ist natürlich diese Gleichung sofort hin zu schreiben. Wie kann aber K durch die quinären Invarianten dargestellt werden? Hier bekommen wir, wenn wir in (25) für die π_{ik} die fünfte bis neunte Gerade einsetzen, für die sechs homogenen λ_{rs} fünf Gleichungen, können diese λ_{rs} also eliminieren und erhalten eine sechsreihige Determinante für K:

$$K = \begin{vmatrix} (12-13) & (14-12) & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & (32-34) \\ (12-13)_5 & (14-12)_5 & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & (32-34)_5 \\ \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ (12-13)_9 & (14-12)_9 & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & (32-34)_9 \end{vmatrix} = 0 \quad . \quad (28)$$

Hier bedeutet z.B. $(12-13)_5$, dass für π_{ik} in (26) die Koordinaten der fünften Geraden eingesetzt sind. Wir ersehen hieraus, dass

$$(A_1\, A_2\, A_3\, A_4)^6 \,.\, K$$

ein Polynom von Komitanten des Typus (1) wird.

Mathematics. — *Ueber assoziierte Geraden bei Regelflächen im R_4*

Von R. WEITZENBÖCK.

(Communicated at the meeting of February 24, 1940.)

Uebersicht. Zu vier erzeugenden Geraden G_1 bis G_4 einer zweidimensionalen Regelfläche F im vierdimensionalen Raume R_4 lässt sich die „assoziierte" Gerade G_5 konstruieren. Wenn die vier G_i gegen eine Erzeugende a von F konvergieren, nähert sich auch die assoziierte Gerade G_5 einer Grenzlage g. Man erhält so — von Ausnahmen abgesehen — zu jeder Erzeugenden a von F eine assoziierte Gerade g; sie bilden in ihrer Gesamtheit die zu F „assoziierte Regelfläche".

Ich ermittle hier die Gleichung von g unter der Voraussetzung, dass die homogenen Linienkoordinaten a_{ik} der Erzeugenden a von F als reguläre Funktionen eines Parameters gegeben sind. Die hierzu erforderlichen Rechnungen sind nicht ganz mühelos, man hat bis zu den Gliedern dreissigster Ordnung in den benutzten Potenzreihen vorzudringen.

§ 1.

Die Geraden einer einparametrigen Schaar bildem im R_4 die Erzeugenden einer zweidimensionalen Regelfläche F. Wir denken uns F analytisch gegeben durch die zehn homogenen Koordinaten a_{ik} einer Erzeugenden, wobei diese a_{ik} stetige und genügend oft differenzierbare Funktionen eines komplexen Parameters t sind:

$$a_{ik} = a_{ik}(t) \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, 5).$$

Da die a_{ik} Linienkoordinaten sind, verschwinden die fünf quadratischen Ausdrücke

$$\Sigma\, a_{23}\, a_{45},\; \Sigma\, a_{13}\, a_{45}, \ldots, \Sigma\, a_{12}\, a_{34}$$

für alle Werte von t. Wenn b mit a äquivalent ist, lässt sich dies symbolisch ausdrücken durch das Nullsein der Kovariante

$$4 \,.\, \Sigma\, x_1\, a_{23}\, a_{45} = (xa^2\, b^2) = M'_{00} = 0 \qquad \{x, t\}.$$

Hieraus ergeben sich durch fortgesetztes Differenzieren nach t eine Reihe von Gleichungen, die für das Folgende von grundlegender Bedeutung sind.

Wir setzen

$$(a_1)_{ik} = \frac{d\, a_{ik}(t)}{dt},\; (a_2)_{ik} = \frac{d^2\, a_{ik}(t)}{dt^2}, \ldots$$

und deuten $a, a_1, a_2, \ldots$ an durch die Ziffern $0, 1, 2, \ldots$. Dann ergibt sich, identisch in t:

$$\left.\begin{array}{r} M'_{00}=0 \\ M'_{01}=0 \\ M'_{11}+M'_{02}=0 \\ 3\,M'_{12}+M'_{03}=0 \\ 3\,M'_{22}+4\,M'_{13}+M'_{04}=0 \\ 10\,M'_{23}+5\,M'_{14}+M'_{05}=0 \\ 10\,M'_{33}+15\,M'_{24}+6\,M'_{15}+M'_{06}=0 \\ 35\,M'_{34}+21\,M'_{25}+7\,M'_{16}+M'_{07}=0 \\ 35\,M'_{44}+56\,M'_{35}+28\,M'_{26}+8\,M'_{17}+M'_{08}=0 \\ 126\,M'_{45}+84\,M'_{36}+36\,M'_{27}+9\,M'_{18}+M'_{09}=0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (1)$$

Hier sind die $(a_1)_{ik}$, $(a_2)_{ik}, \ldots$ die Koordinaten von linearen Ebenenkomplexen $K_1, K_2 \ldots$. Der Komplex K_h ist speziell, stellt also eine Gerade dar, wenn $M'_{hh}=0$ gilt. So ist z.B. der Komplex K_1 speziell für $M'_{11}=-M'_{02}=0$; wegen $M'_{01}=0$ enthält K_1 jede Ebene durch die Erzeugende a_{ik}.

Wenn die Fläche F eine Torse ist, d.h. ihre Erzeugenden die Tangenten einer Raumkurve

$$y_i=y_i(t) \qquad (i=1, 2, \ldots, 5)$$

sind, so findet man

$$\begin{aligned} a_{ik} &= (y\,y')_{ik} \\ (a_1)_{ik} &= (y\,y'')_{ik} \\ (a_2)_{ik} &= (y'\,y'')_{ik}+(y\,y''')_{ik} \\ (a_3)_{ik} &= 2\,(y'\,y''')_{ik}+(y\,y^{IV})_{ik} \\ &\text{u. s. f.} \end{aligned}$$

woraus sich ausser $M'_{00}=0$, $M'_{01}=0$ noch weiters ergibt:

$$M'_{11}=0,\ M'_{02}=0,\ M'_{12}=0,\ M'_{03}=0.$$

Dagegen sind die M'_{ik} mit $i+k \geqq 4$ im Allgemeinen nicht Null.

Liegt F gänzlich in einem linearen R_3, so ist M'_{02} bis auf einen von t abhängigen Faktor eine Linearform in x mit konstanten Koeffizienten:

$$M'_{02}=(v'\,x)\,.\,f(t) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Wir wollen im Folgenden diese beiden Fälle ausschliessen, *also voraussetzen, dass die Fläche F weder abwickelbar sei noch zur Gänze in einem linearen R_3 liege.*

§ 2.

Vier Geraden 1 bis 4 mit den Koordinaten a_{ik}, α_{ik}, p_{ik} und m_{ik} haben im R_4 die vier Invarianten

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= (m a^2 p^2)\,(m a^2 \alpha^2)=(m S'_{13})\,(m S'_{12}) \\ A_2 &= (a \alpha^2 p^2)\,(a \alpha^2 m^2)=(a S'_{23})\,(a S'_{24}) \\ A_3 &= (\alpha a^2 p^2)\,(\alpha p^2 m^2)=(\alpha S'_{13})\,(\alpha S'_{34}) \\ A_4 &= (p a^2 m^2)\,(p \alpha^2 m^2)=(p S'_{14})\,(p S'_{24}) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

und die Gleichung der zu 1 bis 4 assoziierten Geraden G_5 wird gegeben durch [1]):

$$G_5=G_1 A_2 A_3 A_4+G_2 A_1 A_3 A_4+G_3 A_1 A_2 A_4+G_4 A_1 A_2 A_3=0. \quad (4)$$

Wir nehmen jetzt als Geraden 1 bis 4 vier Erzeugende von F, entsprechend den vier Parameterwerten α, β, γ und δ. Es ist dann also

$$\left.\begin{aligned} G_1 &= a_{ik}+\frac{\alpha}{1!}(a_1)_{ik}+\frac{\alpha^2}{2!}(a_2)_{ik}+\ldots=0_{ik}+\frac{\alpha}{1!}1_{ik}+\frac{\alpha^2}{2!}2_{ik}+\ldots \\ G_2 &= a_{ik}+\frac{\beta}{1!}(a_1)_{ik}+\frac{\beta^2}{2!}(a_2)_{ik}+\ldots=0_{ik}+\frac{\beta}{1!}1_{ik}+\frac{\beta^2}{2!}2_{ik}+\ldots \\ &\text{u. s. f. mit } \gamma \text{ und } \delta. \end{aligned}\right\} \quad . \quad (5)$$

Für diese G_i wollen wir (4) berechnen. Hierzu haben wir vorerst die A_i nötig.

Wir berechnen A_1. Aus (5) finden wir zuerst für S'_{12}, wenn wir aus allen Gliedern den Faktor $\frac{1}{2}(\alpha-\beta)^2$ absondern:

$$\left.\begin{aligned} S'_{12} = M'_{02} &+ \left[\frac{1}{3}(\alpha+\beta)\,M'_{03}\right]+\left[\frac{1}{12}(\alpha+\beta)^2 M'_{04}+\frac{1}{3}\alpha\beta\,M'_{13}\right]+ \\ &+ \left[\frac{1}{60}(\alpha+\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)\,M'_{05}+\frac{1}{12}\alpha\beta(\alpha+\beta)\,M'_{14}\right]+ \\ &+ \left[\frac{1}{360}(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)^2 M'_{06}+\frac{1}{30}\alpha\beta(\alpha+\beta)^2 M'_{15}+\frac{1}{24}\alpha^2\beta^2 M'_{24}\right]+ \\ &+ \left[\frac{2}{7!}(\alpha+\beta)(\alpha^2+\beta^2)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)\,M'_{07}+\right. \\ &\qquad \left.+\frac{1}{360}\alpha\beta(\alpha+\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)\,M'_{16}+\frac{1}{120}\alpha^2\beta^2(\alpha+\beta)\,M'_{25}\right]+ \\ &+ \left[\frac{2}{8!}(\alpha+\beta)^2(\alpha^2+\beta^2)^2 M'_{08}+\frac{2}{7!}\alpha\beta(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)^2 M'_{17}+\right. \\ &\qquad \left.+\frac{1}{720}\alpha^2\beta^2(\alpha+\beta)^2 M'_{26}+\frac{1}{360}\alpha^3\beta^3 M'_{35}\right]+ \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

---

1) Vgl. diese Proceedings 42, 248 (1939).

Wir haben hier die Glieder gleich hohen Grades in α, β zwischen eckige Klammern gesetzt. Aus (6) lesen wir ab, dass

$$(x M_{02}') = (x a^2 a_2^2) = (x 0^2 2^2) = 0$$

die Gleichung des längs der Erzeugenken a_{ik} berührenden R_3 darstellt.

Vertauschen wir in (6) β mit γ, so ergibt sich S_{13}' und damit lässt sich nach der ersten Gleichung der Formeln (3) A_1 berechnen. Wenn wir zunächst m_{ik} allgemein lassen. so ergibt sich nach Abspaltung des Faktors $\frac{1}{3}(\beta-\gamma)$, also bis auf den Faktor

$$\frac{1}{12}(\alpha-\beta)^2(\alpha-\gamma)^2(\beta-\gamma) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

für $(m S_{13}')(m S_{12}')$ die Reihe

$$\left.\begin{aligned}
(m S_{13}')(m S_{12}') = {} & m_{02,03} + \left[\frac{1}{4}(2\alpha+\beta+\gamma)\, m_{02,04} + \alpha\, m_{02,13}\right] + \\
& + \left[\frac{1}{12}(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)\, m_{03,04} + \frac{1}{3}\alpha^2 m_{03,13} + \right. \\
& + \frac{1}{4}\{\alpha^2 + \alpha(\beta+\gamma)\}\, m_{02,14} + \\
& \left. + \frac{1}{20}\{2\alpha^2 + 2\alpha(\beta+\gamma) + \beta^2 + \beta\gamma + \gamma^2\}\, m_{02,05}\right] + \\
& + \left[\frac{1}{120}\{2\alpha^2 + \alpha(\beta+\gamma) + \beta^2 + \gamma^2\}(\alpha+\beta+\gamma)\, m_{02,06} + \right. \\
& + \frac{1}{10}\{\alpha^2 + 2\alpha(\beta+\gamma) + \beta^2 + \beta\gamma + \gamma^2\}\, m_{02,15} + \\
& + \frac{1}{8}\alpha^2(\beta+\gamma)\, m_{02,24} + \frac{1}{60}(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)(\alpha+\beta+\gamma)\, m_{03,05} + \\
& \left. + \frac{1}{12}\alpha(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)\, m_{03,14} + \frac{1}{12}\alpha(\alpha^2-\beta\gamma)\, m_{04,13}\right] + \\
& + \left[\varrho_0\, m_{02,07} + \varrho_1\, m_{02,16} + \varrho_2\, m_{02,25} + \frac{1}{12}\alpha^2\beta\gamma\, m_{13,14}\right] + \ldots.
\end{aligned}\right\} \quad (8)$$

In (8) haben wir schliesslich nach (5) für m_{ik} die Reihe

$$0_{ik} + \frac{\delta}{1!} 1_{ik} + \frac{\delta^2}{2!} 2_{ik} + \ldots.$$

einzusetzen um die verlangte Potenzreihe für A_1 zu erhalten. Die Rechnung ergibt, wenn wir für das Differenzenprodukt

$$\Pi = (\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)(\beta-\delta)(\gamma-\delta) \quad \ldots \quad (9)$$

die Abkürzung Π gebrauchen und

$$Q = 0_{13,23} = (a a_1^2 a_3^2)(a a_2^2 a_3^2) \quad \ldots \ldots \quad (10)$$

setzen:

$$A_1 = -\tfrac{1}{72} Q \,.\, \Pi \,.\, (\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta) + \ldots.$$

Hier bedeuten die Punkte Glieder vom zehnten und höheren Grade in den $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.

Wenn wir z.B. α mit β vertauschen, werden nach (5) G_1 und G_2 vertauscht, A_1 geht dann in $-A_2$, A_2 in $-A_1$, A_3 in $-A_3$ und A_4 in $-A_4$ über. Auf diese Weise ergeben sich für die A_i aus der zuletzt angeschriebenen Gleichung die Reihen:

$$\left.\begin{aligned}
A_1 &= -\tfrac{1}{72} Q \,.\, \Pi \,.\, (\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta) + \ldots. \\
A_2 &= +\tfrac{1}{72} Q \,.\, \Pi \,.\, (\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\beta-\delta) + \ldots. \\
A_3 &= -\tfrac{1}{72} Q \,.\, \Pi \,.\, (\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)(\gamma-\delta) + \ldots. \\
A_4 &= +\tfrac{1}{72} Q \,.\, \Pi \,.\, (\alpha-\delta)(\beta-\delta)(\gamma-\delta) + \ldots.
\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (11)$$

§ 3.

Bevor wir nach Gleichung (4) G_5 berechnen, sind einige Bemerkungen bezüglich der Grösse Q von (10) zu machen.

Sind a_{ik}, α_{ik}, p_{ik}, m_{ik} und π_{ik} die Koordinaten von fünf linearen Komplexen, so ist

$$J = a_{\alpha p, m\pi} = (a\alpha^2 p^2)(a m^2 \pi^2) = 16 \,.\, \Sigma\, a_{ik}\, \alpha_{i_2 i_3}\, p_{i_4 i_5}\, m_{k_2 k_3}\, \pi_{k_4 k_5}$$

eine projektive Komitante dieser Komplexe. Sie ist symmetrisch in α und p und in m und π, schief-symmetrisch in den Paaren αp und $m\pi$:

$$J = a_{\alpha p, m\pi} = -a_{m\pi, \alpha p}.$$

Schliesslich ist J zyklisch-symmetrisch in a, α, p und ebenso in a, m, π:

$$a_{\alpha p, m\pi} + \alpha_{pa, m\pi} + p_{a\alpha, m\pi} = 0$$

und ebenso mit a, m, π.

Diese Symmetrieeigenschaften im Vereine mit den Gleichungen (1) ergeben eine Reihe von Reduktionen bei denjenigen Ausdrücken, die aus J entstehen, wenn wir an Stelle der

$$a_{ik}, \alpha_{ik}, p_{ik}, \ldots. \text{ die Reihen } a_{ik} = 0_{ik}, (a_1)_{ik} = 1_{ik}, (a_2)_{ik} = 2_{ik}, \ldots.$$

nehmen. Es sei dies bei der durch die Gleichung (10) eingeführten Grösse Q näher ausgeführt.

Wenn wir in (8)

$$m_{ik} = 0_{ik} + \frac{\delta}{1!} 1_{ik} + \frac{\delta^2}{2!} 2_{ik} + \ldots.$$

einsetzen, so werden die Glieder vierten Grades in $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, da

$$0_{0i,\,rs} = 0$$

für alle i, r und s gilt (die 0_{ik} sind Linienkoordinaten!), gegeben durch

$$\left.\begin{aligned} O_4 = {} & \frac{1}{12}\alpha^2\beta\gamma\, 0_{13,14} + \\ & + \frac{\delta}{1!}\Big[\sigma_1\, 1_{02,06} + \sigma_2\, 1_{02,15} + \sigma_3\, 1_{02,24} + \sigma_4\, 1_{03,05} + \\ & + \frac{1}{12}\alpha(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)\, 1_{03,04} + \frac{1}{12}\alpha(\alpha^2-\beta\gamma)\, 1_{04,13}\Big] + \\ & + \frac{\delta^2}{2!}\Big[\frac{1}{12}(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)\, 2_{03,04} + \frac{1}{3}\alpha^2\, 2_{03,13} + \\ & + \frac{1}{4}(\alpha^2+\alpha(\beta+\gamma))\, 2_{02,14} + \sigma_5\, 2_{02,05}\Big] + \\ & + \frac{\delta^3}{3!}\Big[\frac{1}{4}(2\alpha+\beta+\gamma)\, 3_{02,04} + \alpha\, 3_{02,13}\Big] + \\ & + \frac{\delta^4}{4!}\cdot 4_{02,03}. \end{aligned}\right\} \quad . \quad (12)$$

Die hier auftretenden Koeffizienten K:

$$i_{jk,\,mn} \qquad (i+j+k+m+n=9)$$

sind alle auf das Q von Gleichung (10) reduzierbar oder verschwinden.
Sei z.B. $K = 2_{02,05}$. Die zyklische Symmetrie bezüglich 2, 0, 5 gibt hier

$$2_{02,05} = -0_{02,25} - 5_{02,02} = 0,$$

denn $0_{02,05}$ verschwindet, da 0_{ik} Linienkoordinaten sind und $5_{02,02}$ ist Null wegen der schiefen Symmetrie in den Paaren 02, 02.
Wenn $K = 1_{02,15}$ ist, so haben wir zufolge der dritten der Gleichungen (1)

$$K = 1_{02,15} = -1_{11,15}$$

und dies ist Null, da allgemein $r_{rr,\,ik} = 0$ gilt, wie aus der zyklischen Symmetrie in r, r, r sofort folgt.
Bei $K = 4_{02,03}$ gibt die zyklische Symmetrie bezüglich 4, 0, 2:

$$K = 4_{02,03} = -0_{24,03} - 2_{04,03} = -2_{04,03}.$$

Aus (1) haben wir

$$04 = -3.22 - 4.13,$$

also wird

$$4_{02,03} = 3.2_{22,03} + 4.2_{13,03} = 4.2_{13,03}.$$

Hier ist, wieder wegen der zyklischen Symmetrie bezüglich 2, 1, 3:

$$2_{13,03} = -1_{23,03} - 3_{12,03}.$$

Der letzte Term wird nach (1) wegen $03 = -3.12$ gleich $3.3_{12,12}$, also Null. Beim ersten Term der rechten Seite gibt die zyklische Symmetrie bezüglich 1, 0, 3:

$$1_{23,03} = -0_{23,13} - 3_{23,01} = 0_{13,23} = Q,$$

da $3_{23,01}$ wegen 01 nach (1) wegfällt. Also wird schliesslich

$$2_{13,03} = -Q \text{ und } 4_{02,03} = -4Q.$$

Auf diese Weise sind alle Koeffizienten in (12) zu reduzieren. Man erhält:

$$\left.\begin{aligned} & 0_{13,14} = -2Q \\ & 1_{02,06} = 0,\ 1_{02,15} = 0,\ 1_{02,04} = 0,\ 1_{03,05} = 0,\ 1_{03,14} = 2Q,\ 1_{04,13} = -2Q \\ & 2_{03,04} = -4Q,\ 2_{03,13} = Q,\ 2_{02,14} = -\tfrac{4}{3}Q,\ 2_{02,05} = 0 \\ & 3_{02,04} = 4Q,\ 3_{02,13} = 0 \\ & 4_{02,03} = -4Q. \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

Setzt man dies in (12) ein, so wird

$$O_4 = -\tfrac{1}{6} Q (\alpha-\delta)^2 (\beta-\delta)(\gamma-\delta) \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (14)$$

was schliesslich mit (7) zusammen zu den Gleichungen (11) führt. Diese letzteren ergeben dann

$$\left.\begin{aligned} A_2 A_3 A_4 &= -\frac{1}{72^3} Q^3 \Pi^4 (\beta-\gamma)(\beta-\delta)(\gamma-\delta) + \ldots. \\ A_1 A_3 A_4 &= +\frac{1}{72^3} Q^3 \Pi^4 (\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)(\gamma-\delta) + \ldots. \\ A_1 A_2 A_4 &= -\frac{1}{72^3} Q^3 \Pi^4 (\alpha-\beta)(\alpha-\delta)(\beta-\delta) + \ldots. \\ A_1 A_2 A_3 &= +\frac{1}{72^3} Q^3 \Pi^4 (\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma) + \ldots. \end{aligned}\right\} \quad . \; . \quad (15)$$

wo die Punkte Glieder andeuten, die wenigstens vom 28. Grade in $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sind.

Man zeigt leicht an einem Beispiel, dass die Invariante $Q=0_{13,23}$ im allgemeinen von Null verschieden ist.

Schliesslich setzen wir (15) in (4) ein, wobei die G_i durch die Reihen (5) gegeben sind. Als Glieder niedrigster Ordnung ergeben sich in den Reihen, mit denen

$$m_{ik}=0_{ik},\ 1_{ik},\ 2_{ik},\ \ldots.$$

zu multiplizieren sind, bis auf den Faktor $-\frac{1}{72^3}Q^3\Pi^4$ die Ausdrücke

$$\left.\begin{aligned} S_m=\alpha^m(\beta-\gamma)(\beta-\delta)(\gamma-\delta)-\beta^m(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)(\gamma-\delta)+\\ +\gamma^m(\alpha-\beta)(\alpha-\delta)(\beta-\delta)-\delta^m(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma).\end{aligned}\right\}\quad\ldots\quad(16)$$

Man rechnet leicht nach, dass S_0, S_1 und S_2 identisch wegfallen, dass dagegen $S_3\not\equiv 0$ wird, sodass die Reihenentwicklung für G_5 mit den Gliedern dreissigster Ordnung beginnt. Hieraus schliesst man, dass bei $Q\neq 0$

$$\lim G_5(\alpha\to 0,\beta\to 0,\gamma\to 0,\delta\to 0)=g_{ik}$$

eine Linearkombination von 0_{ik}, 1_{ik}, 2_{ik} und 3_{ik} sein wird, wobei 3_{ik} mit dem Koeffizienten Q^3 versehen ist.

§ 4.

Man wird so zu dem Ansatz

$$g_{ik}=0_{ik}+\lambda\,.\,1_{ik}+\mu\,.\,2_{ik}+\nu\,.\,3_{ik}\quad\ldots\ldots\quad(17)$$

geführt. Die Bedingung dafür, dass die g_{ik} Linienkoordinaten sind, lassen sich dann nach (1) zusammenfassen zu

$$\begin{aligned} M'_{11}\lambda^2+M'_{22}\mu^2+M'_{33}\nu^2+2\mu M'_{02}+2\nu M'_{03}+\\ +2\lambda\mu M'_{12}+2\lambda\nu M'_{13}+2\mu\nu M'_{23}=0.\end{aligned}$$

Drückt man hier M'_{11}, M'_{22} und M'_{12} nach (1) durch die übrigen M'_{ik} aus, so bekommt man

$$\left.\begin{aligned} M'_{02}(2\mu-\lambda^2)+M'_{03}(2\nu-\tfrac{2}{3}\lambda\mu)-\tfrac{1}{3}\mu^2M'_{04}+M'_{13}(2\lambda\nu-\tfrac{4}{3}\mu^2)+\\ +2\mu\nu M'_{23}+\nu^2M'_{33}=0.\end{aligned}\right\}\quad\ldots\quad(18)$$

Dies ist eine lineare Beziehung zwischen den sechs Räumen R_3, deren Koordinaten die M'_{ik} sind. Nennen wir in der Matrix

$$\|\,M'_{02}\ M'_{03}\ M'_{04}\ M'_{13}\ M'_{23}\ M'_{33}\,\|$$

die fünfreihigen Determinaten Θ_{ik}, so gilt

$$\Sigma M'_{ik}\Theta_{ik}=\Theta_{02}M'_{02}+\Theta_{03}M'_{03}+\ldots+\Theta_{33}M'_{33}=0\quad\ldots\quad(19)$$

und dies muss bis auf einen Proportionalitätsfaktor mit (18) identisch

sein. Es gilt also vorerst die Ausdrücke Θ_{ik} zu berechnen. Wir setzen (Vgl. (10)):

$$Q=0_{13,23},\ R=0_{13,33},\ S=0_{23,33},\ T=2_{04,33}.\quad\ldots\quad(20)$$

Dann ist z.B.

$$\Theta_{23}=\sum_i(0^2\,2^2)_i\,((03)(04)(13)(33))_i=\begin{vmatrix}0_{03}&0_{04}&0_{13}&0_{33}\\0_{03}&0_{04}&0_{13}&0_{33}\\2_{03}&2_{04}&2_{13}&2_{33}\\2_{03}&2_{04}&2_{13}&2_{33}\end{vmatrix}=$$

$$=4.0_{13,33}\,2_{03,04}=-16RQ.$$

Auf diese Weise bekommt man nach einiger Rechnung:

$$\left.\begin{aligned} \Theta_{02}&=4(\tfrac{1}{2}RT-S^2) & \Theta_{13}&=16QS\\ \Theta_{03}&=-4(QT+\tfrac{2}{3}RS) & \Theta_{23}&=16QR\\ \Theta_{04}&=-\tfrac{4}{3}R^2 & \Theta_{33}&=16Q^2\end{aligned}\right\}\quad\ldots\quad(21)$$

Wählen wir also als Proportionalitatsfaktor $\frac{1}{4}\varrho^2$, so liefert die Gegenüberstellung von (18) und (19) die sechs Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} 2\mu-\lambda^2&=\varrho^2(\tfrac{1}{2}RT-S^2)\\ -2\nu+\tfrac{2}{3}\lambda\mu&=\varrho^2(QT+\tfrac{2}{3}RS)\\ \mu^2&=\varrho^2R^2\\ 2\lambda\nu-\tfrac{4}{3}\mu^2&=4\varrho^2QS\\ \mu\nu&=-2\varrho^2QR\\ \nu^2&=4\varrho^2Q^2\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots\quad(22)$$

Hieraus folgen

$$\mu=\mp\varrho R\quad,\quad\nu=\pm 2\varrho Q$$

womit auch die vorletzte Gleichung (22) befriedigt ist. Aus $(22)_2$ und $(22)_4$ kann man dann ϱ und λ berechnen:

$$\varrho=\mp\frac{36Q^2}{2R^3+12QRS+9Q^2T}\quad,\quad\lambda=-\frac{12Q(3QS+R^2)}{2R^3+12QRS+9Q^2T}.$$

Mit diesen Werten wird auch $(22)_1$ befriedigt, sodass sich schliesslich unter der Voraussetzung

$$P=2R^3+12QRS+9Q^2T\neq 0.\quad\ldots\ldots\quad(23)$$

für die gesuchte Gerade g ergibt:

$$\left.\begin{aligned} g_{ik}=a_{ik}\,(2R^3+12QRS+9Q^2T)-(a_1)_{ik}\,.\,12Q(3QS+R^2)+\\ +(a_2)_{ik}\,.\,36Q^2R-(a_3)_{ik}\,.\,72Q^3\end{aligned}\right\}.\quad(24)$$

Diese Gerade g_{ik} ist die „assoziierte" der Erzeugenden a_{ik}.
