Mathematics. — *Développements en série de polynomes d'*HERMITE *et de* LAGUERRE *à l'aide des transformations de* GAUSS *et de* HANKEL. I. Par ERVIN FELDHEIM. (Communicated by Prof. J. G. VAN DER CORPUT.)

(Communicated at the meeting of January 27, 1940.)

Introduction.

Dans une Note précédente [1]), nous avons considéré certains développements de produits de polynomes de LAGUERRE et d'HERMITE en séries de ces mêmes polynomes, et de représentations-intégrales fournies par les transformations de GAUSS et de HANKEL.

Dans le présent Mémoire, nous poursuivrons ce même sujet, en établissant d'une part de nouveaux développements et de nouvelles formules pour l'intégrale de tels produits, et d'autre part, en donnant des généralisations de résultats établis antérieurement.

Nous commençons par les notions qui sont indispensables pour nos recherches, en réduisant au minimum les résultats préliminaires cités, et négligeant toute formule qui ne trouvera son application plus tard. Pour ne pas interrompre à chaque pas le cours de nos raisonnements par le rappel de formules établies préalablement, nous avons jugé plus utile et plus commode de rassembler, dans un paragraphe séparé, ces résultats. C'est ce que contient le § 1.

§ 1. Généralités.

1°. Transformation de GAUSS et polynomes d'HERMITE. — La transformation de GAUSS est définie par l'équation fonctionnelle

$$\frac{1}{\sqrt{\pi a}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(y-x)^2}{a}} F(y)\, dy = f(x) = G_x^{(a)}[F(y)] \qquad (Ra > 0). \qquad (1)$$

Cette transformation fait passer de la *fonction-objet* $F(y)$ *à la fonction-résultat* $f(x)$. Nous ne rappelons ici que deux propriétés essentielles de cette transformation [2]):

1) FELDHEIM, [8] (Les nombres entre crochet renvoient à la Bibliographie placée à la fin du travail).

2) Pour ce qui est de la théorie générale et la bibliographie relative à ce sujet, voir TRICOMI [3].

a. la permutabilité avec la dérivation:

$$\frac{d}{dx} G_x^{(a)}[F(y)] = G_x^{(a)}\left[\frac{dF(y)}{dy}\right]$$

b. l'homogénéité:

$$G_x^{(a)}[F(y)] = G^{(1)}_{\frac{x}{\sqrt{a}}}[F(\sqrt{a}\, y)].$$

L'opération fonctionnelle représentée par l'équation intégrale (1) sera désignée dans la suite par le symbole $G(a, x)$: dire que nous appliquons à la fonction $F(y)$ la transformation $G(a, x)$, veut dire que nous cherchons la fonction-résultat correspondant à l'aide de (1).

L'emploi de la transformation de GAUSS est particulièrement indiqué dans les cas où les fonctions qu'on rencontre sont des fonctions d'HERMITE ou sont exprimées par des séries de telles fonctions [3]). Si nous considérons, en effet, la définition suivante

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} H_n(y) = e^{2ty-t^2} = e^{-(t-y)^2+y^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

des polynomes d'HERMITE $H_n(y)$, nous voyons la ressemblence de forme entre le „noyau" de (1) (pour $a=1$) et la „fonction génératrice" des fonctions d'HERMITE donnée par (2). Ce fait explique le rôle particulier que jouent les polynomes d'HERMITE dans la théorie de la transformation de GAUSS. La relation principale de cette théorie est [4]):

$$\frac{1}{\sqrt{\pi a}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(y-x)^2}{a}} H_n\left(\frac{y}{\lambda}\right) dy = \left(1-\frac{a}{\lambda^2}\right)^{\frac{n}{2}} H_n\left(\frac{x}{\sqrt{\lambda^2-a}}\right) \quad . \quad (3)$$

($Ra > 0$, n entier positif ou nul, λ paramètre arbitraire) que l'on démontre très simplement en remplaçant, dans (2), y par $\frac{y}{\lambda}$, et appliquant la transformation $G(a, x)$.

D'autre part, de (2),

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \lambda^n H_n\left(\frac{y}{\lambda}\right) = e^{2ty-\lambda^2 t^2} = e^{2ty-t^2} \cdot e^{t^2(1-\lambda^2)} =$$

$$= \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{t^\mu}{\mu!} H_\mu(y) \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(1-\lambda^2)^\nu}{\nu!} t^{2\nu} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \cdot \sum_{\nu=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (1-\lambda^2)^\nu \frac{n! H_{n-2\nu}(y)}{\nu!(n-2\nu)!}$$

3) Voir p.e. TRICOMI [1].

4) Pour différentes démonstrations, applications et l'historique de cette relation, voir nos travaux cités dans la Bibliographie.

de sorte que nous avons „la relation de multiplication" [5])

$$\lambda^n H_n\left(\frac{y}{\lambda}\right)=\sum_{\nu=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(1-\lambda^2)^\nu \frac{n!}{\nu!}\frac{H_{n-2\nu}(y)}{(n-2\nu)!}. \quad \ldots \quad (4)$$

En choisissant convenablement les paramètres a et λ, nous déduisons de (3) et (4) toutes les relations importantes et nécessaires pour notre objet. Commençons par (4). En observant que (comme il résulte sans peine de (2)),

$$\lim_{\lambda\to 0} \lambda^n H_n\left(\frac{y}{\lambda}\right)=(2y)^n, \quad \ldots \quad (5)$$

(4) donne pour $\lambda\to\infty$ et $\lambda\to 0$ respectivement les deux développements „inverses" bien connus

$$H_n(y)=\sum_{\nu=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^\nu \frac{n!}{\nu!}\frac{(2y)^{n-2\nu}}{(n-2\nu)!} \qquad (\lambda\to\infty). \quad \ldots \quad (4a)$$

$$(2y)^n=\sum_{\nu=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{n!}{\nu!}\frac{H_{n-2\nu}(y)}{(n-2\nu)!} \qquad (\lambda\to 0). \quad \ldots \quad (4b)$$

Nous voyons que les coefficients des deux développements ne diffèrent que du facteur $(-1)^\nu$. Nous allons voir dans la suite que cette propriété est caractéristique aussi pour d'autres développements inverses.

Les cas particuliers importants de (3) sont les formules inverses:

$$H_n(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(y+ix)^2}(2iy)^n\,dy \qquad (\lambda\to 0,\ a=1) \quad \ldots \quad (3a)$$

$$(2x)^n=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(y-x)^2}H_n(y)\,dy \qquad (\lambda=1,\ a=1) \quad \ldots \quad (3b)$$

et l'équation

$$i^n H_n(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{(y-ix)^2}{2}}H_n(y)\,dy \qquad (\lambda=1,\ a=2;\ i=\sqrt{-1}). \quad (3c)$$

On rencontre souvent, au lieu de (2), la définition suivante des polynomes d'HERMITE [6]):

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\mathcal{H}_n(y)=e^{ty-\frac{t^2}{2}}. \quad \ldots \quad (6)$$

[5]) ERDÉLYI [1], FELDHEIM [5].

[6]) Nous désignerons ces polynomes, pour les distinguer de ceux introduits tout à l'heure, par $\mathcal{H}_n(y)$.

En comparant les deux définitions (2) et (6), nous trouvons immédiatement que

$$\mathcal{H}_n(y)=2^{-\frac{n}{2}}H_n\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right).$$

D'autre part, en posant $\lambda=\sqrt{2}$ dans (4), nous aurons le développement de $\mathcal{H}_n(y)$ en série des $H_n(y)$:

$$\mathcal{H}_n(y)=\frac{1}{2^n}\sum_{\nu=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^\nu\frac{n!}{\nu!}\frac{H_{n-2\nu}(y)}{(n-2\nu)!}. \quad \ldots \quad (7)$$

Cette formule peut être considérée comme une sorte d'inversion de (4*b*). En effet, si nous appliquons à cette dernière relation la transformation $G(2, ix)$, nous retrouvons, en vertu de (3*c*), la formule (7).

Les polynomes $H_n(y)$ sont exprimés à leurs tours à l'aide des $\mathcal{H}_n(y)$ au moyen de

$$H_n(y)=\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}\mathcal{H}_\nu(y)\,\mathcal{H}_{n-\nu}(y). \quad \ldots \quad (8)$$

Nous verrons plus tard d'autres relations entre ces deux sortes de polynomes d'HERMITE.

2[0]. **Transformation de HANKEL et polynomes de LAGUERRE.** — On appelle „transformée de HANKEL" d'ordre ν de la fonction $F(y)$ la fonction $f(x)$ définie par l'équation fonctionnelle

$$f(x)=\int_0^\infty J_\nu(2\sqrt{xy})\,F(y)\,dy. \quad \ldots \quad (9)$$

Dans certaines conditions [7]), on a la formule d'inversion

$$F(x)=\int_0^\infty J_\nu(2\sqrt{xy})\,f(y)\,dy \quad \ldots \quad (10)$$

Les polynomes de LAGUERRE $L_n^{(\alpha)}(y)$, tout comme les polynomes d'HERMITE pour la transformation de GAUSS, jouent ici un rôle particulier. Cela se voit immédiatement, si l'on définit ces polynomes à l'aide de la relation connue [8]):

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n L_n^{(\alpha)}(y)}{\Gamma(n+\alpha+1)}=e^t(ty)^{-\frac{\alpha}{2}}J_\alpha(2\sqrt{ty}), \quad (R\alpha>-1) \quad (11)$$

[7]) TRICOMI [2], ou HOWELL [5].

[8]) TRICOMI, ERDÉLYI, FELDHEIM [6].

et l'on en déduit l'équation intégrale, analogue à (3), [9])

$$\int_0^\infty J_\alpha(2\sqrt{xy})\,e^{-y}\,y^{\frac{\alpha}{2}}L_n^{(\alpha)}\left(\frac{y}{\lambda}\right)dy=\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)^n.\,e^{-x}\,x^{\frac{\alpha}{2}}L_n^{(\alpha)}\left(\frac{x}{1-\lambda}\right),(R\alpha>-1)\quad(12)$$

De la même façon, en remplaçant dans (11), t par λt et y par $\frac{y}{\lambda}$, on aura

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{\Gamma(n+\alpha+1)}\lambda^n L_n^{(\alpha)}\left(\frac{y}{\lambda}\right)=e^t(ty)^{-\frac{\alpha}{2}}J_\alpha(2\sqrt{ty}).\,e^{t(\lambda-1)}=$$

$$=\sum_{\mu=0}^{\infty}\frac{t^\mu L_\mu^{(\alpha)}(y)}{\Gamma(\mu+\alpha+1)}.\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^\nu\frac{t^\nu(1-\lambda)^\nu}{\nu!}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}t^n.\sum_{\nu=0}^{n}(-1)^\nu(1-\lambda)^\nu\frac{L_{n-\nu}^{(\alpha)}(y)}{\nu!\,\Gamma(n-\nu+\alpha+1)},$$

de sorte que

$$\lambda^n L_n^{(\alpha)}\left(\frac{y}{\lambda}\right)=\sum_{\nu=0}^{n}(\lambda-1)^{n-\nu}\binom{n+\alpha}{n-\nu}L_\nu^{(\alpha)}(y)\quad\ldots\quad(13)$$

analogue à la relation (4) [10]). On en déduit, en remarquant que

$$\lim_{\lambda\to 0}\lambda^n L_n^{(\alpha)}\left(\frac{y}{\lambda}\right)=(-1)^n\frac{y^n}{n!},\quad\ldots\quad(14)$$

les développements inverses

$$L_n^{(\alpha)}(y)=\sum_{\nu=0}^{n}(-1)^\nu\binom{n+\alpha}{n-\nu}\frac{y^\nu}{\nu!}\qquad(\lambda\to\infty)\ .\ .\quad(13a)$$

$$\frac{y^n}{n!}=\sum_{\nu=0}^{n}(-1)^\nu\binom{n+\alpha}{n-\nu}L_\nu^{(\alpha)}(y)\qquad(\lambda\to 0)\ .\ .\quad(13b)$$

Les formes particulières de (12) correspondantes sont

$$\int_0^\infty J_\alpha(2\sqrt{xy})e^{-y}\,y^{\frac{\alpha}{2}}L_n^{(\alpha)}(y)\,dy=\frac{1}{n!}e^{-x}x^{n+\frac{\alpha}{2}}\qquad(R\alpha>-1,\lambda=1)\ .\quad(12a)$$

$$\frac{1}{n!}\int_0^\infty J_\alpha(2\sqrt{xy})\,e^{-y}\,y^{n+\frac{\alpha}{2}}\,dy=e^{-x}\,x^{\frac{\alpha}{2}}\,L_n^{(\alpha)}(x)\quad(R\alpha>-1,\lambda\to 0)\quad(12b)$$

9) HOWELL [5], ERDÉLYI [4].
10) ERDÉLYI [1], [4], FELDHEIM [5].

Nous voyons donc que les fonctions $e^{-y}y^{\frac{\alpha}{2}}L_n^{(\alpha)}(y)$ et $e^{-y}y^{\frac{\alpha}{2}}.\frac{y^n}{n!}$ sont inverses à l'égard de la transformation de HANKEL.

Mentionnons encore l'équation intégrale de WILSON

$$\int_0^\infty J_\alpha(2\sqrt{xy})\,e^{-y}\,y^{\frac{\alpha}{2}}\,L_n^{(\alpha)}(2y)\,dy=(-1)^n\,e^{-x}\,x^{\frac{\alpha}{2}}\,L_n^{(\alpha)}(2x)\ .\ .\quad(12c)$$

qui correspond, dans (12), à la valeur $\lambda=\frac{1}{2}$.

Il faut encore rappeler la liaison entre les polynomes de LAGUERRE et d'HERMITE, à savoir

$$\left.\begin{aligned}H_{2n}(y)&=(-1)^n\,2^{2n}\,n!\,L_n^{(-\frac{1}{2})}(y^2)\\ H_{2n+1}(y)&=(-1)^n\,2^{2n+1}\,n!\,y\,L_n^{(\frac{1}{2})}(y^2)\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\quad(15)$$

Il est d'ailleurs connu que les polynomes de LAGUERRE (et ainsi les polynomes d'HERMITE aussi) sont des cas spéciaux des fonctions de WHITTAKER [11]).

3°. Rappel de quelques résultats antérieurs. — L'étude des fonctions de WHITTAKER, et en particulier, celle des polynomes de LAGUERRE, a joui dans ces derniers temps d'un grand développement. Il est impossible d'indiquer ici tous les travaux se rattachant à ce genre de problèmes, et nous devons nous contenter de mentionner quelques Mémoires récents de MM. BAILEY, ERDÉLYI, HOWELL, MEIJER, TRICOMI, WATSON, et nous-mêmes.

Commençons par les résultats concernant les développements en séries des polynomes en question. Pour le produit de deux polynomes d'HERMITE de degrés différents, on a le développement [12]):

$$H_m(y)\,H_n(y)=\sum_{\nu=0}^{min(m,n)}2^\nu\,\nu!\binom{m}{\nu}\binom{n}{\nu}H_{m+n-2\nu}(y)\ .\ .\quad(16)$$

pour le produit de polynomes de LAGUERRE, nous possédons le résultat moins simple, mais plus général [13]):

$$L_{m_1}^{(\alpha_1)}(k_1\,y)\,L_{m_2}^{(\alpha_2)}(k_2\,y)\ldots L_{m_n}^{(\alpha_n)}(k_n\,y)=\sum_{\nu=0}^{m_1+m_2+\ldots+m_n}c_\nu\,L_\nu^{(\alpha)}(y),\ .\ .\quad(17)$$

11) Voir p.e. WHITTAKER-WATSON: A course of Modern Analysis. Cambridge (1927), les Notes de M. ERDÉLYI, et nombreuses Notes de M. C. S. MEIJER, parues dans les Proceedings of the Konink. Akad. van Wetenschappen te Amsterdam.
12) FELDHEIM [2], WATSON [3]. La relation (16) a été déjà démontrée, sous une autre forme, par DHAR, Bull. Calcutta Math. Soc. 26, 57—64 (1934).
13) ERDÉLYI [3].

avec

$$\left.\begin{aligned} c_\nu = \frac{(a_1+1)_{m_1}}{m_1!} \cdots \frac{(a_n+1)_{m_n}}{m_n!} \\ F_A(\alpha+1; -m_1, \ldots, -m_n, -\nu; a_1+1, \ldots, a_n+1, \alpha+1; k_1, k_2, \ldots, k_n, 1) \end{aligned}\right\} \quad (17')$$

où $(p)_q = \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)}$, et F_A désigne ici une fonction hypergéométrique de LAURICELLA à $n+1$ variables.

Nous pouvons mentionner ici un autre résultat récent, exprimé par les formules [14]):

$$\left.\begin{aligned} L_m^{(\alpha)}(y)\, L_n^{(\beta)}(y) = \sum_{\nu=0}^{m+n} c_\nu(m, n; \alpha, \beta)\, L_\nu^{(\alpha+\beta)}(y) = \\ = (-1)^{m+n} \sum_{\nu=0}^{m+n} c_\nu(m, n; \beta-m+n, \alpha+m-n) \frac{y^\nu}{\nu!}. \end{aligned}\right\} \quad (18)$$

Si l'on fait ici $m=n$, on trouve la propriété intéressante que les coefficients des deux développements sont égaux:

$$L_m^{(\alpha)}(y)\, L_m^{(\beta)}(y) = \sum_{\nu=0}^{2m} c_\nu\, L_\nu^{(\alpha+\beta)}(y) = \sum_{\nu=0}^{2m} c_\nu \frac{y^\nu}{\nu!}. \quad . \quad . \quad . \quad (18a)$$

En appliquant à (16) la transformation $G(1, ix)$, on obtient l'équation intégrale suivante [15]):

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(y-ix)^2} H_m(y)\, H_n(y)\, dy = 2^m n!\, (ix)^{m-n}\, L_n^{(m-n)}(2x^2) \quad (m \geqq n). \quad (19)$$

Si $m=n$, on aura pour la transformée de FOURIER de $e^{-y^2} H_n^2(y)$ (carré de la „fonction d'HERMITE"), l'expression digne d'intérêt:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} H_n^2(y) \cos 2xy\, dy = 2^n n!\, L_n(2x^2) \quad . \quad . \quad . \quad (19a)$$

Une généralisation de (19) est l'équation intégrale [16])

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} H_m(y+x) H_n(y-z)\, dy = 2^m n!\, x^{m-n}\, L_n^{(m-n)}(2xz) \quad (m \geqq n). \quad (20)$$

---

[14]) FELDHEIM [8]; le cas particulier $\alpha=\beta$ de (18a) se trouve implicitement dans HOWELL [2].

[15]) HOWELL [2], FELDHEIM [8].

[16]) FELDHEIM [8].

L'inversion de (19) donne lieu à une représentation-intégrale du produit de deux polynomes d'HERMITE

$$H_m(x)\, H_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot 2^m n! \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(y+ix)^2} (iy)^{m-n}\, L_n^{(m-n)}(2y^2)\, dy \quad (m \geqq n). \quad (21)$$

Appliquons maintenant à (18) la transformation de HANKEL à noyau $e^{-y}\, y^{\frac{\alpha+\beta}{2}}\, J_{\alpha+\beta}(2\sqrt{xy})$ nous retrouvons alors, à l'aide de (12a) et (12b), l'équation intégrale [17])

$$\left.\begin{aligned} \int_0^\infty J_{\alpha+\beta}(2\sqrt{xy})\, e^{-y}\, y^{\frac{\alpha+\beta}{2}}\, L_m^{(\alpha)}(y)\, L_n^{(\beta)}(y)\, dy = \\ = (-1)^{m+n}\, e^{-x}\, x^{\frac{\alpha+\beta}{2}}\, L_m^{(\beta-m+n)}(x)\, L_n^{(\alpha+m-n)}(x) \quad (R(\alpha+\beta) > -1). \end{aligned}\right\} \quad (22)$$

Nous devons nous arrêter ici dans l'énumération des résultats établis jusqu'à présent dans cet ordre de problèmes. Aussi nous avons dû nous borner aux résultats seuls qui nous serviront dans ce qui va suivre. Une telle formule est encore la suivante

$$\int_0^\infty J_\alpha(2\sqrt{xy})\, e^{-y}\, y^{\frac{\alpha}{2}}\, L_n^{(\beta)}(y)\, dy = (-1)^n\, e^{-x}\, x^{\frac{\alpha}{2}}\, L_n^{(\alpha-\beta-n)}(x) \quad (R\alpha > -1) \quad (22a)$$

qui se déduit facilement de (22).

§ 2. *Développements en série de polynomes d'*HERMITE.

10. Formules de récurrence pour les polynomes d'HERMITE. — Il est bien connu (et l'on déduit aussi de (2)) que trois polynomes H consécutifs sont liés par la relation de récurrence

$$H_{m+1}(y) = 2y\, H_m(y) - 2m\, H_{m-1}(y), \quad H_0(y) = 1,\, H_1(y) = 2y. \quad (23)$$

Une généralisation de cette relation est fournie par (16) qui se réduit à (23) si l'on y fait $n=1$. Une autre généralisation de (23) sera donnée par l'inversion de (16), c'est-à-dire par le développement

$$H_{m+n}(y) = \sum_{\nu=0}^{\min(m,n)} A_\nu^{(m,n)}\, H_{m-\nu}(y)\, H_{n-\nu}(y), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

et notre premier problème consiste dans la détermination des coefficients $A_\nu^{(m,n)}$. Pour ce but, appliquons aux deux membres de (24) la transfor-

---

[17]) ERDÉLYI [2]; le cas particulier $m=n$, $\alpha=\beta$, dans WATSON [2].

mation $G(1, ix)$. Nous aurons, en vertu de $(3b)$ et (19), le développement $(m \geqq n)$

$$(2ix)^{m+n} = \sum_{\nu=0}^{n} A_\nu^{(m,n)} \cdot 2^{m-\nu}(n-\nu)!\,(ix)^{m-n} L_{n-\nu}^{(m-n)}(2x^2), \quad . \quad . \quad (24a)$$

ou, après quelques modifications,

$$(-1)^n \frac{x^n}{n!} = \sum_{\nu=0}^{n} A_\nu^{(m,n)} \cdot \frac{(n-\nu)!}{2^\nu n!} \cdot L_{n-\nu}^{(m-n)}(x), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24b)$$

Mais le premier membre est égal, d'après $(13b)$, à $\sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \binom{m}{\nu} L_{n-\nu}^{(m-n)}(x)$, de sorte que $A_\nu^{(m,n)} = (-1)^\nu 2^\nu \nu! \binom{m}{\nu}\binom{n}{\nu}$, et ainsi

$$H_{m+n}(y) = \sum_{\nu=0}^{\min(m,n)} (-1)^\nu \cdot 2^\nu \nu! \binom{m}{\nu}\binom{n}{\nu} H_{m-\nu}(y)\, H_{n-\nu}(y) \quad . \quad (24')$$

Nous retrouvons une propriété déjà rencontrée: les coefficients des deux développements inverses (16) et (24′) ne diffèrent que du facteur $(-1)^\nu$. Le cas particulier $m = n$ conduit à la relation intéressante:

$$H_{2n}(y) = \sum_{\nu=0}^{n} (-2)^{n-\nu}(n-\nu)! \binom{n}{\nu}^2 H_\nu^2(y) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24'')$$

Nous reviendrons plus tard sur ces formules.

2⁰. **Fonctions génératrices pour produits de polynomes d'HERMITE.**

a. Reprenons la définition [18]) des polynomes de LAGUERRE, et appliquons-la pour $m = n-k$ (k = entier non négatif, $n = k, k+1, \ldots$), $\alpha = 2k$, et $y = 2x^2$. Multiplions les deux membres par $(-1)^k x^{2k}$, et appliquons à la relation ainsi obtenue

$$\sum_{n=k}^{\infty} t^{n-k}(ix)^{2k} L_{n-k}^{(2k)}(2x^2) = \frac{1}{(1-t)^{2k+1}} \cdot e^{-\frac{2tx^2}{1-t}} (ix)^{2k}, \qquad |t|<1$$

la transformation $G(1, -iz)$. En tenant compte de (21), on aura ainsi

$$\sum_{n=k}^{\infty} \frac{t^{n-k} H_{n+k}(z) H_{n-k}(z)}{2^{n-k}(n-k)!} = \frac{1}{(1-t)^{2k+1}} e^{\frac{2tz^2}{1+t}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1+t}{1-t}\left[x + \frac{(1-t)iz}{1+t}\right]^2} (2ix)^{2k}\, dx$$

18)

$$(1-t)^{-(\alpha+1)} \exp\left[-\frac{ty}{1-t}\right] = \sum_{m=0}^{\infty} t^m L_m^{(\alpha)}(y) \quad |t|<1$$

Un changement de variable d'intégration, et l'application de la formule $(3a)$ donnent finalement

$$\sum_{n=k}^{\infty} \frac{t^{n-k} H_{n+k}(z) H_{n-k}(z)}{2^{n-k}(n-k)!} = \frac{1}{(1-t^2)^{k+\frac{1}{2}}} e^{\frac{2tz^2}{1+t}} H_{2k}\left(z\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\right) \quad |t|<1 \quad (25)$$

Pour $k = 0$, on trouve

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n H_n^2(z)}{2^n n!} = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} e^{\frac{2tz^2}{1+t}} \quad |t|<1 \quad . \quad . \quad . \quad (25')$$

qui est le cas particulier relatif à $x = y = z$ de la formule bien connue de MEHLER [18a])

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n H_n(x) H_n(y)}{2^n n!} = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} e^{-\frac{(x-ty)^2}{1-t^2}+x^2} \qquad |t|<1.$$

Remarquons encore que (25) peut s'écrire aussi sous la forme

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n H_n(z) H_{n+2k}(z)}{2^n n!} = \frac{1}{(1-t^2)^{k+\frac{1}{2}}} e^{\frac{2tz^2}{1+t}} H_{2k}\left(z\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\right) \quad |t|<1 \quad . \quad . \quad (25a)$$

et nous voyons que $(25a)$ peut se déduire de la formule de MEHLER par dérivations successives par rapport à y, en posant ensuite $x = y = z$.

b. Considérons l'autre fonction génératrice (11) des polynomes de LAGUERRE, et posons encore $m = n-k$, $\alpha = 2k$, $x = 2y^2$ (k entier non négatif). Si nous remplaçons encore t par $2z^2$, et appliquons la transformation $G(1, -ix)$, nous trouvons, en vertu de (21), la formule

$$\sum_{n=k}^{\infty} \frac{z^{2n} H_{n+k}(x) H_{n-k}(x)}{(n-k)!\,(n+k)!} = (-1)^k e^{2z^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(y+ix)^2} J_{2k}(4yz)\, dy \quad . \quad (26)$$

$J_{2k}(4yz)$ étant la fonction de BESSEL d'ordre $2k$, où k est un entier non négatif.

En substituant au second membre de (26) l'expression explicite

$$(-1)^k J_{2k}(4yz) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^{2m+2k}(2iy)^{2m+2k}}{m!\,(m+2k)!} = \sum_{r=k}^{\infty} \frac{z^{2r}(2iy)^{2r}}{(r-k)!\,(r+k)!},$$

la transformation $(3a)$ donne lieu à la relation

$$\sum_{n=k}^{\infty} \frac{t^n H_{n-k}(x) H_{n+k}(x)}{(n-k)!\,(n+k)!} = e^{2t} \sum_{m=k}^{\infty} \frac{t^m H_{2m}(x)}{(m-k)!\,(m+k)!}, \quad . \quad . \quad (27)$$

et, en particulier, pour $k = 0$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n H_n^2(x)}{(n!)^2} = e^{2t} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m H_{2m}(x)}{(m!)^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27')$$

18a) Pour la démonstration de cette formule par la méthode du présent article, et pour l'historique, voir FELDHEIM [6], [7].

Ces deux relations, en identifiant aux deux membres les puissances respectives du paramètre t, redonnent les développements inverses (16) et (24), et leurs cas particuliers relatifs à $m = n$.

c. Terminons ici par la relation, résultant de la formule de HILLE-HARDY [19]),

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^n H_n^2(x) H_n^2(y)}{2^{2n}(n!)^2} = \frac{1}{\pi(1-t)} e^{-\frac{2t(x^2+y^2)}{1-t}} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(u+ix\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\right)^2-\left(v+iy\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\right)^2} \times J_0\left(\frac{4uv\sqrt{t}}{1-t}\right) du\, dv, \quad |t|<1 \qquad (28)$$

qui peut encore se mettre sous la forme suivante:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n H_n^2(x) H_n^2(y)}{(n!)^2} = \frac{1}{1+4t} e^{\frac{8t(x^2+y^2)}{1+4t}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m H_{2m}(x) H_{2m}(y)}{(1+4t)^{2m}(m!)^2}, \quad |t|<\tfrac{1}{4}. \qquad (29)$$

En tenant compte de [18]), nous déduisons de (29) la relation, non sans intérêt, qui suit

$$H_n^2(x) H_n^2(y) = (-1)^n (n!)^2 \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} H_{2k}(x) H_{2k}(y) L_{n-k}^{(2k)}(2x^2+2y^2). \qquad (30)$$

En particulier, si $n = 2m$, et $y = 0$, on a

$$\frac{1}{(m!)^2} H_{2m}^2(x) = \sum_{k=0}^{2m} \binom{2k}{k} \frac{H_{2k}(x)}{k!} L_{2m-k}^{(2k)}(2x^2), \quad . \quad . \quad . \qquad (30a)$$

et, pour $y = x$,

$$(-1)^n \frac{1}{(n!)^2} H_n^4(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} H_{2k}^2(x) L_{n-k}^{(2k)}(4x^2) \quad . \quad . \qquad (30b)$$

3°. Relations entre $H_n(y)$, $\mathcal{H}_n(y)$ et $L_n(y^2)$. — On peut

---

19) Cette formule, comme il est bien connue, est la suivante:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!\, t^n L_n^{(\alpha)}(x) L_n^{(\alpha)}(y)}{\Gamma(n+\alpha+1)} = \frac{(txy)^{-\frac{\alpha}{2}}}{1-t} e^{-\frac{t(x+y)}{1-t}} I_\alpha\left(\frac{2\sqrt{txy}}{1-t}\right) \qquad |t|<1$$

Pour différentes démonstrations, et la bibliographie relative, voir p.e. WATSON [1], et FELDHEIM [6].

Pour la légitimité des intégrations terme à terme des séries infinies, effectuées dans ce travail, voir p.e. BROMWICH, An Introduction to the Theory of infinite Series (2. edit., 1926).

déduire de la définition (voir [18])) des polynomes de LAGUERRE l'expression de $L_m^{(\alpha)}(x)$ à l'aide de ces mêmes polynomes, mais avec le paramètre β [20]):

$$L_m^{(\alpha)}(x) = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{\Gamma(\alpha-\beta+\nu)}{\nu!\,\Gamma(\alpha-\beta)} L_{m-\nu}^{(\beta)}(x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (31)$$

Si nous y posons $x = y^2$, $\alpha = -\frac{1}{2}$, $\beta = 0$, et si nous tenons compte de (15), nous aurons le développement suivant:

$$(-1)^n \frac{H_{2n}(y)}{2^{2n}\, n!} = L_n(y^2) - \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{2^{2\nu-1}\nu} \binom{2\nu-2}{\nu-1} L_{n-\nu}(y^2) \quad . \quad . \qquad (32)$$

Appliquons maintenant à cette relation la transformation $G(2, -ix)$. Les formules (3c) et (21) donneront alors le développement

$$\sum_{\nu=0}^{n} \frac{\nu!}{2^\nu} \binom{n+1}{\nu+1} \binom{2\nu}{\nu} H_{n-\nu}^2\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) = H_{n+1}^2\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) - H_{2n+2}(x), \qquad (33)$$

ou encore

$$\sum_{\nu=0}^{n} \frac{\nu!}{2^{2\nu+1}} \binom{n+1}{\nu+1} \binom{2\nu}{\nu} \mathcal{H}_{n-\nu}^2(x) = \mathcal{H}_{n+1}^2(x) - \frac{1}{2^{n+1}} H_{2n+2}(x). \qquad (33a)$$

Pour raison de brièveté, nous écrivons ces développements sous la forme

$$H_{2n}(x) = \sum_{\nu=0}^{n} A_\nu^{(n)} \,.\, 2^{2\nu} \mathcal{H}_\nu^2(x), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (33')$$

$$(-1)^n H_{2n}(x) = \sum_{\nu=0}^{n} A_\nu^{(n)} \,.\, 2^{2\nu} \nu!\, L_\nu(x^2), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (33'')$$

où l'expression de $A_\nu^{(n)}$ se déduit facilement de (33*a*).

Or, si l'on fait dans (31), $x = y^2$, $\alpha = 0$, $\beta = -\frac{1}{2}$, on obtient l'inversion de (32),

$$(-1)^n 2^{2n} n!\, L_n(y^2) = \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \,.\, \nu! \binom{n}{\nu} \binom{2\nu}{\nu} H_{2n-2\nu}(y), \qquad (34)$$

et en y appliquant la transformation $G(2, -ix)$, il résulte, par suite de (3c) et (21), le développement

$$2^n H_n^2\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) = 2^{2n} \mathcal{H}_n^2(x) = \sum_{\nu=0}^{n} \nu! \binom{n}{\nu} \binom{2\nu}{\nu} H_{2n-2\nu}(x). \qquad (35)$$

Les formules (34) et (35) sont encore „inverses" en ce sens que les coefficients des deux séries figurant aux seconds membres ne diffèrent que de $(-1)^\nu$.

Continuons, en cherchant le développement, analogue à (32),

$$2^n \,.\, \mathcal{H}_{2n}(y) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu^{(n)} \,.\, 2^\nu \nu!\, L_\nu(y^2). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (36)$$

---

20) HOWELL [1].

Pour déterminer les $a_\nu^{(n)}$, écrivons (36) sous la forme suivante, en tenant compte de (7) et (33″),

$$\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu^{(n)} \,.\, 2^\nu \nu!\, L_\nu(y^2) = \frac{(-1)^n}{2^n} \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \frac{(2n)!\, H_{2r}(y)}{(n-r)!\,(2r)!}$$

$$= \frac{(-1)^n}{2^n} \sum_{r=0}^{n} \frac{(2n)!}{(n-r)!\,(2r)!} \sum_{\nu=0}^{r} A_\nu^{(r)} \,.\, 2^{2\nu} \nu!\, L_\nu(y^2) =$$

$$= \frac{(-1)^n}{2^n} \sum_{\nu=0}^{n} \left\{ \sum_{r=\nu}^{n} A_\nu^{(r)} \frac{2^\nu (2n)!}{(n-r)!\,(2r)!} \right\} 2^\nu \nu!\, L_\nu(y^2)$$

et nous avons ainsi

$$a_\nu^{(n)} = \frac{(-1)^n}{2^{n-\nu}} \sum_{r=\nu}^{n} A_\nu^{(r)} \frac{(2n)!}{(n-r)!\,(2r)!} \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots, n) \quad . \quad (36a)$$

avec les valeurs ci-dessus des $A_\nu^{(r)}$.

Cette formule (36) a encore une interprétation intéressante. Appliquons, en effet, à ses deux membres, la transformation $G(2, ix)$. En tenant compte de (3b) et (21), on obtient ainsi le développement suivant:

$$(2x)^{2n} = (-1)^n \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu^{(n)} H_\nu^2(x), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (37)$$

avec la valeur (36a) des coefficients $a_\nu^{(n)}$.

Insérons ici encore la relation

$$(2x)^{2n} = \sum_{\nu=1}^{n} (n-\nu)! \binom{n-1}{\nu-1} \binom{2n-\nu-1}{n-1} (2x)^\nu H_\nu(x), \quad . \quad . \quad (38)$$

dont la vérification directe n'offre aucune difficulté.

Une série de la même nature est la suivante:

$$H_{2n}(y) = \sum_{\nu=0}^{n} B_\nu^{(n)} \,.\, (2y)^\nu H_\nu(y). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (39)$$

Pour calculer les $B_\nu^{(n)}$, considérons d'abord le développement inverse

$$(2y)^m H_n(y) = \sum_{r=0}^{m} C_r^{(m,n)} H_{m+n-2r}(y). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (40)$$

On peut écrire, au moyen de (4a) et (4b) que

$$C_r^{(m,n)} = \frac{n!}{(m+n-2r)!} \sum_{s=0}^{\min\left(r, \left[\frac{n}{2}\right]\right)} (-1)^s \frac{(m+n-2s)!}{s!\,(n-2s)!\,(r-s)!} \; (r=0,1,\ldots,m) \; (40a)$$

Pour $n=0$, on retrouve (4b). Si $m=n=\nu$,

$$(2y)^\nu H_\nu(y) = \sum_{r=0}^{\nu} C_{\nu-r}^{(\nu,\nu)} H_{2r}(y) = \sum_{r=0}^{\nu} C_r^{(\nu)} H_{2r}(y),$$

de sorte que

$$\sum_{\nu=r}^{n} B_\nu^{(n)} C_r^{(\nu)} = \begin{cases} 0, & \text{si } r \neq n \\ 1, & \text{si } r = n \end{cases} \quad \text{c'est-à-dire } B_n^{(n)} = \frac{1}{C_n^{(n)}}, \; . \quad . \quad (39')$$

d'où la détermination des $B_\nu^{(n)}$ suit immédiatement.

Nous verrons plus tard d'autres développements de cette sorte.

40. Développements des polynomes d'HERMITE en série de polynomes de LAGUERRE et inversement. — Nous avons vu, dans le n⁰. 3, des développements de $H_n(y)$ en séries de $L_r(y^2)$, d'une part, les relations (15) et (31) permettent d'autre part de développer $H_n(y)$ en séries de $L_r^{(\alpha)}(y^2)$, quel que soit le paramètre α. Dans les lignes qui suivent, nous chercherons l'expression

$$H_n(y) = \sum_{\nu=0}^{n} h_\nu^{(n,\alpha)} L_\nu^{(\alpha)}(\lambda y) \quad (\lambda \text{ étant un facteur arbitraire}) \quad . \quad (41)$$

qui admet des applications. Si nous employons les formules (4a) et (13b), nous trouvons

$$H_n(y) = \sum_{s=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^s \frac{n!}{s!} \left(\frac{2}{\lambda}\right)^{n-2s} \sum_{\nu=0}^{n-2s} (-1)^\nu \binom{n-2s+\alpha}{n-2s-\nu} L_\nu^{(\alpha)}(\lambda y),$$

d'où

$$h_\nu^{(n,\alpha)} = (-1)^\nu \sum_{s=0}^{\left[\frac{n-\nu}{2}\right]} (-1)^s \left(\frac{2}{\lambda}\right)^{n-2s} \frac{n!}{s!} \binom{n-2s+\alpha}{n-2s-\nu}. \quad . \quad . \quad (41a)$$

Le développement inverse, c'est-à-dire

$$L_n^{(\alpha)}(y) = \sum_{\nu=0}^{n} l_\nu^{(n,\alpha)} H_\nu(\mu y) \quad (\mu \text{ étant arbitraire}) \quad . \quad . \quad . \quad (42)$$

est aussi facile à déterminer. D'après les relations (13a) et (4b), on a

$$L_n^{(\alpha)}(y) = \sum_{s=0}^{n} (-1)^s \binom{n+\alpha}{n-s} \frac{1}{(2\mu)^s} \sum_{\nu=0}^{\left[\frac{s}{2}\right]} \frac{s!}{\nu!} \frac{H_{s-2\nu}(\mu y)}{(s-2\nu)!},$$

de sorte que

$$\left.\begin{aligned} (2\nu)!\, l_{2\nu}^{(n,\alpha)} &= \sum_{s=\nu}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{1}{(2\mu)^{2s}(s-\nu)!} \binom{n+\alpha}{n-2s}, \\ (2\nu+1)!\, l_{2\nu+1}^{(n,\alpha)} &= -\sum_{s=\nu}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \frac{1}{(2\mu)^{2s+1}(s-\nu)!} \binom{n+\alpha}{n-2s-1} \end{aligned}\right\} . \quad (42a)$$

Si l'on fait, dans (31), $x = y^2$, $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = 0$, en tenant compte de (15), on obtient

$$(-1)^n H_{2n+1}(y) = 2^{2n+1} n! \sum_{\nu=0}^{n} \frac{1}{2^{2\nu}} \binom{2\nu}{\nu} y \, L_{n-\nu}(y^2). \quad . \quad . \quad (32')$$

D'autre part, des mêmes relations, il résulte le développement inverse

$$(-1)^n 2^{2n} n! \, y \, L_n(y^2) =$$

$$= \tfrac{1}{2} H_{2n+1}(y) + \sum_{\nu=1}^{n} (-1)^{\nu-1} (\nu-1)! \binom{n}{\nu} \binom{2\nu-2}{\nu-1} H_{2n-2\nu+1}(y).$$

Mentionnons encore la relation suivante, déduite de (32′) au moyen de la transformation $G(2, -ix)$:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(y+ix)^2}{2}} \frac{H_{2n+1}(y)}{y} \, dy = (-1)^n 2^{2n} \sum_{\nu=0}^{n} \frac{\nu!}{2^{2\nu}} \binom{n}{\nu} \binom{2\nu}{\nu} \mathcal{H}_{n-\nu}^2(x), \quad (43)$$

que l'on pourra encore mettre, à l'aide de (15), sous la forme

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(y+ix)^2}{2}} L_n^{(\frac{1}{2})}(y^2) \, dy = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{\nu}{2^{2\nu+1}} \binom{n}{\nu} \binom{2\nu}{\nu} \mathcal{H}_{n-\nu}^2(x). \quad (43')$$

Il est, d'autre part, très facile à démontrer que

$$H_{2n+1}(y) = 2y \sum_{k=0}^{n} (-4)^{n-k} (n-k)! \binom{n}{k} H_{2k}(y), \quad . \quad . \quad . \quad (44)$$

de sorte que nous avons, d'après (3c), une autre expression de la somme figurant au second membre de (43):

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(y+ix)^2}{2}} \frac{H_{2n+1}(y)}{y} \, dy = 2(-1)^n \sum_{k=0}^{n} 4^{n-k} (n-k)! \binom{n}{k} H_{2k}(x)$$

D'ailleurs, les relations (24″) et (44) donnent lieu à l'autre développement

$$H_{2n+1}(y) = 2y \sum_{\nu=0}^{n} b_\nu^{(n)} H_\nu^2(y).$$

Par application de certaines transformations de GAUSS, nous pouvons encore trouver des relations entre $L_n(y^2)$ et $H_n(y)$ dignes d'intérêt. Nous laisserons au lecteur le soin d'établir de telles formules.

Pour ce qui est d'applications d'autre nature des développements (41) et (42), nous n'en indiquons que les suivantes. Posons, dans (41), $y = x^2$, $\alpha = -\frac{1}{2}$, $\lambda = 1$, qui prend ainsi la forme

$$H_n(x^2) = \sum_{\nu=0}^{n} h_\nu^{(n, -\frac{1}{2})} L_\nu^{(-\frac{1}{2})}(x^2) = \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \frac{1}{2^{2\nu} \nu!} h_\nu^{(n, -\frac{1}{2})} H_{2\nu}(x), \quad . \quad (45)$$

et (42) donne son inversion

$$H_{2n}(x) = (-1)^n . 2^{2n} n! \sum_{\nu=0}^{n} l_\nu^{(n, -\frac{1}{2})} H_\nu(x^2), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (45')$$

et encore

$$H_{2n+1}(x) = (-1)^n . 2^{2n+1} n! \sum_{\nu=0}^{n} l_\nu^{(n, +\frac{1}{2})} x \, H_\nu(x^2). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (45'')$$

Entre les coefficients des deux développements, il y a la relation suivante [21])

$$l_\nu^{(n, \frac{1}{2})} + 2(\nu+1) \, l_{\nu+1}^{(n+1, -\frac{1}{2})} = 0.$$

D'ailleurs, les coefficients de (45) et (45′) se déduisent immédiatement de (41a) et (42a).

Les relations précédentes permettent aussi de développer $H_n^2(x)$ en série de $H_r(x^2)$, et inversement, $H_n(x^2)$ en série de $H_r^2(x)$. Nous n'insistons pas ici sur la détermination des coefficients de ces deux séries.

---

[21]) Plus généralement, entre les coefficients de (42), on a la relation de récurrence

$$l_\nu^{(n-1, \alpha+1)} + 2(\nu+1) \, l_{\nu+1}^{(n, \alpha)} = 0.$$