p \tag{14}$$

Sind (12), (13) und (14) erfüllt, so existiert nach CAUCHY—KOWALEWSKI ein einziges Lösungssystem von (10), das auch (6c), (9) und (11) erfüllt. Es ist zu beachten, dass weder in (6c) noch in (9) Differentiationen nach x^1 vorkommen, sodass tatsächlich (12) und (13) Bedingungen für die Funktionen $\underset{0}{\overset{1}{p}}, \ldots, \underset{0}{\overset{u}{p}}$ darstellen, die $\overset{1}{p}, \ldots, \overset{u}{p}$ nicht mehr enthalten.

Nehmen wir jetzt einen Augenblick an, es gelänge $\underset{0}{\overset{1}{p}}, \ldots, \underset{0}{\overset{u}{p}}$ den Bedingungen (12), (13) und (14) entsprechend zu wählen, so würden für die aus $\underset{0}{\overset{1}{p}}, \ldots, \underset{0}{\overset{u}{p}}$ hervorgehenden Lösungen $\overset{1}{p}, \ldots, \overset{u}{p}$ die Ausdrücke $\theta_\mathfrak{k}$ den Gleichungen

$$X_1 \theta_\mathfrak{k} = X_2 (\overset{2}{\sigma} \theta_\mathfrak{k}) + \ldots + X_u (\overset{u}{\sigma} \theta_\mathfrak{k}) \tag{15a}$$

oder ausgeschrieben

$$\partial_1 \theta_{\mathfrak{t}} = X_2 (\overset{2}{\sigma} \theta_{\mathfrak{t}}) + \ldots + X_u (\overset{u}{\sigma} \theta_{\mathfrak{t}}) - \underset{1}{v}^{p+1} \partial_{p+1} \theta_{\mathfrak{t}} - \ldots - \underset{1}{v}^{n} \partial_n \theta_{\mathfrak{t}} \quad (15b)$$

genügen, in welchen Gleichungen $\overset{2}{\sigma}, \ldots, \overset{u}{\sigma}$ jetzt, nach Bildung des Lösungssystems $\overset{1}{p}, \ldots, \overset{u}{p}$, bekannte Funktionen von $x^1, \ldots, x^n$ wären. Nun genügen aber die $\theta_{\mathfrak{t}}$ infolge (14) jedenfalls den Gleichungen

$$\theta_{\mathfrak{t}} (\underset{0}{x}^1, x^2, \ldots, x^n) = 0. \quad \ldots \ldots \quad (16)$$

Da es nun aber einerseits nach CAUCHY—KOWALEWSKI nur ein einziges System von Lösungen von (15*b*) gibt, die für $x^1 = \underset{0}{x}^1$ Null werden, anderseits aber $\theta_{\mathfrak{t}} = 0$ offenbar ein solches Lösungssystem ist, so ist dieses System auch das einzige, und daraus folgt, dass die konstruierte Lösung $\overset{1}{p}, \ldots, \overset{u}{p}$ von (6*a*) auch (6*b*) befriedigt.

Es bleibt also jetzt nur noch zu zeigen, dass es tatsächlich Funktionensysteme $\underset{0}{\overset{1}{p}}, \ldots, \underset{0}{\overset{u}{p}}$ von $x^2, \ldots, x^n$ gibt, die gleichzeitig (12), (13) und (14) befriedigen und die Anzahl der möglichen unabhängigen Funktionensysteme zu bestimmen. Wir führen dies hier aus für $q = n - 5$.

Beweis für $q = n - 5$.

Für $q = n - 5$ ist $u = 3$ und es gehen (12), (13) und (14) über in

$$\left\| \begin{matrix} X_2 \underset{0}{\overset{1}{p}} & X_2 \underset{0}{\overset{2}{p}} & X_2 \underset{0}{\overset{3}{p}} \\ X_3 \underset{0}{\overset{1}{p}} & X_3 \underset{0}{\overset{2}{p}} & X_3 \underset{0}{\overset{3}{p}} \end{matrix} \right\| \neq 0 \quad \ldots \ldots \quad (17)$$

$$\left| \begin{matrix} \left\{ \begin{matrix} (X_{24} \underset{0}{\overset{[1}{p}}) (X_2 \underset{0}{\overset{2}{p}}) (X_3 \underset{0}{\overset{3]}{p}}) + \\ + (X_4 \underset{0}{\overset{[1}{p}}) (X_2 \underset{0}{\overset{2}{p}}) (X_{23} \underset{0}{\overset{3]}{p}}) \end{matrix} \right\}_0 & \left\{ \begin{matrix} (X_{34} \underset{0}{\overset{[1}{p}}) (X_2 \underset{0}{\overset{2}{p}}) (X_3 \underset{0}{\overset{3]}{p}}) + \\ + (X_4 \underset{0}{\overset{[1}{p}}) (X_{32} \underset{0}{\overset{2}{p}}) (X_3 \underset{0}{\overset{3]}{p}}) \end{matrix} \right\}_0 \\ \left\{ \begin{matrix} (X_{25} \underset{0}{\overset{[1}{p}}) (X_2 \underset{0}{\overset{2}{p}}) (X_3 \underset{0}{\overset{3]}{p}}) + \\ + (X_5 \underset{0}{\overset{[1}{p}}) (X_2 \underset{0}{\overset{2}{p}}) (X_{23} \underset{0}{\overset{3]}{p}}) \end{matrix} \right\}_0 & \left\{ \begin{matrix} (X_{35} \underset{0}{\overset{[1}{p}}) (X_2 \underset{0}{\overset{2}{p}}) (X_3 \underset{0}{\overset{3]}{p}}) + \\ + (X_5 \underset{0}{\overset{[1}{p}}) (X_{32} \underset{0}{\overset{2}{p}}) (X_3 \underset{0}{\overset{3]}{p}}) \end{matrix} \right\}_0 \end{matrix} \right| \neq 0 \quad (18)$$

und

$$\left. \begin{matrix} (X_4 \underset{0}{\overset{[1}{p}})_0 \, (X_2 \underset{0}{\overset{2}{p}})_0 \, (X_3 \underset{0}{\overset{3]}{p}})_0 = 0 \\ (X_5 \underset{0}{\overset{[1}{p}})_0 \, (X_2 \underset{0}{\overset{2}{p}})_0 \, (X_3 \underset{0}{\overset{3]}{p}})_0 = 0 \end{matrix} \right\} \quad \ldots \ldots \quad (19)$$

Nach dem für $q = n - 4$ bewiesenen Satz[1]) gibt es nun Funktionen $\underset{0}{\overset{1}{p}}, \underset{0}{\overset{2}{p}}, \underset{0}{\overset{3}{p}}$ die den Gleichungen (19) genügen, so dass $\partial_\beta \underset{0}{\overset{1}{p}} = \overset{1}{P}_\beta$, $\partial_\beta \underset{0}{\overset{2}{p}} = \overset{2}{P}_\beta$, $\partial_\beta \underset{0}{\overset{3}{p}} = \overset{3}{P}_\beta$, $(\beta = 2, \ldots, n)$ in $x^\varkappa = \underset{0}{x}^\varkappa$, wo $\overset{1}{P}_\beta, \overset{2}{P}_\beta, \overset{3}{P}_\beta$ Vektoren sind, die folgenden Bedingungen gemäss gewählt sind (vgl. I, 58—61) (wir formulieren die Bedingungen hier für den einfachen Trivektor $P_{\alpha\beta\gamma} = \overset{1}{P}_{[\alpha} \overset{2}{P}_\beta \overset{3}{P}_{\gamma]}$)

$$P_{\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c}} = 0\,; \; P_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}} = \underset{\mathfrak{a}}{v}^\alpha \underset{\mathfrak{b}}{v}^\beta \underset{\mathfrak{c}}{v}^\gamma P_{\alpha\beta\gamma} \qquad \text{(vgl. I, 58)} \quad . \quad (20)$$

$$\underset{2}{v}^{[\gamma} \underset{3}{v}^{\delta]} P_{\gamma\delta\varepsilon} \neq 0 \qquad \text{(vgl. I, 59)} \quad . \quad (21)$$

$$\left. \begin{matrix} P_{2,3,45} + P_{3,4,25} + P_{4,2,35} + P_{2,5,34} + P_{3,5,42} + \\ + P_{4,5,23} = 0\,; \; P_{\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c}\mathfrak{d}} = \underset{\mathfrak{a}}{v}^\alpha \underset{\mathfrak{b}}{v}^\beta \underset{\mathfrak{c}\mathfrak{d}}{v}^\gamma P_{\alpha\beta\gamma} \quad \text{(vgl. I, 60)} \end{matrix} \right\} \quad . \quad (22)$$

$$\left\| \begin{matrix} \underset{2}{v}^\alpha \overset{1}{P}_\alpha & \underset{2}{v}^\alpha \overset{2}{P}_\alpha & \underset{2}{v}^\alpha \overset{3}{P}_\alpha \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \underset{5}{v}^\alpha \overset{1}{P}_\alpha & \underset{5}{v}^\alpha \overset{2}{P}_\alpha & \underset{5}{v}^\alpha \overset{3}{P}_\alpha \\ \underset{23}{v}^\alpha \overset{1}{P}_\alpha & \underset{23}{v}^\alpha \overset{2}{P}_\alpha & \underset{23}{v}^\alpha \overset{3}{P}_\alpha \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \underset{45}{v}^\alpha \overset{1}{P}_\alpha & \underset{45}{v}^\alpha \overset{2}{P}_\alpha & \underset{45}{v}^\alpha \overset{3}{P}_\alpha \end{matrix} \right\| = \text{Matrix vom Range 3 (vgl. I, 61)} \quad . \quad (23)$$

Es ist also nur noch zu untersuchen ob $P_{\alpha\beta\gamma}$ so gewählt werden kann, dass ausserdem noch

$$\left| \begin{matrix} P_{2,3,24} + P_{4,2,23} & P_{2,3,34} + P_{3,4,32} \\ P_{2,3,25} + P_{5,2,23} & P_{2,3,35} + P_{3,5,32} \end{matrix} \right| \neq 0 \quad . \; . \; . \quad (24)$$

ist. Denn dann gilt für $\underset{0}{\overset{1}{p}}, \underset{0}{\overset{2}{p}}, \underset{0}{\overset{3}{p}}$ die Gleichung (18). Schreiben wir

$$P_{\alpha\beta\gamma} = 3\, Q_{[\alpha} P_{\beta\gamma]}, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (25)$$

---

[1]) J. A. SCHOUTEN und W. VAN DER KULK, Beiträge zur Theorie der Systeme PFAFFscher Gleichungen I, Proc. Kon. Ned. Akad. v. Wetensch., Amsterdam, **43**, 18 (1940), hier zitiert als I.

wo $P_{\beta\gamma}$ ein einfacher Bivektor ist, und wählen wir

$$\left.\begin{aligned} &Q_2 = Q_3 = Q_4 = Q_5 = 0,\ Q_{23} = 1;\ P_{2,3} = 1; \\ &\qquad Q_{\mathfrak{d}} = \underset{\mathfrak{d}}{v}^{\alpha} Q_{\alpha},\ Q_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} = \underset{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}{v}^{\alpha} Q_{\alpha};\ P_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} = \underset{\mathfrak{a}}{v}^{\alpha} \underset{\mathfrak{b}}{v}^{\beta} P_{\alpha\beta} \end{aligned}\right\} . \quad (26)$$

so ist $P_{2,3,23} = 1$ und (20), (21) und (23) sind erfüllt. (22) geht über in

$$P_{2,3}\, Q_{45} + P_{3,4}\, Q_{25} + P_{4,2}\, Q_{35} + P_{2,5}\, Q_{34} + P_{3,5}\, Q_{42} + P_{4,5}\, Q_{23} = 0 . \quad (27)$$

und (24) in

$$\left.\begin{aligned} &(P_{2,3}\, Q_{24} + P_{4,2}\, Q_{23})\,(P_{2,3}\, Q_{35} + P_{3,5}\, Q_{32}) - \\ &\qquad - (P_{2,3}\, Q_{25} + P_{5,2}\, Q_{23})\,(P_{2,3}\, Q_{34} + P_{3,4}\, Q_{32}) \neq 0 \end{aligned}\right\} . \quad (28)$$

welche Ungleichung auf Grund von (27) und unter Berücksichtigung des Umstandes, dass $P_{\beta\gamma}$ ein einfacher Bivektor ist, übergeht in

$$Q_{[24}\, Q_{35]} \neq 0 \, . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$

Die Bedingungen (26) und (29) können immer erfüllt werden, auch wenn zwischen den $\underset{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}{v}^{\alpha}$ lineare Beziehungen bestehen sollten, es sei denn dass

$$\underset{[24}{v}^{\alpha}\, \underset{35]}{v}^{\beta} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30)$$

wäre. In dem Falle gibt es keinen Vektor Q_{β} der (26) und (29) genügt. Im anderen Falle gibt es aber stets unendlich viele solcher Vektoren, darunter sicher $n-5$ linear unabhängige.

Der Gleichung (27) kann nach Wahl von Q_{β} immer genügt werden durch geeignete Wahl der $P_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$, $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \neq 2,3$ oder $3,2$. Gilt (30) nur für $x^1 = \underset{0}{x}^1$ aber nicht für andere Werte von x^1, so kann man die Schwierigkeit durch andere Wahl von $\underset{0}{x}^1$ beheben. Da man nun ausserdem die $X_1, \ldots, X_5$ beliebig numerieren darf, folgt, dass der Beweis nur dann stockt wenn

$$\underset{[\mathfrak{a}\mathfrak{b}}{v}^{\varkappa}\, \underset{\mathfrak{c}\mathfrak{d}]}{v}^{\lambda} = 0;\quad \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d} = 1, 2, 3, 4, 5 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31)$$

ist. Nun ist diese Bedingung noch der speziellen Wahl der $X_{\mathfrak{b}}$ angepasst und infolgedessen noch nicht invariant. Um die invariante Bedingung zu erhalten verwenden wir eine andere Schreibweise, die sich enger an die Theorie der anholonomen Koordinatensysteme anschliesst und sich auch für weitere Untersuchungen als nützlich erweisen wird. Bekanntlich lässt sich ein anholonomes Bezugssystem in einer X_n mit den holonomen Koordinaten $x^{\varkappa}$ festlegen durch die intermediären Bestimmungszahlen A_{λ}^{h}, $(h = 1 \ldots n;$ $\lambda = 1 \ldots n)$ des Einheitsaffinors $A_{\lambda}^{\varkappa}$, die den Uebergang $v^h = A_{\varkappa}^{h} v^{\varkappa}$ zwischen den zwei Arten von Bestimmungszahlen ermöglichen. Ist in

jedem Punkte eine p-Richtung und eine q-Richtung gegeben, die keine Richtung gemeinschaftlich haben, so kann man die anholonomen Massvektoren so legen, dass $\underset{1}{e}^{\varkappa}, \ldots, \underset{p}{e}^{\varkappa}$ gerade die p-Richtung und $\underset{p+1}{e}^{\varkappa}, \ldots, \underset{n}{e}^{\varkappa}$ gerade die q-Richtung aufspannen. Der Einheitsaffinor lässt sich dann folgendermassen zerlegen:

$$A_{\lambda}^{\varkappa} = B_{\lambda}^{\varkappa} + C_{\lambda}^{\varkappa} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (32)$$

so dass

$$\left.\begin{aligned} B_{b}^{\varkappa} &= \overset{a}{e}_{b}\, \underset{a}{e}^{\varkappa}\ ;\ B_{\lambda}^{a} = \underset{b}{e}^{a}\, \overset{b}{e}_{\lambda} \\ C_{y}^{\varkappa} &= \overset{x}{e}_{y}\, \underset{x}{e}^{\varkappa}\ ;\ C_{\lambda}^{x} = \underset{y}{e}^{x}\, \overset{y}{e}_{\lambda} \end{aligned}\right\} ;\ \begin{aligned} &a, b = 1, \ldots, \mathrm{p} \\ &x, y = \mathrm{p}+1, \ldots, \mathrm{n} \end{aligned} \quad . \quad . \quad . \quad (33)$$

ist und diese beiden Zerlegungsstücke erzeugen die Komponenten der Grössen in der p- bzw. q-Richtung. Ist *nur* die p-Richtung gegeben so fallen B_{λ}^{a} und $C_{y}^{\varkappa}$ fort und es bleiben nur $B_{b}^{\varkappa}$ und C_{λ}^{x}. Die p Vektoren $B_{(b)}^{\varkappa}$ spannen die p-Richtung auf und die q Vektoren $C_{\lambda}^{(x)}$ enthalten dieselbe [2]. Dies ist der Fall, den wir hier betrachten und es ist $B_{(b)}^{\varkappa} = \underset{b}{v}^{\varkappa}$ und $C_{\lambda}^{(x)} = \overset{x}{w}_{\lambda}$.

Da

$$B_{b}^{\mu}\, C_{\mu}^{x} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (34)$$

folgt für unsere spezielle Wahl der $v^{\varkappa}$ dass

$$C_{\varkappa}^{\mathfrak{x}}\, \underset{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}{v}^{\varkappa} = 2\, C_{\varkappa}^{\mathfrak{x}}\, \underset{[\mathfrak{a}}{v}^{\mu}\, \partial_{|\mu|}\, \underset{\mathfrak{b}]}{v}^{\varkappa} = 2\, C_{\varkappa}^{\mathfrak{x}}\, B_{[(\mathfrak{a})}^{\mu}\, \partial_{|\mu|}\, B_{(\mathfrak{b})]}^{\varkappa} = -\, 2\, B_{[(\mathfrak{a})}^{\mu}\, B_{(\mathfrak{b})]}^{\varkappa}\, \partial_{\mu}\, C_{\varkappa}^{\mathfrak{x}} \quad . \quad (35)$$

dieselbe Anzahl unabhängiger Bestimmungszahlen (nämlich q) hat als $\underset{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}{v}^{\varkappa}$ und dass sich also (31) auch schreiben lässt

$$B_{[abcd]}^{\varkappa\lambda\mu\nu}\, (\partial_{\varkappa}\, C_{\lambda}^{x})\, (\partial_{\mu}\, C_{\nu}^{y}) = 0;\ a, b, c, d = 1, \ldots, 5, \quad . \quad . \quad . \quad (36)$$

welche Gleichung wir direkt für allgemeine Wahl der $B_{a}^{\varkappa}$ und C_{λ}^{x} formuliert haben (lateinische Indizes), da sie ja die invariante Form hat. Da nun aber $B_{ab}^{x\lambda}\, \partial_{[\varkappa}\, C_{\lambda]}^{x}$ nichts anderes ist als $\partial_{[\varkappa}\, C_{\lambda]}^{x}\ mod.\ C_{\lambda}^{\mathrm{p}+1}, \ldots, C_{\lambda}^{\mathrm{n}}$, folgt, dass die erhaltene Bedingung zum Ausdruck bringt, dass der Rang 2ϱ des Systems (nach ENGEL) gleich 2 ist. Es ist also nur noch der Fall zu erörtern eines Systems von $n-5$ PFAFFschen Gleichungen für welches der Halbrang $\varrho = 1$ ist. Nun hat aber D. DEARBORN [3], gestützt auf

---

[2] Vgl. für eine genaue Erörterung J. A. SCHOUTEN und E. R. VAN KAMPEN, Zur Einbettungs- und Krümmungstheorie nicht holonomer Gebilde.

[3] D. DEARBORN, Inequalities among the invariants of PFAFFian systems, Duke Math. Journal, Vol. 2, Nr. 1, 705—711 (1936).

eine von M. GRIFFIN[4]) gegebene Normalform, bewiesen, dass jedes System von q PFAFFschen Gleichungen mit dem Halbrang 1 die Klasse $\leqq q+3$ hat, d.h., dass sich die q PFAFFschen Formen mit Hilfe von $q+3$ Variablen darstellen lassen. Für ein System von q Gleichungen in $q+3$ Variablen haben wir aber schon bewiesen, dass sich die Klasse der Gleichungen auf 3 reduzieren lässt, so dass der Ausnahmefall erledigt ist.

Für den allgemeinen Fall müssen wir jetzt noch zeigen, dass sich tatsächlich $n-5$ Lösungssysteme $\overset{1}{p}, \overset{2}{p}, \overset{3}{p}$ herstellen lassen, so dass die korrespondierenden Vektoren $\underset{1}{\mu}\,\overset{1}{p}_\lambda + \underset{2}{\mu}\,\overset{2}{p}_\lambda + \underset{3}{\mu}\,\overset{3}{p}_\lambda$ linear unabhängig sind.

Dazu kehren wir zurück zu dem Trivektor $P_{\alpha\beta\gamma}$, von dem wir jetzt wissen, dass er sich so bestimmen lässt, dass die Bedingungen (20—24) erfüllt sind. Nach dem für $q=n-4$ bewiesenen Haupttheorem gibt es jetzt zu jeder Wahl der Faktoren $\overset{1}{P}_\beta, \overset{2}{P}_\beta, \overset{3}{P}_\beta$ drei Funktionen $\overset{1}{\underset{0}{p}}, \overset{2}{\underset{0}{p}}, \overset{3}{\underset{0}{p}}$ der $x^2, \dots, x^n$, die den Gleichungen (19) genügen und deren Gradienten $\overset{1}{\underset{0}{p}}{}_\beta, \overset{2}{\underset{0}{p}}{}_\beta, \overset{3}{\underset{0}{p}}{}_\beta$ in $x^\alpha = \underset{0}{x}{}^\alpha$ übergehen in $\overset{1}{P}_\beta, \overset{2}{P}_\beta, \overset{3}{P}_\beta$.

Die Funktionen $\overset{1}{\underset{0}{p}}, \overset{2}{\underset{0}{p}}, \overset{3}{\underset{0}{p}}$ erfüllen also jetzt die Gleichungen (12), (13) und (14) (für $u=3$ und $p=5$), oder auch (17), (18) und (19). Nach dem dort bewiesenen gibt es also drei Funktionen $\overset{1}{p}, \overset{2}{p}, \overset{3}{p}$, die den Gleichungen (6*a*), (6*b*) und (6*c*) genügen, und die für $x^1 = \underset{0}{x}{}^1$ übergehen in $\overset{1}{p}, \overset{2}{p}, \overset{3}{p}$. Im Punkte $x^\varkappa = \underset{0}{x}{}^\varkappa$ gilt also

$$\partial_\beta \overset{1}{p} = \overset{1}{P}_\beta,\ \partial_\beta \overset{2}{p} = \overset{2}{P}_\beta,\ \partial_\beta \overset{3}{p} = \overset{3}{P}_\beta \quad \dots\dots \quad (37)$$

Ueberdies existieren drei Funktionen $\underset{1}{\mu}, \underset{2}{\mu}, \underset{3}{\mu}$, derart, dass

$$w_\lambda = \underset{1}{\mu}\,\overset{1}{p}_\lambda + \underset{2}{\mu}\,\overset{2}{p}_\lambda + \underset{3}{\mu}\,\overset{3}{p}_\lambda\ ;\ \overset{i}{p}_\lambda = \partial_\lambda \overset{i}{p} \quad \dots\dots \quad (38)$$

ein Teiler des $(n-5)$-Vektors $w_{\lambda_1 \dots \lambda_{n-5}}$ ist. In $x^\varkappa = \underset{0}{x}{}^\varkappa$ ist w_β wegen (37) und (38) ein Teiler von $P_{\alpha\beta\gamma}$, für welchen

$$w_{\mathfrak{b}} = 0\ ;\ \mathfrak{b} = 2, \dots, 5 \quad \dots\dots \quad (39)$$

gilt. Da auch Q_β ein solcher Teiler von $P_{\alpha\beta\gamma}$ ist, kann man den freien skalaren Faktor in w_λ derart wählen, dass in $x^\varkappa = \underset{0}{x}{}^\varkappa$

$$w_\beta = Q_\beta \quad \dots\dots \quad (40)$$

[4]) M. GRIFFIN, Invariants of PFAFFian systems, Trans. Amer. Math. Soc. **35**, 929—939 (1933).

ist. Wir konstruieren nun aus Q_β einen Vektor Q_λ der X_n in $x^\varkappa = \underset{0}{x}{}^\varkappa$, indem wir Q_l bestimmen mittels der Gleichung

$$\underset{1}{v}{}^\lambda Q_\lambda = 0 \quad \dots\dots \quad (41)$$

Da auch

$$\underset{1}{v}{}^\lambda w_\lambda = 0 \quad \dots\dots \quad (42)$$

ist, folgt aus (40), (41) und (42), dass

$$w_\lambda = Q_\lambda \quad \dots\dots \quad (43)$$

ist in $x^\varkappa = \underset{0}{x}{}^\varkappa$. Wegen (26) und (41) ist Q_λ ein Teiler von $w_{\lambda_1 \dots \lambda_{n-5}}$ in $x^\varkappa = \underset{0}{x}{}^\varkappa$; ausserdem erfüllt Q_λ die Ungleichung (29). Da es ohne weiteres deutlich ist, dass es $n-5$ solche linear unabhängige Vektoren Q_λ gibt, existieren somit $n-5$ Teiler w_λ von der Form (38), die für $x^\varkappa = \underset{0}{x}{}^\varkappa$ in die Q_λ übergehen, und die also dort, und damit in einer Umgebung von $x^\varkappa = \underset{0}{x}{}^\varkappa$ linear unabhängig sind. Damit haben wir folgenden Satz bewiesen:

Das Gleichungssystem

$$\left\| \begin{matrix} X_1 \overset{1}{p} & X_1 \overset{2}{p} & X_1 \overset{3}{p} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ X_5 \overset{1}{p} & X_5 \overset{2}{p} & X_5 \overset{3}{p} \end{matrix} \right\| = 0 \ \textit{oder} \ \left. \begin{matrix} \underset{1}{\mu} X_1 \overset{1}{p} + \underset{2}{\mu} X_1 \overset{2}{p} + \underset{3}{\mu} X_1 \overset{3}{p} = 0 \\ \vdots \\ \underset{1}{\mu} X_5 \overset{1}{p} + \underset{2}{\mu} X_5 \overset{2}{p} + \underset{3}{\mu} X_5 \overset{3}{p} = 0 \end{matrix} \right\} \quad . \quad (44)$$

in n Variablen besitzt mindestens ein System von $n-5$ Lösungssystemen $\overset{1}{p}, \overset{2}{p}, \overset{3}{p}$, deren zugehörige Vektoren $\underset{1}{\mu}\overset{1}{p}_\lambda + \underset{2}{\mu}\overset{2}{p}_\lambda + \underset{3}{\mu}\overset{3}{p}_\lambda$ linear unabhängig sind. Zu jedem Vektor Q_λ in $x^\varkappa = \underset{0}{x}{}^\varkappa$, der den algebraischen Bedingungen

$$v^{\varkappa_1 \dots \varkappa_5} Q_{\varkappa_5} = 0 \quad \dots\dots \quad (45)$$

und

$$\underset{[ab}{v^\varkappa}\ \underset{cd]}{v^\lambda}\ Q_\varkappa Q_\lambda \neq 0 \quad \dots\dots \quad (46)$$

genügt, gibt es wenigstens ein Lösungssystem, für welches

$$\underset{1}{\mu}\overset{1}{p}_\lambda + \underset{2}{\mu}\overset{2}{p}_\lambda + \underset{3}{\mu}\overset{3}{p}_\lambda = Q_\lambda$$

ist in $x^\varkappa = \underset{0}{x}{}^\varkappa$[5]).

[5]) Die Anfangsbedingungen für $p=2$, 3 und 4 (I S. 22, 27 und 31) liessen sich auch in dieser einfacheren Weise formulieren.

Ein Satz über bilineare Systeme von Differentialgleichungen.

Nebenbei haben wir folgenden Satz erhalten.

Das bilineare System von partiellen Differentialgleichungen in n Variablen

$$\left\| \begin{matrix} X_1 \overset{1}{p} & X_1 \overset{2}{p} \\ \vdots & \vdots \\ X_p \overset{1}{p} & X_p \overset{2}{p} \end{matrix} \right\| = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (47a)$$

oder auch

$$\underset{1}{\mu} X_a \overset{1}{p} + \underset{2}{\mu} X_a \overset{2}{p} = 0; \; a = 1, \ldots, p \quad . \; . \; . \; . \qquad (47b)$$

besitzt dann und nur dann $n-p$ *Lösungssysteme* $\overset{1}{p}, \overset{2}{p}$*, deren zugehörige Vektoren* $\underset{1}{\mu}\partial_\lambda \overset{1}{p} + \underset{2}{\mu}\partial_\lambda \overset{2}{p}$ *linear unabhängig sind, wenn der Ausdruck*

$$B^{\varkappa \mu \lambda \nu}_{[a b c d]} (\partial_\varkappa C^x_\mu)(\partial_\lambda C^y_\nu); \; x, y = p+1, \ldots, n; \; X_b = B^\mu_b \partial_\mu; \; C^x_\mu B^\mu_a = 0 \qquad (48)$$

verschwindet, d.h., wenn $p \leqq 3$ *oder der Rang des adjungierten Systems* PFAFF*scher Gleichungen* $\leqq 2$ *ist.*

In der Tat verschwindet der Ausdruck identisch für $p \leqq 3$ und in dem Falle existieren nach unserem Hauptsatz tatsächlich $n-p$ linear unabhängige Lösungen. Ist aber $p > 3$, so ist $\varrho \leqq 1$ und infolge des DEARBORNschen Satzes ist die Klasse des zugeordneten PFAFFschen Systems somit $\leqq q+3$. Nach unserem Hauptsatz lassen sich die Gleichungen dieses Systems alle so wählen, dass ihre Klasse $\leqq 3$ ist und es ergeben sich somit ebenfalls $n-p$ linear unabhängige Lösungen. Gibt es anderseits $n-p$ linear unabhängige Lösungen, so lassen sich die C^x_λ so wählen, dass sie alle von der Klasse $\leqq 3$ sind. Die $\partial_{[\mu} C^x_{\lambda]}$ haben dann alle den Rang $\leqq 2$ und es verschwindet somit der Ausdruck (48). Die Verallgemeinerung für multilineare Systeme liegt auf der Hand, ein allgemeiner Beweis scheint aber vorläufig noch nicht durchführbar.

Chemistry. — *Der Einfluss des Dispersitätsgrades auf physikalisch-chemische Konstanten.* (Achte Mitteilung). Von ERNST COHEN und J. J. A. BLEKKINGH Jr.

(Communicated at the meeting of January 27, 1940.)

Der Einfluss der Dispersität kristallisierter Stoffe auf das elektrische Leitvermögen ihrer gesättigten Lösungen. II.

Nachdem wir in unserer 7. Mitteilung die Art und Weise beschrieben haben, in welcher es uns gelang chemisch und physikalisch reines $BaSO_4$ darzustellen, wollen wir nunmehr die Ergebnisse unserer Messungen des Leitvermögens der (bei 25.00° C.) gesättigten Lösungen dieses Sulfats näher erörtern.

D. DIE ERSTEN LEITFÄHIGKEITSVERSUCHE MIT DEN GESÄTTIGTEN LÖSUNGEN DES REINEN BARIUMSULFATS.

a. Die gesättigte Lösung hat sich durch Diffusion gebildet.

1. Unsere Tabelle 1 enthält die Werte des Leitvermögens (bei 25.00° C.) der bei dieser Temperatur gesättigten Lösung.

Die Versuche beziehen sich auf den Fall, dass die Lösung sich durch Diffusion gebildet hat. Um dies zu erreichen, verfuhren wir folgendermassen: Etwa 2 g des aus grösseren Stücken bestehenden, reinen Sulfats gaben wir in eine gründlich ausgedämpfte Flasche, und setzten dem Präparat in mehreren Etapen frisch destilliertes Wasser zu, d.h. Wasser für Leitfähigkeitsbestimmungen. Wir werden dasselbe im Folgenden mit den Buchstaben L.W. andeuten. Nachdem das Ganze während einiger Zeit im Thermostaten bei 25.00° C. ruhig gestanden hatte, pressten wir die überstehende Flüssigkeit in das Widerstandsgefäss (wir deuten dieses mit den Buchstaben W.G. an), ohne vorheriges Filtrieren. Das W.G. war vorher mit L.W. gereinigt worden. Bei diesen Versuchen beobachteten wir die überraschende Erscheinung, dass, falls einmal festes Sulfat in dem W.G. gewesen ist, jenes auf der Glasswand stets eine häufig unsichtbare Schicht zurücklässt, welche sich selbst durch intensives Spülen mit Wasser nicht entfernen lässt.

Wir liessen das Wasser während eines Tages, bezw. während mehrerer Tage ruhig in dem W.G. stehen, oder brachten es, zwecks Erzielung schnellerer Sättigung, in Bewegung, wie in § 6 unserer 7. Mitteilung erörtert wurde. In dieser Weise bildet sich durch Diffusion (bezw. durch