Aus (67) mit $u = \cosh t$ folgt daher

$$K_\nu(z) = 2^\sigma z^{1-\sigma} \int_0^\infty K_\sigma(z \cosh t)\, P^\sigma_{\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}}(\cosh 2t) \sinh^{1-\sigma} t \cosh t \, dt; \quad . \quad (69)$$

hierin ist $|\arg z| < \frac{1}{2}\pi$ und σ beliebig mit $\Re(\sigma) < 1$. Der Spezialfall mit $\sigma = \frac{1}{2}$ liefert wegen [22])

$$P^{\frac{1}{2}}_{n-\frac{1}{2}}(\cosh w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\cosh n w}{\sinh^{\frac{1}{2}} w} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (70)$$

und (64) die bekannte Relation [23])

$$K_\nu(z) = \int_0^\infty e^{-z \cosh t} \cosh \nu t \, dt \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (71)$$

Setzt man $\beta = \alpha + \frac{1}{2}$ in (62), so findet man wegen (64)

$$\left.\begin{aligned} K_\nu(z) &= \frac{2^{-2\alpha} z^{2\alpha} \sqrt{\pi}}{\Gamma(2\alpha + \frac{1}{2})} \int_1^\infty e^{-zu} \\ &\times {}_2F_1(\alpha - \tfrac{1}{2}\nu, \alpha + \tfrac{1}{2}\nu; 2\alpha + \tfrac{1}{2}; 1 - u^2)\,(u^2 - 1)^{2\alpha - \frac{1}{2}} du; \end{aligned}\right\} . \quad (72)$$

diese Beziehung geht für $\alpha = -\frac{1}{2}\nu$ in (65) und für $\alpha = -\frac{1}{2}\nu - \frac{1}{2}$ in (66) über.

Nun gilt bekanntlich [24])

$$\left.\begin{aligned} &{}_2F_1(-\tfrac{1}{2}n - \tfrac{1}{2}m, \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}n - \tfrac{1}{2}m; 1 - m; -\sinh^2 t) \\ &\qquad = 2^{-m}\,\Gamma(1-m) \sinh^m t\, P^m_n(\cosh t). \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (73)$$

Aus (72) mit $u = \cosh t$ ergibt sich also

$$K_\nu(z) = 2^{-\frac{1}{2}} z^{2\alpha} \sqrt{\pi} \int_0^\infty e^{-z \cosh t}\, P^{\frac{1}{2}-2\alpha}_{\nu-\frac{1}{2}}(\cosh t) \sinh^{2\alpha+\frac{1}{2}} t \, dt.$$

Diese Formel, gültig für $\Re(\alpha) > -\frac{1}{4}$, habe ich früher [25]) auf andere Weise abgeleitet; sie geht für $\alpha = 0$ wegen (70) in (71) über.

---

22) HOBSON, [2], 286.

23) WATSON, [17], 181, Formel (5).

24) HOBSON, [2], 219, Formel (49).

25) MEIJER, [12], 1100, Formel (31) und 146, Formel (23). Siehe auch MACDONALD, [3], 437, Formel (16) und MACROBERT, [4], 701, Formel (12a).

Mathematics. — *Ueber die asymptotische Verteilung eines beliebigen Systems* (f_ν) *von* n *reellen Funktionen* f_ν *der* m *ganzzahligen Veränderlichen* $x_1, x_2, \ldots, x_m$ *modulo Eins.* Von J. F. KOKSMA. (Communicated by J. G. VAN DER CORPUT)

(Communicated at the meeting of January 27, 1940.)

1. In der Theorie der asymptotischen Verteilung reeller Zahlfolgen modulo Eins [1]) stösst man auf die Frage, ob sich jede reelle Zahl α mit beliebiger Genauigkeit durch die Zahlen einer vorgegebenen Folge $f(1)$, $f(2), \ldots$ modulo Eins annäheren lässt. Liegt dieser Fall vor, so erhebt sich die Aufgabe, wenn möglich eine (von α unabhängige) positive, mit wachsendem x gegen die Null strebende Funktion $\varphi(x)$ des ganzzahligen Arguments $x \geqq 1$ derart zu bestimmen, dass für jedes reelle α das Diophantische Ungleichungssystem

$$-\varphi(x) < f(x) - \alpha < \varphi(x) \qquad (mod\ 1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

unendlich viele ganzzahlige Lösungen $x \geqq 1$ hat (x heisst eine Lösung des Systems (1), falls es zu diesem x ein ganzes y mit

$$-\varphi(x) < f(x) - y - \alpha < \varphi(x)$$

gibt).

Sobald eine derartige „Approximationsfunktion" $\varphi(x)$ bestimmt worden ist, fragt es sich, ob sich das Ergebnis verschärfen lässt, das heisst, ob sich $\varphi(x)$ durch eine schneller gegen die Null strebende Approximationsfunktion ersetzen lässt.

Wenn man umgekehrt von einer gegebenen Funktion $\varphi(x)$ ausgeht, stösst man in diesem Problemgebiet auf Fragen wie die folgende: gibt es eine spezielle Folge $f(1), f(2), \ldots$ für die die Funktion $\varphi(x) = \frac{1}{x^2}$ die obenverlangte Eigenschaft besitzt?

Der hier zu beweisende Satz 1 gibt auf die zuletztgestellte Frage eine verneinende Antwort; er beansprucht mit Hinsicht auf die ihr vorangehenden Fragen einiges Interesse, weil er für die Ordnung des Verschwindens der obenverlangten Approximationsfunktion $\varphi(x)$ eine Beschränkung nach oben liefert, die für keine Folge $f(1), f(2), \ldots$ überschritten werden kann.

---

1) Literatur in meinem Bericht „Diophantische Approximationen". Ergebnisse d. Math. IV, 4 (Berlin 1936), speziell Kap. VIII f.f.

Satz 1. *Sei $f(1), f(2), \ldots$ eine beliebige Folge reeller Zahlen. Ist dann $\varphi(1), \varphi(2), \ldots$ eine Folge positiver Zahlen für die die Reihe*

$$\sum_{x=1}^{\infty} \varphi(x)$$

konvergiert, so hat das Diophantische System

$$-\varphi(x) \leqq f(x) - a \leqq \varphi(x) \qquad (mod\ 1)$$

für fast alle a höchstens endlich viele ganzzahlige Lösungen $x \geqq 1$.

Bemerkung: „Fast alle" bedeutet, dass die Menge der Ausnahmezahlen a auf der Zahlengeraden das LEBESGUEsche Linienmass Null hat.

2. Ich zeige Satz 1 als Anwending des allgemeineren Satzes 2, dessen Beweis das Ziel dieser Note bildet[2]).

Satz 2. Voraussetzungen. *Es seien m, n und r natürliche Zahlen, $\mathfrak{N}$ eine Menge von Gitterpunkten $X = (x_1, \ldots, x_m)$ im R_m und*

$$\mathfrak{Q} \ldots A_\nu \leqq u_\nu \leqq B_\nu \quad (A_\nu < B_\nu;\ \nu = 1, 2, \ldots, n)$$

ein Quader im R_n. Ferner seien

$$F_\nu(x_1, \ldots, x_m;\ y_1, \ldots, y_r) \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

n reelle Funktionen, die für jedes Gitterpunktepaar $X \equiv (x_1, \ldots, x_m)$ (beliebig aus $\mathfrak{N}$) und $Y \equiv (y_1, \ldots, y_r)$ (beliebig aus R_r) definiert sind. Schliesslich seien $\varphi_\nu(x) > 0$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ und $K(x) \geqq 0$ $n+1$ für jedes ganze $x \geqq 1$ definierte Funktionen, derart dass die beiden Reihen

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{x=1}^{\infty} x^{m-1}\, Max\big(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)\big) \\ &und \\ &\sum_{x=1}^{\infty} x^{m-1} K(x)\, \varphi_1(x) \ldots \varphi_n(x) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

konvergieren, und es gelte die Eigenschaft, dass für jeden Gitterpunkt X der Höhe $x = Max(|x_1|, \ldots, |x_m|) \geqq 1$ aus $\mathfrak{N}$, höchstens $K(x)$ Gitterpunkte Y im R_r existieren, für die der Punkt $P \equiv P(x, y) \equiv (p_1, \ldots, p_n)$ mit Koordinaten

$$p_\nu = F_\nu(x_1, \ldots, x_m;\ y_1, \ldots, y_r) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

im Innern des Quaders $\mathfrak{Q}$ liegt.

Behauptung. *Zu fast allen Punkten $A \equiv (a_1, \ldots, a_n)$ des Quaders*

---

[2]) Vgl. zu Satz 1 auch den verwandten Satz 1 meiner Note: Metrisches über die Approximation reeller Zahlen". (Proc. Kon. Akad. v. Wetensch. Amsterdam, **41**, (1938), 45—47), der, wie der Leser leicht nachweist, ebenfalls in Satz 2 enthalten ist.

$\mathfrak{Q}$ gibt es höchstens endlich viele Gitterpunkte X in $\mathfrak{N}$, bei denen sich ein Gitterpunkt Y im R_r finden lässt, so dass die Ungleichungen

$$-\varphi_\nu(x) \leqq F_\nu(x_1, \ldots, x_m;\ y_1, \ldots, y_r) - a_\nu \leqq \varphi_\nu(x) \ (\nu = 1, 2, \ldots, n), \qquad (3)$$

wo x die Höhe des Gitterpunktes X bedeutet, sämtlich erfüllt sind.

Bemerkungen. 1. "Fast alle" bedeutet, dass die Menge der Ausnahme-Punkte $A \equiv (a_1, \ldots, a_n)$ im R_n das LEBESGUEsche Mass Null hat.

2. Vergleiche zu Satz 2 die „Aufgabe B" auf S. 4 meines in Fussnote [1]) zitierten Berichtes „Diophantische Approximationen".

3. Um einzusehen, dass Satz 1 in Satz 2 enthalten ist, setze man in Satz 2:
$m = n = r = 1$, $x_1 = x$, $y_1 = y$, $\mathfrak{N}$ gleich der Folge $x = 1, 2, 3, \ldots$ ferner $A_1 = 0$, $B_1 = 1$, d.h. $\mathfrak{Q}$ gleich dem Einheitsintervall $0 \leqq u \leqq 1$, $F_1 = f(x) - y$, $\varphi_1(x) = \varphi(x)$, und $K(x) = 1$.

4. Setzt man (für $m \geqq 1$, $n = r \geqq 1$):
$A_\nu = 0$, $B_\nu = 1$ (also $\mathfrak{Q}$ gleich dem Einheitswürfel im R_n),

$$F_\nu(x_1, \ldots, x_m;\ y_1, \ldots, y_r) = f_\nu(x_1, \ldots, x_m) - y_\nu \ (\nu = 1, 2, \ldots, n) \text{ und } K(x) = 1,$$

so erhält man das „mehrdimensionale" Analogon des Satzes 1 für das in der Ueberschrift genannte Funktionensystem (f_ν).

Beweis von Satz 2. Sei X ein beliebiger Gitterpunkt aus $\mathfrak{N}$ mit Höhe $x \geqq 1$. Sei $A \equiv (a_1, \ldots, a_n)$ ein Punkt aus $\mathfrak{Q}$ mit der Eigenschaft, dass bei dem gegebenen Gitterpunkt X und einem gewissen Gitterpunkt Y die sämtlichen Ungleichungen (3) erfüllt sind. Dann gehört also A dem Quader

$$p_\nu - \varphi_\nu(x) \leqq u_\nu \leqq p_\nu + \varphi_\nu(x) \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

mit Mittelpunkt $P \equiv P(x, y)$ an.

Es gibt zwei Fälle.

1) $P \equiv P(x, y)$ liegt im Innern des Quaders $\mathfrak{Q}$. Dieser Fall kann nach den Voraussetzungen des Satzes 2 für höchstens $K(x)$ Gitterpunkte Y auftreten.

2) $P \equiv P(x, y)$ liegt ausserhalb des Quaders $\mathfrak{Q}$, oder auf dem Rande. Dann aber liegt A in wenigstens einer der $2n$ Schichten

$$A_\nu \leqq u_\nu \leqq A_\nu + \varphi_\nu(x), \text{ bzw. } B_\nu - \varphi_\nu(x) \leqq u_\nu \leqq B_\nu \ (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

der Maximaldicke

$$Max\,(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)).$$

Also: die Menge $\mathfrak{M}(X)$ sämtlicher Punkte A in $\mathfrak{Q}$ für die das Ungleichungssystem (3) bei irgend einem Gitterpunkt Y gilt, hat das äussere Mass

$$\overline{m}\, \mathfrak{M}(X) \leqq K(x) \prod_{\nu=1}^{n} (2\,\varphi_\nu(x)) + C\, Max\,(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)),$$

wo C eine positive, nur von der Wahl des Quaders $\mathfrak{Q}$ abhängige Konstante bedeutet.

Also auch: die Menge $\mathfrak{M}'(x)$ sämtlicher Punkte A in $\mathfrak{Q}$, für die bei irgend einem Gitterpunkt X der Höhe $x \geqq 1$ aus $\mathfrak{N}$ und irgend einem Gitterpunkt Y aus R_r die sämtlichen Ungleichungen (3) gelten, hat das äussere Mass

$$\overline{\mathfrak{m}}\,\mathfrak{M}'(x) \leqq 2\,m\,(2x+1)^{m-1}\{2^n K(x) \prod_{\nu=1}^{n} \varphi_\nu(x) + C\,Max(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x))\}$$

$$\leqq m\,.\,3^{m+n}\,.\,x^{m-1} K(x) \prod_{\nu=1}^{n} \varphi_\nu(x) + m\,.\,3^m\,.\,C\,.\,x^{m-1}\,Max(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)).$$

Wegen der Konvergenz der Reihen (2) konvergiert also die Reihe

$$\sum_{x=1}^{\infty} \overline{\mathfrak{m}}\,\mathfrak{M}'(x),$$

so dass fast alle A aus $\mathfrak{Q}$ höchstens einer endlichen Anzahl der Mengen $\mathfrak{M}'(x)$ angehören. Q.e.d.

Mathematics. — *Tauberian theorems for Cesaro-summability of double series.* By H. D. KLOOSTERMAN. (Communicated by Prof. W. VAN DER WOUDE.)

(Communicated at the meeting of January 27, 1940.)

In two papers (to appear shortly in the "Journal of the London Mathematical Society" and the "Mathematische Zeitschrift") I have given a new method of proof for Tauberian theorems for Cesaro-summability. This method depends on some formulae, which appear to be new and which belong to the theory of finite differences. The Tauberian theorems for Cesaro-summability are immediate consequences of these formulae, and the proofs of these theorems thus obtained are considerably simpler than the proofs already known. Now in a paper entitled "Limitierungs-Umkehrsätze für Doppelfolgen", Math. Zeitschr. **45** (1939), p. 573—589, K. KNOPP has proved Tauberian theorems for double series. However his theorem on Cesaro-summability treats summability of the first order only. The object of the present paper is to show, that the method used in my two papers mentioned above, also gives proofs of Tauberian theorems on double series for Cesaro-summability *of any order.*

The following notations will be used. Let

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} a_{m,n} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

be a double series with real terms. We write

$$s_{m,n}^{(-1,-1)} = a_{m,n} \qquad (m, n = 1, 2, \ldots)$$

and if t and r are integers $\geqq -1$:

$$s_{m,n}^{(t+1,\,r)} = \sum_{\mu=1}^{m} s_{\mu,n}^{(t,\,r)} \quad , \quad s_{m,n}^{(t,\,r+1)} = \sum_{\nu=1}^{n} s_{m,\nu}^{(t,\,r)} \quad (m, n = 1, 2, \ldots).$$

If t and r are non-negative, the double series (1) is called summable $(C; t, r)$, if the double limit

$$\lim_{m,n \to \infty} \frac{s_{m,n}^{(t,\,r)}}{\binom{m+t-1}{t}\binom{n+r-1}{r}} \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

exists. Summability $(C; 0, 0)$ is identical with convergence. If the limit (2) is s, the series (1) is said to be summable $(C; t, r)$ to the sum s. It can be