Mathematics. — *Développements en série de polynomes d'*HERMITE *et de* LAGUERRE *à l'aide des transformations de* GAUSS *et de* HANKEL. II. Par ERVIN FELDHEIM. (Communicated by Prof. J. G. VAN DER CORPUT.)

(Communicated at the meeting of January 27, 1940.)

§ 3. *Généralisation d'une formule concernant le produit de deux polynomes d'*HERMITE.

1⁰. La formule générale. — Nous avons établi [22]) précédemment une formule résultant de l'application de la transformation $G(a, x)$ aux deux membres du développement (16).

Nous établirons dans ce n⁰. une généralisation de cette relation. Appliquons la formule (2) („fonction génératrice" des polynomes d'HERMITE) pour les variables $\frac{x+y}{\lambda}$ et $\frac{x+z}{\mu}$, multiplions leur produit par $e^{-\frac{x}{a}}$ $(Ra > 0)$, et intégrons de $-\infty$ à $+\infty$, par rapport à x. (La convergence uniforme de la série double permet l'intégration terme à terme.) On trouve

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^m T^n}{m!\,n!}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{a}} H_m\left(\frac{x+y}{\lambda}\right) H_n\left(\frac{x+z}{\mu}\right) dx =$$

$$= e^{2\left(\frac{ty}{\lambda}+\frac{Tz}{\mu}\right)-(t^2+T^2)}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{a}+2\left(\frac{t}{\lambda}+\frac{T}{\mu}\right)x} dx$$

$$= \sqrt{a\pi}\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{t^{p+r}\,T^{q+r}\left(1-\frac{a}{\lambda^2}\right)^{\frac{p}{2}}\left(1-\frac{a}{\mu^2}\right)^{\frac{q}{2}}(2a)^r}{(\lambda\mu)^r\,p!\,q!\,r!}$$

$$\times H_p\left(\frac{y}{\sqrt{\lambda^2-a}}\right) H_q\left(\frac{z}{\sqrt{\mu^2-a}}\right).$$

En identifiant les puissances correspondantes de t et T aux deux membres, c'est-à-dire, prenant $p=m-r$, $q=n-r$ $(r=0, 1, 2, \ldots, \min(m, n)$, où

[22]) FELDHEIM [1], [8].

$\min(m, n)$ désigne le plus petit des deux nombres m et n), nous obtenons la transformation-intégrale désirée:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{\sqrt{a\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{a}} H_m\left(\frac{x+y}{\lambda}\right) H_n\left(\frac{x+z}{\mu}\right) dx =\\ &= \left(1-\frac{a}{\lambda^2}\right)^{\frac{m}{2}}\left(1-\frac{a}{\mu^2}\right)^{\frac{n}{2}}\sum_{r=0}^{\min(m,n)}\left(\frac{2a}{\sqrt{(\lambda^2-a)(\mu^2-a)}}\right)^r\\ &\times r!\binom{m}{r}\binom{n}{r} H_{m-r}\left(\frac{y}{\sqrt{\lambda^2-a}}\right) H_{n-r}\left(\frac{z}{\sqrt{\mu^2-a}}\right)\quad (Ra>0)\end{aligned}\right\} . \quad (46)$$

Dans cette formule y et z sont deux variables auxiliaires, pouvant prendre toute valeur dans l'intervalle $(-\infty, +\infty)$, λ et μ deux paramètres arbitraires et a une quantité soumise à la condition $Ra > 0$.

Observons que dans l'application de cette relation il faut faire attention au signe des racines carrées figurant dans la somme du second membre.

Cette formule contient, comme cas particuliers, un grand nombre des relations démontrées ou énumérées dans les deux premiers paragraphes. Nous en déduirons, dans le n⁰. suivant, d'autres formules intéressantes.

2⁰. Cas particuliers de (46). — *a*. Le développement (24). Généralisation.

Multiplions les deux membres de (46) par $\lambda^m \mu^n$, soit $a=1$, et faisons tendre λ et μ vers zéro. Pour ne pas introduire une erreur dans le signe de la racine carrée figurant dans le coefficient du développement (46), faisons d'abord $\lambda=\mu$, de sorte que nous aurons l'expression $\left(\frac{2a}{\lambda^2-a}\right)^r$. En remplaçant ensuite y et z respectivement par iy et iz, nous obtenons la généralisation suivante de la formule (24):

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, 2^{m+n}(y+ix)^m (z+ix)^n\, dx =\\ &= \sum_{r=0}^{\min(m,n)} (-2)^r\, r!\binom{m}{r}\binom{n}{r} H_{m-r}(y)\, H_{n-r}(z)\end{aligned}\right\} . \quad (47)$$

Si l'on fait ici $z=y$, le second membre se réduit à celui de (24), le premier, par contre, se met, en vertu de (3*a*), sous la forme

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x+iy)^2}(2ix)^{m+n}\, dx = H_{m+n}(y), \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

Passons maintenant à d'autres cas particuliers de (46). Si l'on fait dans (47), $z = -y$ et $m = n$, on trouve

$$\frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} (x^2 + y^2)^n \, dx = \sum_{r=0}^{n} 2^{n-r} (n-r)! \binom{n}{r}^2 H_r^2(y), \quad (47a)$$

qui peut se confronter à (16): les coefficients des deux développements des seconds membres sont égaux (pour $m = n$).

Ensuite, en faisant tendre, dans (46), λ vers 0, et posant $a = 1$, $\mu = 1$, $z = y$, il vient

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-iy)^2} (2x)^m H_n(x) \, dx = \\ &= i^{m+n} \sum_{r=0}^{\min(m,n)} (-2)^r r! \binom{m}{r} \binom{n}{r} (2y)^{m-r} H_{n-r}(y), \end{aligned}\right\} \quad (48)$$

qui peut se confronter aux développements (39) et (40).

D'ailleurs, pour $\lambda = \mu = 1$, $a = 1$, (46) se réduit, comme il est très facile de s'en rendre compte, à la formule (20), et à plus forte raison, à (19). (46) peut encore être considérée comme la généralisation de la formule fondamentale (3).

Nous allons généraliser ici la relation inverse (21), ce qui fournira aussi une démonstration directe pour cette formule. Cherchons, en effet, la transformation $G(a, ix)$ du produit $y^p L_n^{(q)}(\lambda y^2)$, p, q, et λ étant assujettis seuls à des restrictions nécessaires pour que l'intégrale existe, et $Ra > 0$. En tenant compte de (13a), on aura

$$y^p L_n^{(q)}(\lambda y^2) = \sum_{s=0}^{n} (-1)^s \binom{n+q}{n-s} \frac{\lambda^s}{2^{2s+p} s!} (2y)^{2s+p},$$

de sorte que, d'après (3a),

$$\frac{1}{\sqrt{\pi a}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(y-ix)^2}{a}} (iy)^p L_n^{(q)}(\lambda y^2) dy = \sum_{s=0}^{n} \binom{n+q}{n-s} \frac{\lambda^s}{s!} \left(\frac{\sqrt{a}}{2}\right)^{2s+p} H_{2s+p}\left(\frac{x}{\sqrt{a}}\right),$$

ou encore

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(y-ix)^2} (2iy)^p L_n^{(q)}(\lambda y^2) \, dy = \sum_{s=0}^{n} \left(\frac{\lambda}{4}\right)^s \binom{n+q}{n-s} \frac{H_{2s+p}(x)}{s!} \quad . \quad . \quad (49)$$

Si $p = q = m - n$, $\lambda = 2$, le second membre de (49) se transforme facilement de façon à redonner, en vertu de (16), la relation (21) [23].

[23]) Un résultat encore plus général serait le calcul de l'intégrale

$$\frac{1}{\sqrt{\pi a}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(y-x)^2}{a}} L_m^{(\alpha)}\left(\frac{y^2}{\lambda}\right) L_n^{(\beta)}\left(\frac{y^2}{\mu}\right) dy.$$

On démontre aussi la relation suivante, s'attachant aux formules inverses (19) et (21),

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{\sqrt{\pi a}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(y-x)^2}{a}} H_m(y) H_n(y) \, dy = \\ &= \frac{2^m n!}{\sqrt{\pi(1-a)}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(y+ix)^2}{1-a}} (iy)^{m-n} L_n^{(m-n)}(2y^2) \, dy, \end{aligned}\right\} \quad (50)$$

avec $m \geqq n$, $0 < a < 1$, x étant une quantité quelconque de l'intervalle $(-\infty, +\infty)$. On en tire encore, par exemple, la formule intéressante

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(y-x)^2} \mathcal{H}_m(y) \mathcal{H}_n(y) \, dy = 2^m n! \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(y+ix)^2} (iy)^{m-n} L_n^{(m-n)}(y^2) \, dy \,. \quad (50')$$

quel que soit x.

b. Autres représentations-intégrales déduites de (46). — En examinant de plus près la formule (46), nous constatons que le second membre peut encore être mis sous forme plus simple, notamment à être identique à celui du développement (24), pour d'autres valeurs particulières des paramètres a, λ, μ, que celles que nous en avons attribuées dans a. Soit, en effet,

$$a = \frac{\lambda^2 \mu^2}{\lambda^2 + \mu^2}, \quad y = \frac{v \lambda^2}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}}, \quad z = -\frac{v \mu^2}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}}.$$

Alors (46) prend la forme suivante

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} H_m\left(\frac{\mu t + \lambda v}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}}\right) H_n\left(\frac{\lambda t - \mu v}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}}\right) dt = \\ &= (-1)^n \frac{\lambda^m \mu^n}{(\lambda^2 + \mu^2)^{\frac{m+n}{2}}} H_{m+n}(v), \end{aligned}\right\} \quad . \quad (51)$$

ou encore, en désignant par θ un angle arbitraire,

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} H_m(t \sin\theta + v \cos\theta) H_n(t \cos\theta - v \sin\theta) \, dt = \\ &= (-1)^n \cos^m\theta \sin^n\theta \,.\, H_{m+n}(v). \end{aligned}\right\} \quad (52)$$

Pour $\theta = \frac{\pi}{4}$, (52) se réduit à

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} \mathcal{H}_m(v+t) \mathcal{H}_n(v-t) \, dt = \frac{1}{2^{m+n}} H_{m+n}(v), \quad . \quad . \quad (52a)$$

tandisque de (20),

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} H_m(t+v) H_n(t-v)\,dt = 2^m n!\, v^{m-n} L_n^{(m-n)}(2v^2), \quad (m \geqq n) \quad (20')$$

fournissant ainsi pour le second membre une représentation-intégrale légèrement différente de (19). Remarquons que de (20′) résulte aussi l'orthogonalité des polynomes d'HERMITE $H_m(t)$.

c. Une formule de HOWELL. — Montrons finalement comment les développements (16) et (24) peuvent servir à démontrer très simplement la formule [24])

$$H_n^2(x) = \frac{(-2)^n}{\binom{2n}{n}} \cdot \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} H_{2n}(x\sqrt{1-\sec\varphi}) \cos^n\varphi\, d\varphi. \quad . \quad . \quad (53)$$

Or, d'après (4),

$$\cos^n\varphi\, H_{2n}(x\sqrt{1-\sec\varphi}) = (-1)^n \sum_{\nu=0}^{n} (1-\cos\varphi)^\nu \frac{(2n)!\, H_{2\nu}(x)}{(n-\nu)!\,(2\nu)!}$$

de sorte que

$$\frac{(-2)^n}{\binom{2n}{n}} \cdot \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} H_{2n}(x\sqrt{1-\sec\varphi}) \cos^n\varphi\, d\varphi =$$

$$= \frac{2^n}{\binom{2n}{n}} \sum_{\nu=0}^{n} \frac{(2n)!\, H_{2\nu}(x)}{(n-\nu)!\,(2\nu)!} \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (1-\cos\varphi)^\nu\, d\varphi.$$

Etant donné que $\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(1-\cos\varphi)^\nu\, d\varphi = \frac{1}{2^\nu}\binom{2\nu}{\nu}$, le second membre de (53) s'écrit ainsi, en tenant encore compte de (16):

$$\frac{2^n}{\binom{2n}{n}} \sum_{\nu=0}^{n} \frac{(2n)!}{(n-\nu)!\,(2\nu)!\,2^\nu} \binom{2\nu}{\nu} H_{2\nu}(x) =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{n} 2^{n-\nu}(n-\nu)! \binom{n}{\nu}^2 H_{2\nu}(x) = H_n^2(x),$$

ce qui achève la démonstration de (53).

On aurait pu démontrer de la même façon les formules donnant le produit $H_m(x) H_n(x)$ par une intégrale finie de la même nature [25]).

[24]) HOWELL [3].

[25]) W. N. BAILEY, Journal of the London Mathematical Society, **13**, 202—203 (1938). Voir aussi ERDÉLYI [5].

Nous étudierons encore, pour terminer, quelques problèmes relatifs aux polynomes de LAGUERRE, analogues à ceux traités pour les polynomes d'HERMITE.

§ 4. *Développements en série de polynomes de* LAGUERRE.

1⁰. Impossibilité de certains développements. — Cherchons, en analogie avec (24″) et (24′), si l'on peut avoir les développements en série de polynomes de LAGUERRE,

$$L_{2n}^{(2\alpha)}(y) = \sum_{r=0}^{n} a_r^{(n)} \{L_r^{(\alpha)}(y)\}^2, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (54)$$

et plus généralement, avec $R(\alpha+\beta) > -1$,

$$L_{2n}^{(\alpha+\beta)}(y) = \sum_{r=0}^{n} b_r^{(n)} L_r^{(\alpha)}(y) L_r^{(\beta)}(y). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (55)$$

Appliquons à (55) la transformation de HANKEL, c'est-à-dire, multiplions les deux membres par $e^{-y} y^{\frac{\alpha+\beta}{2}} J_{\alpha+\beta}(2\sqrt{xy})$, et intégrons-les par rapport à y de 0 à ∞. En vertu de (12a) et (22), (55) devient

$$\frac{x^{2n}}{(2n)!} = \sum_{s=0}^{n} b_s^{(n)} L_s^{(\alpha)}(x) L_s^{(\beta)}(x). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (56)$$

Les seconds membres de (56) et (55) étant identiques, il en devrait être de même des premiers membres, ce qui est évidemment absurde. Les développements (54), (55) et (56) sont donc impossibles.

De même, si nous cherchons l'inversion du premier des développements (18), sous la forme

$$L_{m+n}^{(\alpha+\beta)}(y) = \sum_{r=0}^{\min(m,n)} c_r^{(m,n)} L_{m-r}^{(\alpha)}(y) L_{n-r}^{(\beta)}(y), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (57)$$

nous démontrons, à l'aide de (22), l'impossibilité de telle formule.

2⁰. Développements possibles en polynomes de LAGUERRE. — Examinons maintenant s'il existe une valeur du paramètre γ pour laquelle le développement

$$L_{2n}^{(\gamma)}(y) = \sum_{r=0}^{n} d_r^{(n)} L_r^{(\alpha)}(y) L_r^{(\beta)}(y) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (58)$$

soit valable, les coefficients $d_r^{(n)}$ dépendant encore de α, β et de γ. Appliquons à (58) la transformation de HANKEL de tout à l'heure. Si nous tenons compte de (22*a*), la transformée du premier membre de (58) sera

$$\int_0^\infty J_{\alpha+\beta}\,(2\sqrt{xy})\, e^{-y}\, y^{\frac{\alpha+\beta}{2}}\, L_{2n}^{(\gamma)}(y)\, dy = e^{-x}\, x^{\frac{\alpha+\beta}{2}}\, L_{2n}^{(\alpha+\beta-\gamma-2n)}(x).$$

Le second membre, abstraction faite du facteur $e^{-x}\, x^{\frac{\alpha+\beta}{2}}$, ne changeant pas par cette transformation, l'identification donne pour γ la valeur $\gamma = \frac{\alpha+\beta}{2} - n$, de sorte que le développement cherché est

$$L_{2n}^{\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-n\right)}(y) = \sum_{r=0}^{n} d_r^{(n)}\, L_r^{(\alpha)}(y)\, L_r^{(\beta)}(y). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (58')$$

Pour déterminer les coefficients $d_r^{(n)}$, considérons le développement inverse

$$L_n^{(\alpha)}(y)\, L_n^{(\beta)}(y) = \sum_{r=0}^{n} f_r^{(n)}\, L_{2r}^{\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-r\right)}(y), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (58'')$$

dont les coefficients $f_r^{(n)}$ sont donnés par application convenable de (17) et (17′). Or, entre les coefficients de ces deux dernières séries (58′) et (58″), il existe la relation suivante

$$\sum_{r=s}^{n} f_r^{(n)}\, d_s^{(r)} = \begin{cases} 0, & \text{si } s \neq n \\ 1, & \text{si } s = n \end{cases}, \qquad f_n^{(n)} = \binom{2n}{n},$$

de sorte que

$$d_{n-r}^{(n)} = \frac{(-1)^r}{\binom{2n}{n}\binom{2n-2}{n-1}\cdots\binom{2n-2r}{n-r}}\, \left\| f_{n-k}^{(n-j+1)} \right\| \quad (j, k = 1, 2, \ldots, r) \quad (59)$$

où le symbole $\| f_{n-k}^{(n-j+1)} \|$ désigne le déterminant dans lequel les éléments correspondants aux valeurs $j > k+1$ sont nuls, les indices supérieurs étant les mêmes dans une même ligne, les indices inférieurs étant égaux dans une même colonne.

Indiquons quelques cas particuliers de (58). Si $\alpha = \beta$, on a

$$L_{2n}^{(\alpha-n)}(y) = \sum_{r=0}^{n} d_r^{(n,\alpha)} \{ L_r^{(\alpha)}(y) \}^2,$$

ce qui prend, respectivement pour les valeurs $\alpha = n$ et $\alpha = 0$, les formes

$$L_{2n}(y) = \sum_{r=0}^{n} d_r^{(n,n)} \{ L_r^{(n)}(y) \}^2,$$

et

$$(-1)^n\, n!\, y^n\, L_n^{(n)}(y) = \sum_{r=0}^{n} d_r^{(n,0)} \{ L_r(y) \}^2.$$

D'une autre côté, il peut être essayé de trouver le développement suivant

$$L_{2n}^{(\alpha+\beta)}(2y) = \sum_{r=0}^{n} g_r^{(n,\alpha,\beta)}\, L_r^{(\alpha)}(y)\, L_r^{(\beta)}(y), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (60)$$

dont la possibilité résulte de (12*c*) et (22). La détermination effective des coefficients g_r peut se faire de la même façon que celle des d_r. Ainsi, par exemple, tandis que $L_{2n}(y)$ ne peut pas être développé en une série procédant selon les $\{L_r(y)\}^2$, le polynome $L_{2n}(2y)$ peut bien être développé en une telle série.

Nous terminons ici cet exposé, en réservant quelques uns des résultats de nos recherches concernant les polynomes de LAGUERRE, pour un autre travail en préparation.

BIBLIOGRAPHIE.

APPELL, P.-J. KAMPÉ DE FÉRIET:

1. Fonctions hypergéométriques et hypersphériques. Polynomes d'HERMITE. (1926). Paris. Gauthier-Villars.

A. ERDÉLYI:

1. Funktionalrelationen mit konfluenten hypergeometrischen Funktionen. Erste Mitteilung: Additions- und Multiplikationstheoreme. Math. Zeitschrift, **42**, 125—143 (1936).
2. The HANKEL Transform of a Product of WHITTAKER's functions. Journ. London Math. Soc., **13**, 146—154 (1938).
3. On some expansions in LAGUERRE Polynomials. Ibidem, **13**, 154—156.
4. On certain HANKEL Transforms. Quarterly Journ. of Math., **9**, 196—198 (1938).
5. An integral representation for the product of two WHITTAKER functions. Journ. of the London Math. Soc. **14**, 23—30 (1939).

E. FELDHEIM:

1. Applicazioni dei polinomi di HERMITE a qualche problema di calcolo delle probabilità. Giorn. Ist. Ital. Attuari, **8**, 303—327 (1937).
2. Quelques nouvelles relations pour les polynomes d'HERMITE. Journ. London Math. Soc. **13**, 22—29 (1938).
3. Polynomes d'HERMITE et inversion des transformations de GAUSS et de LAPLACE. Rendic. Sem. Mat. R. Univ. di Roma, 2 (1938).
4. Résolution de quelques équations fonctionnelles au moyen des polynomes d'HERMITE. Bulletin des Sciences Math. **62** (1938).
5. Formules d'inversion et autres relations pour les polynomes orthogonaux classiques. Bull. Soc. Math. de France. (Sous presse.)
6. Sur les fonctions génératrices des polynomes de LAGUERRE et d'HERMITE. Bull. des Sciences Math. (Sous presse).
7. La transformation de GAUSS à plusieurs variables. Application aux polynomes d'HERMITE et à la généralisation de la formule de MEHLER. Compositio Math. (Sous presse.)
8. Expansions and Integral-Transforms for Products of LAGUERRE and HERMITE Polynomials. Quarterly Journ. of Math. (Sous presse.)

W. T. HOWELL:

1. On Products of LAGUERRE Polynomials. Philos. Magazine. **7** (24), 396—405 (1937).
2. On some operational Representations of Products of Parabolic Cylinder Functions. Ibidem, **7** (24), 1082—1093 (1937).

3. Integral-Representations for Products of WEBER's Parabolic Cylinder Functions. Ibidem, **7** (25), 456—458 (1938).
4. A Note on HERMITE Polynomials. Ibidem, **7** (25), 600—601 (1938).
5. On a Class of Functions which are Self-Reciprocal in the HANKEL-Transform. Ibidem, **7** (25), 622—628 (1938).

F. TRICOMI:
1. Sulle trasformazioni funzionali lineari commutabili con la derivazione. Comment. Math. Helvet. **8**, 70—87 (1935—6).
2. Sulla trasformazione e il teorema di reciprocità di HANKEL. Rendic. Lincei. **22**, 564—571 (1935).
3. Les transformations de FOURIER, LAPLACE et GAUSS, et leurs applications au calcul des probabilités et à la Statistique. Annales de l'Inst. H. POINCARÉ. **8**, 111—149 (1938).

G. N. WATSON:
1. Notes on generating functions of polynomials. Journ. London Math. Soc. **8**, 189—192, 194—199 (1933).
2. An integral equation for the square of a Laguerre polynomial. Ibidem, **11**, 256—261 (1936).
3. A Note on the polynomials of HERMITE and LAGUERRE. Ibidem, **13**, 29—32 (1938).

Budapest, le 5 novembre 1939.

Botany. — *On the Effect of Substances, produced by Fungi, on the Respiration of the Tissue of Potato Tubers,* I. (Preliminary report.) By J. J. A. HELLINGA. (Communicated by Prof. J. C. SCHOUTE.)

(Communicated at the meeting of January 27, 1940.)

INTRODUCTION.

The aim of the investigations, reported in this paper, was to study the metabolism of plants affected by infectious diseases.

In many cases the morphology of the infection by parasitic fungi has been thoroughly studied. On the other hand, very little is known of the physiological interaction between parasite and host plant. Mostly the physiological research on the relation between parasite and host is confined to the mechanism of the attack, resistancy factors and physical and chemical alterations within the host plant. This line of research has been broadly reviewed by BROWN (1936).

The primary reaction of the host plant, however, i.e. the changes in its metabolism, by which a stated abnormality in physical and chemical properties mainly is initiated, has been left out of consideration in most cases. This must be due to the difficulties of such a research, since its importance is obvious. Information on the pathological metabolism would not only increase the knowledge of the nature of plant diseases, but probably also that of the mechanism of the metabolism in general.

Still, this field of research is not entirely unexplored. From the literature a number of data on the respiration of infected and diseased plants is known; most of them have been cited by FISCHER and GÄUMANN (1929) and by ROEMER, FUCHS and ISENBECK (1938). Although the effect of widely differing parasites has been investigated, generally an increase of CO_2 production and/or O_2 comsumption has been observed. Since in most cases the total respiration of host plus parasite had been determined together, it could not be discriminated with certainly whether the increase in respiration was exclusively due to the own respiration of the parasite. In several cases, however, it has been made evident that at least a part of the higher gas exchange is caused by an increased respiration of the host plant. In potato tubers, infected by *Bacillus phytophthorus,* EGLITS (1933) found a rise in temperature not only in the infected part, but also in the surrounding, not infected tissue. This observation suggests a higher metabolic intensity of the tissue of the host under the influence of the parasite. Recently, ALLEN and GODDARD (1938) ingeniously succeeded in separating the respiration of the parasite and that of the host by