Mathematics. — *Ueber* BESSEL*sche*, STRUVE*sche und* LOMMEL*sche Funktionen*. (Zweite Mitteilung). Von C. S. MEIJER. (Communicated by Prof. J. G. VAN DER CORPUT).

(Communicated at the meeting of February 24, 1940.)

§ 4. Aus (36), (55) und (56) geht hervor

$$K_\nu(2z) = \tfrac12 z^\nu G_{0,2}^{2,0}(z^2 \,|\, 0, -\nu) = \tfrac12 z^\nu G_{1,3}^{3,0}\left(z^2 \left| \begin{matrix} \frac12 \\ \frac12, 0, -\nu \end{matrix}\right.\right). \quad . \quad (74)$$

Ebenso folgt aus (35), (55) und (56)

$$J_\nu(2z) = z^\nu G_{1,3}^{2,0}\left(z^2 \left| \begin{matrix} \frac12 \\ \frac12, 0, -\nu \end{matrix}\right.\right). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (75)$$

und

$$J_\nu(2z) = z^{-\nu} G_{1,3}^{2,0}\left(z^2 \left| \begin{matrix} \frac12 \\ \frac12, \nu, 0 \end{matrix}\right.\right). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (76)$$

Wendet man nun (26) auf die rechte Seite von (74) an, so erhält man

$$K_\nu(2z) = \frac{z^\nu}{\Gamma(\alpha - \frac12)} \int_1^\infty G_{1,3}^{3,0}\left(z^2 u^2 \left| \begin{matrix} \frac12 \\ \alpha, 0, -\nu \end{matrix}\right.\right) (u^2-1)^{\alpha-\frac32} u^{1-2\alpha}\, du.$$

Nimmt man hierin $\alpha = \nu$, so bekommt man mit Rücksicht auf (49) [26])

$$K_\nu(2z) = \frac{2z^\nu}{\Gamma(\nu - \frac12)\sqrt{\pi}} \int_1^\infty K_\nu^2(zu)\,(u^2-1)^{\nu-\frac32} u^{1-2\nu}\, du; \quad . \quad . \quad (77)$$

diese Beziehung gilt für $|\arg z| < \frac12 \pi$ und $\Re(\nu) > \frac12$.
Auf analoge Weise findet man mit Hilfe von (75) und (45)

$$J_\nu(2z) = -\frac{2z^\nu\sqrt{\pi}}{\Gamma(\nu - \frac12)} \int_1^\infty J_\nu(zu)\, Y_\nu(zu)\,(u^2-1)^{\nu-\frac32} u^{1-2\nu}\, du; \quad . \quad (78)$$

hierin ist $z > 0$ und $\Re(\nu) > \frac12$.
Aus (76) und (46) folgt schliesslich

$$J_\nu(2z)\sin\nu\pi = \frac{z^{-\nu}\sqrt{\pi}}{\Gamma(-\nu - \frac12)} \int_1^\infty \{J_{-\nu}^2(zu) - J_\nu^2(zu)\}\,(u^2-1)^{-\nu-\frac32} u^{1+2\nu}\, du; \quad (79)$$

hierin ist $z > 0$ und $\Re(\nu) < -\frac12$.

[26]) $G_{p,q}^{m,n}\left(\zeta \left| \begin{matrix} a_1, \ldots, a_p \\ b_1, \ldots, b_q \end{matrix}\right.\right)$ ist eine symmetrische Funktion von $b_1, \ldots, b_m$.

§ 5. Für die Funktion $Y_\nu(z)$ gilt wegen (26) und (37)

$$Y_\nu(z) = \frac{2(-1)^h}{\Gamma(\alpha + \frac12\nu)} \int_1^\infty G_{1,3}^{2,0}\left(\tfrac14 z^2 u^2 \left| \begin{matrix} -\frac12\nu - h - \frac12 \\ \alpha, \frac12\nu, -\frac12\nu - h - \frac12 \end{matrix}\right.\right) (u^2-1)^{\alpha+\frac12\nu-1} u^{1-2\alpha}\, du; \quad (80)$$

hierin ist $z > 0$, $\Re(\nu) < \frac32$, $h = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ und α beliebig mit $0 < \Re(\alpha + \frac12\nu) < \frac32 - \Re(\nu)$.
Nun folgt aus (56), (55) und (35)

$$G_{1,3}^{2,0}\left(\tfrac14 \zeta^2 \left| \begin{matrix} -\frac12\nu - h - \frac12 \\ -\frac12\nu - h - \frac12, \frac12\nu, -\frac12\nu - h - \frac12 \end{matrix}\right.\right)$$

$$= G_{0,2}^{1,0}\left(\tfrac14 \zeta^2 \,\middle|\, \tfrac12\nu, -\tfrac12\nu - h - \tfrac12\right) = \left(\tfrac12\zeta\right)^{-h-\frac12} J_{\nu+h+\frac12}(\zeta).$$

Der Spezialfall von (80) mit $\alpha = -\frac12\nu - h - \frac12$ liefert daher

$$Y_\nu(z) = \frac{(-1)^h\, 2^{h+\frac32} z^{-h-\frac12}}{\Gamma(-h-\frac12)} \int_1^\infty J_{\nu+h+\frac12}(zu)\,(u^2-1)^{-h-\frac32} u^{\nu+h+\frac32}\, du; \quad (81)$$

in dieser Relation ist $z > 0$, $h = -1, -2, -3, \ldots$ und $\Re(\nu) < h + 2$.
Ist $l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, so hat man mit Rücksicht auf (55) und (37)

$$G_{1,3}^{2,0}\left(\tfrac14 \zeta^2 \left| \begin{matrix} -\frac12\nu - h - \frac12 \\ l - \frac12\nu, \frac12\nu, -\frac12\nu - h - \frac12 \end{matrix}\right.\right)$$

$$= \left(\tfrac12\zeta\right)^l G_{1,3}^{2,0}\left(\tfrac14 \zeta^2 \left| \begin{matrix} -\frac12\nu - \frac12 l - h - \frac12 \\ \frac12 l - \frac12\nu, \frac12\nu - \frac12 l, -\frac12\nu - \frac12 l - h - \frac12 \end{matrix}\right.\right) = (-1)^{l+h}\left(\tfrac12\zeta\right)^l Y_{\nu-l}(\zeta).$$

Für $\alpha = l - \frac12\nu$ geht (80) also in

$$Y_\nu(z) = \frac{(-1)^l\, 2^{1-l} z^l}{\Gamma(l)} \int_1^\infty Y_{\nu-l}(zu)\,(u^2-1)^{l-1} u^{\nu-l+1}\, du \quad . \quad . \quad (82)$$

über; hierin ist $z > 0$, $l = 1, 2, 3, \ldots$ und $\Re(\nu) < \frac32 - l$.

Ist $z > 0$, $\Re(\nu) > -\frac32$ und $0 < \Re(\alpha - \frac12\nu) < \Re(\nu) + \frac32$, so folgt aus (26) und (37)

$$Y_\nu(z) = \frac{2(-1)^h}{\Gamma(\alpha - \frac12\nu)} \int_1^\infty G_{1,3}^{2,0}\left(\tfrac14 z^2 u^2 \left| \begin{matrix} -\frac12\nu - h - \frac12 \\ -\frac12\nu, \alpha, -\frac12\nu - h - \frac12 \end{matrix}\right.\right) (u^2-1)^{\alpha-\frac12\nu-1} u^{1-2\alpha}\, du. \quad (83)$$

Nun hat man wegen (55) und (37)

$$G_{1,3}^{2,0}\left(\tfrac14 \zeta^2 \left| \begin{matrix} -\frac12\nu - h - \frac12 \\ -\frac12\nu, \frac12\nu + \lambda, -\frac12\nu - h - \frac12 \end{matrix}\right.\right) = (-1)^h \left(\tfrac12\zeta\right)^\lambda Y_{\nu+\lambda}(\zeta);$$

aus (83) mit $\alpha = \frac{1}{2}\nu + \lambda$ ergibt sich also

$$Y_\nu(z) = \frac{2^{1-\lambda} z^\lambda}{\Gamma(\lambda)} \int_1^\infty Y_{\nu+\lambda}(zu)(u^2-1)^{\lambda-1} u^{-\nu-\lambda+1}\,du. \quad . \quad . \quad (84)$$

Diese Beziehung gilt für $z > 0$, $\Re(\nu) > -\frac{3}{2}$ und beliebige Werte von λ mit $0 < \Re(\lambda) < \Re(\nu) + \frac{3}{2}$.

Wegen

$$Y_{\frac{1}{2}}(w) = -\sqrt{\frac{2}{\pi w}} \cos w, \qquad Y_{-\frac{1}{2}}(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi w}} \sin w$$

geht (84) für $\lambda = \frac{1}{2} - \nu$ bezw. $\lambda = -\frac{1}{2} - \nu$ in

$$Y_\nu(z) = -\frac{2^{1+\nu} z^{-\nu}}{\Gamma(\frac{1}{2}-\nu)\sqrt{\pi}} \int_1^\infty \frac{\cos(zu)\,du}{(u^2-1)^{\nu+\frac{1}{2}}} \qquad [z > 0;\ |\Re(\nu)| < \tfrac{1}{2}] \quad (85)$$

bezw.

$$Y_\nu(z) = \frac{2^{2+\nu} z^{-\nu-1}}{\Gamma(-\frac{1}{2}-\nu)\sqrt{\pi}} \int_1^\infty \frac{\sin(zu)\,u\,du}{(u^2-1)^{\nu+\frac{3}{2}}} \qquad [z > 0; -1 < \Re(\nu) < -\tfrac{1}{2}] \quad (86)$$

über.

Die den Relationen (81) bezw. (82) entsprechenden Integraldarstellungen der Funktion $J_\nu(z)$ sind

$$\left.\begin{aligned} J_\nu(z) &= \frac{(-1)^{h+1} 2^{h+\frac{3}{2}} z^{-h-\frac{1}{2}}}{\Gamma(-h-\frac{1}{2})} \int_1^\infty Y_{\nu+h+\frac{1}{2}}(zu)(u^2-1)^{-h-\frac{3}{2}} u^{\nu+h+\frac{3}{2}}\,du \\ &[z > 0;\ h = -1, -2, -3, \ldots;\ \Re(\nu) < h + 2] \end{aligned}\right\}. \quad (87)$$

bezw.

$$\left.\begin{aligned} J_\nu(z) &= \frac{(-1)^l 2^{1-l} z^l}{\Gamma(l)} \int_1^\infty J_{\nu-l}(zu)(u^2-1)^{l-1} u^{\nu-l+1}\,du \\ &[z > 0;\ l = 1, 2, 3, \ldots;\ \Re(\nu) < \tfrac{3}{2} - l]. \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (88)$$

Formel (87) kann mit Hilfe von [27])

$$J_\nu(z) = \frac{J_{-\nu}(z) + Y_\nu(z)\sin\nu\pi}{\cos\nu\pi}$$

aus (58) (mit $-\nu$ statt ν und $\lambda = -h - \frac{1}{2}$) und (81) abgeleitet werden; auf analoge Weise folgt (88) aus (58) und (82).

[27]) Siehe (32).

Die Relationen (81), (82), (84), (85), (86), (87) und (88) waren bekannt [28]).

§ 6. Die Anwendung von (7) auf (42) liefert

$$\left.\begin{aligned} S_{\mu,\nu}(z) &= \frac{2^\mu}{\Gamma(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mu-\frac{1}{2}\nu)\,\Gamma(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mu+\frac{1}{2}\nu)\,\Gamma(\alpha+\beta)} \int_1^\infty G^{3,1}_{1,3}\left(\tfrac{1}{4}z^2u^2 \,\middle|\, \begin{matrix} \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mu \\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mu, \alpha, \beta \end{matrix}\right) \\ &\times {}_2F_1(\alpha-\tfrac{1}{2}\nu, \alpha+\tfrac{1}{2}\nu; \alpha+\beta; 1-u^2)(u^2-1)^{\alpha+\beta-1} u^{1-2\beta}\,du. \end{aligned}\right\} (89)$$

Nun folgt aus (55) und (42)

$$G^{3,1}_{1,3}\left(\tfrac{1}{4}\zeta^2 \,\middle|\, \begin{matrix} \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mu \\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mu, \frac{1}{2}\lambda+\frac{1}{2}\sigma, \frac{1}{2}\lambda-\frac{1}{2}\sigma \end{matrix}\right)$$
$$= (\tfrac{1}{2}\zeta)^\lambda 2^{1+\lambda-\mu}\,\Gamma(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\mu+\tfrac{1}{2}\lambda-\tfrac{1}{2}\sigma)\,\Gamma(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\mu+\tfrac{1}{2}\lambda+\tfrac{1}{2}\sigma)\,S_{\mu-\lambda,\sigma}(\zeta).$$

Die Funktion $S_{\mu,\nu}(z)$ besitzt daher wegen (89) (mit $\alpha = \frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{2}\sigma$ und $\beta = \frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{2}\sigma$) die Integraldarstellung

$$\left.\begin{aligned} S_{\mu,\nu}(z) &= \frac{2z^\lambda\,\Gamma(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mu+\frac{1}{2}\lambda-\frac{1}{2}\sigma)\,\Gamma(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mu+\frac{1}{2}\lambda+\frac{1}{2}\sigma)}{\Gamma(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mu-\frac{1}{2}\nu)\,\Gamma(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mu+\frac{1}{2}\nu)\,\Gamma(\lambda)} \int_1^\infty S_{\mu-\lambda,\sigma}(zu) \\ &\times {}_2F_1(\tfrac{1}{2}\lambda+\tfrac{1}{2}\sigma-\tfrac{1}{2}\nu, \tfrac{1}{2}\lambda+\tfrac{1}{2}\sigma+\tfrac{1}{2}\nu; \lambda; 1-u^2)(u^2-1)^{\lambda-1} u^{\sigma+1}\,du. \end{aligned}\right\} (90)$$

Hierin wird $z \neq 0$, $|\arg z| < \pi$ und $\Re(\mu \pm \nu) < 1$ vorausgesetzt; λ und σ sind beliebige Zahlen mit $\Re(\lambda) > 0$ und $\mu - \lambda \pm \sigma \neq 1, 3, 5, \ldots$.

Für $\sigma = \nu - \lambda$ findet man eine den Formeln (58), (63) und (84) entsprechende Beziehung, nämlich

$$S_{\mu,\nu}(z) = \frac{2z^\lambda\,\Gamma(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mu-\frac{1}{2}\nu+\lambda)}{\Gamma(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mu-\frac{1}{2}\nu)\,\Gamma(\lambda)} \int_1^\infty S_{\mu-\lambda,\nu-\lambda}(zu)(u^2-1)^{\lambda-1} u^{\nu-\lambda+1}\,du; \quad (91)$$

diese Beziehung gilt für $|\arg z| < \pi$, $\Re(\mu+\nu) < 1$ und beliebige Werte von λ mit $\Re(\lambda) > 0$.

Man bekommt eine mit (69) verwandte Integraldarstellung für $S_{\mu,\nu}(z)$, wenn man $\lambda = 1 - \sigma$ und $u = \cosh t$ setzt in (90). Denn durch diese Substitution geht (90) wegen (68) in

$$\left.\begin{aligned} S_{\mu,\nu}(z) &= \frac{2z^{1-\sigma}\,\Gamma(1-\frac{1}{2}\mu-\sigma)\,\Gamma(1-\frac{1}{2}\mu)}{\Gamma(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mu-\frac{1}{2}\nu)\,\Gamma(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mu+\frac{1}{2}\nu)} \\ &\times \int_0^\infty S_{\mu+\sigma-1,\sigma}(z\cosh t)\,P^{\sigma}_{\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}}(\cosh 2t)\sinh^{1-\sigma} t\cosh t\,dt \end{aligned}\right\} . \quad (92)$$

[28]) NIELSEN, [16], 222—223; WATSON, [17], § 6.13, Formel (4). Für (86) vergl. man MAYR, [5], 230, Formel (3a).

über; in dieser Relation ist $|\arg z| < \pi$, $\Re(\mu \pm \nu) < 1$ und σ beliebig mit $\Re(\sigma) < 1$ und $\frac{1}{2}\mu + \sigma \neq 1$.

Setzt man $\sigma = -\frac{1}{2}$ und $u = \cosh t$ in (90), so erhält man mit Rücksicht auf (73) (ich benutze $S_{\mu,\nu} = S_{\mu,-\nu}$)

$$\left.\begin{aligned} S_{\mu,\nu}(z) &= \frac{2^{\mu+\frac{1}{2}} z^{\lambda} \Gamma(\frac{1}{2}-\mu+\lambda)\sqrt{\pi}}{\Gamma(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mu-\frac{1}{2}\nu)\,\Gamma(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mu+\frac{1}{2}\nu)} \\ &\times \int_0^\infty S_{\mu-\lambda,\frac{1}{2}}(z\cosh t)\, P^{1-\lambda}_{\nu-\frac{1}{2}}(\cosh t) \sinh^{\lambda} t \cosh^{\frac{1}{2}} t\, dt; \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (93)$$

hierin ist $|\arg z| < \pi$, $\Re(\mu \pm \nu) < 1$ und λ beliebig mit $\Re(\lambda) > 0$ und $\mu - \lambda \neq \frac{1}{2}$.

Der Spezialfall von (92) mit $\sigma = \frac{1}{2}$ liefert wegen (70)

$$S_{\mu,\nu}(z) = \frac{2^{\mu+1} z^{\frac{1}{2}} \Gamma(1-\mu)}{\Gamma(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mu-\frac{1}{2}\nu)\,\Gamma(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mu+\frac{1}{2}\nu)} \int_0^\infty S_{\mu-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(z\cosh t) \cosh \nu t \cosh^{\frac{1}{2}} t\, dt;$$

diese Beziehung, gültig für $|\arg z| < \pi$ und $\Re(\mu \pm \nu) < 1$, kommt auch zum Vorschein, wenn man $\lambda = \frac{1}{2}$ setzt in (93).

§ 7. Aus (41) und (42) geht hervor

$$\mathbf{H}_{\nu}(z) - Y_{\nu}(z) = \frac{2^{1-\nu}}{\Gamma(\frac{1}{2}+\nu)\sqrt{\pi}} S_{\nu,\nu}(z). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (94)$$

Mit Hilfe dieser Beziehung kann man aus (90), (91), (92) und (93) Integraldarstellungen für $\mathbf{H}_{\nu}(z) - Y_{\nu}(z)$ ableiten. Aus (94) und (91) folgt z.B.

$$\left.\begin{aligned} \{\mathbf{H}_{\nu}(z) - Y_{\nu}(z)\} \cos(\nu-\lambda)\pi &= \frac{2^{1-\lambda} z^{\lambda} \cos \nu\pi}{\Gamma(\lambda)} \\ \times \int_1^\infty \{\mathbf{H}_{\nu-\lambda}(zu) - Y_{\nu-\lambda}(zu)\} &(u^2-1)^{\lambda-1} u^{\nu-\lambda+1}\, du; \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (95)$$

hierin ist $|\arg z| < \pi$, $\Re(\nu) < \frac{1}{2}$ und λ beliebig mit $\Re(\lambda) > 0$.

Ist $|\arg z| < \pi$ und $\Re(\alpha - \frac{1}{2}\nu) > \frac{1}{2}$, so findet man durch Anwendung von (26) auf (41)

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{H}_{\nu}(2z) - Y_{\nu}(2z) &= \frac{2\cos\nu\pi}{\Gamma(\alpha-\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2})\pi^2} \\ \times \int_1^\infty G^{3,1}_{1,3}\left(z^2u^2 \,\middle|\, \begin{matrix} \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\nu \\ \alpha, -\frac{1}{2}\nu, \frac{1}{2}\nu \end{matrix}\right) &(u^2-1)^{\alpha-\frac{1}{2}\nu-\frac{3}{2}} u^{1-2\alpha}\, du. \end{aligned}\right\} \quad . \quad (96)$$

Nun hat man wegen (55) und (50)

$$G^{3,1}_{1,3}\left(\zeta^2 \,\middle|\, \begin{matrix} \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\nu \\ \frac{3}{2}\nu, -\frac{1}{2}\nu, \frac{1}{2}\nu \end{matrix}\right) = \zeta^{\nu} G^{3,1}_{1,3}\left(\zeta^2 \,\middle|\, \begin{matrix} \frac{1}{2} \\ \nu, -\nu, 0 \end{matrix}\right) = \frac{\zeta^{\nu}\pi^{\frac{5}{2}}}{2\cos\nu\pi} H^{(1)}_{\nu}(\zeta) H^{(2)}_{\nu}(\zeta);$$

aus (96) mit $\alpha = \frac{3}{2}\nu$ ergibt sich somit, falls $|\arg z| < \pi$ und $\Re(\nu) > \frac{1}{2}$ ist,

$$\mathbf{H}_{\nu}(2z) - Y_{\nu}(2z) = \frac{z^{\nu}\sqrt{\pi}}{\Gamma(\nu-\frac{1}{2})} \int_1^\infty H^{(1)}_{\nu}(zu) H^{(2)}_{\nu}(zu) (u^2-1)^{\nu-\frac{3}{2}} u^{1-2\nu}\, du. \quad (97)$$

Auf analoge Weise findet man mit Hilfe von (38) und (44)

$$\mathbf{H}_{\nu}(2z) = \frac{2z^{\nu}\sqrt{\pi}}{\Gamma(\nu-\frac{1}{2})} \int_1^\infty J^2_{\nu}(zu) (u^2-1)^{\nu-\frac{3}{2}} u^{1-2\nu}\, du; \quad . \quad . \quad . \quad (98)$$

hierin ist $z > 0$ und $\Re(\nu) > \frac{1}{2}$.

Ebenso folgt aus (39) und (48)

$$I_{\nu}(2z) - \mathbf{L}_{\nu}(2z) = \frac{4z^{\nu}}{\Gamma(\nu-\frac{1}{2})\sqrt{\pi}} \int_1^\infty I_{\nu}(zu) K_{\nu}(zu) (u^2-1)^{\nu-\frac{3}{2}} u^{1-2\nu}\, du; \quad . \quad (99)$$

diese Beziehung gilt für $|\arg z| < \frac{1}{2}\pi$ und $\Re(\nu) > \frac{1}{2}$.

Schliesslich folgt aus (40) und (47)

$$\{I_{-\nu}(2z) - \mathbf{L}_{\nu}(2z)\} \sin\nu\pi = \frac{z^{\nu}\sqrt{\pi}}{\Gamma(\nu-\frac{1}{2})} \int_1^\infty \{I^2_{-\nu}(zu) - I^2_{\nu}(zu)\} (u^2-1)^{\nu-\frac{3}{2}} u^{1-2\nu}\, du; \quad (100)$$

hierin ist $|\arg z| < \frac{1}{2}\pi$ und $\Re(\nu) > \frac{1}{2}$.

Die Relationen (97), (98), (99) und (100) entsprechen (77), (78) und (79); Formel (98) war bekannt [29]).

Mit Hilfe von (26) kann man auch Umkehrformeln [30]) für (97), (98), (99) und (100) ableiten. Die Umkehrformel von (98) lautet z.B.

$$J^2_{\nu}(z) = \frac{2z^{-\nu}}{\Gamma(\frac{1}{2}-\nu)\sqrt{\pi}} \int_1^\infty \mathbf{H}_{\nu}(2zu) (u^2-1)^{-\nu-\frac{1}{2}} u^{-\nu}\, du;$$

hierin wird $z > 0$ und $|\Re(\nu)| < \frac{1}{2}$ vorausgesetzt. Diese Beziehung kommt zum Vorschein, wenn man (26) mit $\alpha = \frac{1}{2}$ auf (44) anwendet und (38) benutzt.

---

[29]) Watson, [17], 417, Formel (9).

[30]) Die Umkehrformel von (26) ist

$$G^{m,n}_{p,q}\left(\zeta \,\middle|\, \begin{matrix} a_1, \ldots, a_p \\ \alpha, b_2, \ldots, b_q \end{matrix}\right) = \frac{1}{\Gamma(b_1-\alpha)} \int_1^\infty G^{m,n}_{p,q}\left(\zeta v \,\middle|\, \begin{matrix} a_1, \ldots, a_p \\ b_1, \ldots, b_q \end{matrix}\right) (v-1)^{b_1-\alpha-1} v^{-b_1}\, dv.$$

Aus (26) und (40) geht hervor

$$I_{-\nu}(z)-\mathbf{L}_\nu(z)=\frac{2\cos\nu\pi}{\Gamma(\alpha+\frac12\nu)\pi}\int\limits_1^\infty G^{2,1}_{1,3}\left(\tfrac14 z^2u^2\,\middle|\,{\frac12+\frac12\nu \atop \frac12+\frac12\nu,\,\alpha,\,\frac12\nu}\right)(u^2-1)^{\alpha+\frac12\nu-1}\,u^{1-2\alpha}\,du;$$

ersetzt man nun α durch $\lambda-\frac12\nu$, so erhält man wegen (40) die mit (58), (63), (84) und (95) verwandte Formel

$$\{I_{-\nu}(z)-\mathbf{L}_\nu(z)\}\cos(\nu-\lambda)\pi=\frac{2^{1-\lambda}z^\lambda\cos\nu\pi}{\Gamma(\lambda)}\int\limits_1^\infty\{I_{-\nu+\lambda}(zu)-\mathbf{L}_{\nu-\lambda}(zu)\}(u^2-1)^{\lambda-1}\,u^{\nu-\lambda+1}\,du;$$

hierin ist $|\arg z|<\frac12\pi$, $\Re(\nu)<\frac12$ und λ beliebig mit $\Re(\lambda)>0$.

Die entsprechenden Integraldarstellungen der Funktionen $\mathbf{H}_\nu(z)$ und $I_\nu(z)-\mathbf{L}_\nu(z)$ sind

$$\mathbf{H}_\nu(z)=\frac{2^{1-\lambda}z^\lambda}{\Gamma(\lambda)}\int\limits_0^1\mathbf{H}_{\nu-\lambda}(zu)(1-u^2)^{\lambda-1}\,u^{\nu-\lambda+1}\,du \quad . \quad . \quad (101)$$

(wo $\Re(\nu)>-\frac32$ und λ beliebig mit $0<\Re(\lambda)<\Re(\nu)+\frac32$) und

$$I_\nu(z)-\mathbf{L}_\nu(z)=\frac{2^{1-\lambda}z^\lambda}{\Gamma(\lambda)}\int\limits_0^1\{I_{\nu-\lambda}(zu)-\mathbf{L}_{\nu-\lambda}(zu)\}(1-u^2)^{\lambda-1}\,u^{\nu-\lambda+1}\,du \quad (102)$$

(wo $\Re(\nu)>-1$ und λ beliebig mit $0<\Re(\lambda)<\Re(\nu)+1$).

Der Beweis von (101) bezw. (102) geht durch Entwicklung der Funktionen $\mathbf{H}_{\nu-\lambda}(zu)$ bezw. $I_{\nu-\lambda}(zu)-\mathbf{L}_{\nu-\lambda}(zu)$ (siehe (31) und (34)) und gliedweise Integration [31]).

Nun folgt aus (34) und (31)

$$\mathbf{H}_{-\frac12}(w)=\sqrt{\frac{2}{\pi w}}\sin w,\qquad I_{-\frac12}(w)-\mathbf{L}_{-\frac12}(w)=\sqrt{\frac{2}{\pi w}}\,e^{-w};$$

die Spezialfälle mit $\lambda=\nu+\frac12$ von (101) bezw. (102) liefern also [32])

$$\mathbf{H}_\nu(z)=\frac{2^{1-\nu}z^\nu}{\Gamma(\nu+\frac12)\sqrt{\pi}}\int\limits_0^1(1-u^2)^{\nu-\frac12}\sin(zu)\,du$$

[31]) Die (101) und (102) entsprechende Integraldarstellung für $J_\nu(z)$, nämlich

$$J_\nu(z)=\frac{2^{1-\lambda}z^\lambda}{\Gamma(\lambda)}\int\limits_0^1 J_{\nu-\lambda}(zu)(1-u^2)^{\lambda-1}\,u^{\nu-\lambda+1}\,du,$$

ist schon lange bekannt; man vergl. WATSON, [17], 373, Formel (1).

[32]) Ich nehme an, dass $\Re(\nu)>-\frac12$ ist.

bezw.

$$I_\nu(z)-\mathbf{L}_\nu(z)=\frac{2^{1-\nu}z^\nu}{\Gamma(\nu+\frac12)\sqrt{\pi}}\int\limits_0^1(1-u^2)^{\nu-\frac12}\,e^{-zu}\,du.$$

Diese Beziehungen waren bekannt [33]).

§ 8. Durch Anwendung von (7) auf (49) erhält man

$$\left.\begin{aligned}K_\nu^2(z)=\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int\limits_1^\infty G^{3,0}_{1,3}\left(z^2u^2\,\middle|\,{\frac12 \atop \alpha,\,\beta,\,0}\right)\\ \times{}_2F_1(\alpha-\nu,\alpha+\nu;\alpha+\beta;1-u^2)(u^2-1)^{\alpha+\beta-1}\,u^{1-2\beta}\,du.\end{aligned}\right\} \quad . \quad (103)$$

Nun folgt aus (56), (55) und (36)

$$G^{3,0}_{1,3}\left(\zeta^2\,\middle|\,{\frac12 \atop \frac12,\,\beta,\,0}\right)=G^{2,0}_{0,2}(\zeta^2\,|\,\beta,0)=2\zeta^\beta K_\beta(2\zeta).$$

Setzt man $\alpha=\frac12$ und $u=\cosh t$ in (103), so findet man also mit Rücksicht auf (68)

$$K_\nu^2(z)=2z^\beta\sqrt{\pi}\int\limits_0^\infty K_\beta(2z\cosh t)\,P_{\nu-\frac12}^{\frac12-\beta}(\cosh 2t)\sinh^{\beta+\frac12}t\cosh^{\frac12}t\,dt; \quad (104)$$

hierin ist $|\arg z|<\frac12\pi$ und β beliebig mit $\Re(\beta)>-\frac12$.

Mit Hilfe von (46) und (35) beweist man ganz analog

$$J_{-\nu}^2(z)-J_\nu^2(z)=\frac{4z^\beta\sin\nu\pi}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^\infty J_\beta(2z\cosh t)\,P_{\nu-\frac12}^{\frac12-\beta}(\cosh 2t)\sinh^{\beta+\frac12}t\cosh^{\frac12}t\,dt;$$

diese Beziehung gilt für $z>0$, $|\Re(\nu)|<1$ und beliebige Werte von β mit $-\frac12<\Re(\beta)<-2|\Re(\nu)|+\frac32$.

Die Anwendung von (7) auf (50) ergibt

$$\left.\begin{aligned}H_\nu^{(1)}(z)H_\nu^{(2)}(z)=\frac{4\cos\nu\pi}{\Gamma(\alpha+\beta)\pi^{\frac32}}\int\limits_1^\infty G^{3,1}_{1,3}\left(z^2u^2\,\middle|\,{\frac12 \atop \alpha,\,\beta,\,0}\right)\\ \times{}_2F_1(\alpha-\nu,\alpha+\nu;\alpha+\beta;1-u^2)(u^2-1)^{\alpha+\beta-1}\,u^{1-2\beta}\,du.\end{aligned}\right\} \quad . \quad (105)$$

Nun hat man wegen (55) und (41)

$$\begin{aligned}G^{3,1}_{1,3}\left(\zeta^2\,\middle|\,{\frac12 \atop \frac12,\,\beta,\,0}\right)&=\zeta^\beta G^{3,1}_{1,3}\left(\zeta^2\,\middle|\,{\frac12-\frac12\beta \atop \frac12-\frac12\beta,\,\frac12\beta,\,-\frac12\beta}\right)\\&=\frac{\zeta^\beta\pi^2}{\cos\beta\pi}\{\mathbf{H}_{-\beta}(2\zeta)-Y_{-\beta}(2\zeta)\}.\end{aligned}$$

[33]) Man vergl. WATSON, [17], 330, Formeln (1) und (2).

Aus (105) mit $\alpha = \frac{1}{2}$ und $u = \cosh t$ folgt also mit Rücksicht auf (68)

$$H_\nu^{(1)}(z)\, H_\nu^{(2)}(z) \cos \beta\pi = \frac{4 z^\beta \cos \nu\pi}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \{\mathbf{H}_{-\beta}(2z\cosh t) - Y_{-\beta}(2z\cosh t)\}$$

$$\times P_{\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\beta}(\cosh 2t) \sinh^{\beta+\frac{1}{2}} t \cosh^{\frac{1}{2}} t\, dt;$$

in dieser Beziehung ist $|\arg z| < \pi$, $|\Re(\nu)| < \frac{1}{2}$ und β beliebig mit $\Re(\beta) > -\frac{1}{2}$.

In ähnlicher Weise findet man mit Hilfe von (47) und (40)

$$\{I_{-\nu}^2(z) - I_\nu^2(z)\} \cos \beta\pi = \frac{2 z^\beta \sin 2\nu\pi}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \{I_\beta(2z\cosh t) - \mathbf{L}_{-\beta}(2z\cosh t)\}$$

$$\times P_{\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\beta}(\cosh 2t) \sinh^{\beta+\frac{1}{2}} t \cosh^{\frac{1}{2}} t\, dt;$$

in dieser Beziehung wird $|\arg z| < \frac{1}{2}\pi$, $|\Re(\nu)| < \frac{1}{2}$ und $\Re(\beta) > -\frac{1}{2}$ vorausgesetzt.

Eine verwandte Integraldarstellung für $J_\nu(z)\, J_{-\nu}(z)$ ist

$$J_\nu(z)\, J_{-\nu}(z) = \frac{2 z^\beta}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} J_{-\beta}(2z\cos\varphi)\, \mathbf{P}_{\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\beta}(\cos 2\varphi) \sin^{\beta+\frac{1}{2}}\varphi \cos^{\frac{1}{2}}\varphi\, d\varphi; \quad (106)$$

hierin ist β beliebig mit $-\frac{1}{2} < \Re(\beta) < 1$.

Denn die zugeordnete LEGENDREsche Funktion erster Art wird für $-1 < w < 1$ definiert durch [34]

$$\mathbf{P}_n^m(w) = \frac{(1+w)^{\frac{1}{2}m} (1-w)^{-\frac{1}{2}m}}{\Gamma(1-m)}\, {}_2F_1(-n, 1+n; 1-m; \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}w).$$

Die rechte Seite von (106) ist also mit Rücksicht auf (31) gleich [35]

$$\frac{1}{\Gamma(1-\beta)\,\Gamma(\frac{1}{2}+\beta)\sqrt{\pi}} \int_0^1 {}_0F_1(1-\beta; -z^2 u) \,.\, {}_2F_1(\tfrac{1}{2}-\nu, \tfrac{1}{2}+\nu; \tfrac{1}{2}+\beta; 1-u)\, (1-u)^{\beta-\frac{1}{2}} u^{-\beta}\, du.$$

Ist $-\frac{1}{2} < \Re(\beta) < 1$, so besitzt dieser Ausdruck den Wert [36]

$$\frac{1}{\Gamma(1-\nu)\,\Gamma(1+\nu)}\, {}_1F_2(\tfrac{1}{2}; 1-\nu, 1+\nu; -z^2),$$

und diese Funktion ist gleich [37] $J_\nu(z)\, J_{-\nu}(z)$, so dass Formel (106) bewiesen ist.

---

34) Man vergl. HOBSON [2], 227.
35) Ich ersetze $\cos^2 \varphi$ durch u.
36) Siehe [13], Formel (16).
37) WATSON, [17], 147, Formel (7).

§ 9. Für das Produkt $K_\mu(z)\, K_\nu(z)$ gilt wegen (7) und (52)

$$\left.\begin{aligned} K_\mu(z)\, K_\nu(z) = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_1^\infty G_{2,4}^{4,0}\left(z^2 u^2 \,\middle|\, \begin{matrix} 0, \frac{1}{2} \\ \alpha, \beta, \frac{1}{2}\mu + \frac{1}{2}\nu, -\frac{1}{2}\mu - \frac{1}{2}\nu \end{matrix}\right) \\ \times {}_2F_1(\alpha - \tfrac{1}{2}\mu + \tfrac{1}{2}\nu, \alpha + \tfrac{1}{2}\mu - \tfrac{1}{2}\nu; \alpha+\beta; 1-u^2)(u^2-1)^{\alpha+\beta-1} u^{1-2\beta}\, du. \end{aligned}\right\} (107)$$

Nun folgt aus (56) und (36)

$$G_{2,4}^{4,0}\left(\zeta^2 \,\middle|\, \begin{matrix} 0, \frac{1}{2} \\ 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\mu + \frac{1}{2}\nu, -\frac{1}{2}\mu - \frac{1}{2}\nu \end{matrix}\right)$$

$$= G_{0,2}^{2,0}(\zeta^2 \,|\, \tfrac{1}{2}\mu + \tfrac{1}{2}\nu, -\tfrac{1}{2}\mu - \tfrac{1}{2}\nu) = 2 K_{\mu+\nu}(2\zeta);$$

weiter hat man [38]

$${}_2F_1(-\lambda, \lambda; \tfrac{1}{2}; -\sinh^2 t) = \cosh 2\lambda t. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (108)$$

Aus (107) mit $\alpha = 0$, $\beta = \frac{1}{2}$ und $u = \cosh t$ ergibt sich also

$$K_\mu(z)\, K_\nu(z) = 2 \int_0^\infty K_{\mu+\nu}(2z\cosh t) \cosh(\mu-\nu) t\, dt; \quad . \quad . \quad (109)$$

diese Beziehung, gültig für $|\arg z| < \frac{1}{2}\pi$, war schon lange bekannt [39].

Durch analoge Anwendung von (7) auf (51) bekommt man

$$T_{\nu,\mu}(z) = \frac{8}{\pi i} \int_0^\infty J_{\mu+\nu}(2z\cosh t) \cosh(\mu-\nu) t\, dt; \quad . \quad . \quad . \quad (110)$$

hierin ist $z > 0$ und $|\Re(\mu-\nu)| < \frac{3}{2}$.

Mit Hilfe von (7) und (54) findet man für die Funktion $V_{\nu,\mu}(z)$

$$\left.\begin{aligned} V_{\nu,\mu}(z) = \frac{4\cos(\frac{1}{2}\mu + \frac{1}{2}\nu)\pi \cos(\frac{1}{2}\mu - \frac{1}{2}\nu)\pi}{\Gamma(\alpha+\beta)\,\pi^{\frac{5}{2}}} \int_1^\infty G_{2,4}^{4,1}\left(z^2 u^2 \,\middle|\, \begin{matrix} \frac{1}{2}, 0 \\ \alpha, \beta, \frac{1}{2}\mu + \frac{1}{2}\nu, -\frac{1}{2}\mu - \frac{1}{2}\nu \end{matrix}\right) \\ \times {}_2F_1(\alpha - \tfrac{1}{2}\mu + \tfrac{1}{2}\nu, \alpha + \tfrac{1}{2}\mu - \tfrac{1}{2}\nu; \alpha+\beta; 1-u^2)(u^2-1)^{\alpha+\beta-1} u^{1-2\beta}\, du. \end{aligned}\right\} (111)$$

Nun hat man wegen (56) und (42)

$$G_{2,4}^{4,1}\left(\zeta^2 \,\middle|\, \begin{matrix} \frac{1}{2}, 0 \\ 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\mu + \frac{1}{2}\nu, -\frac{1}{2}\mu - \frac{1}{2}\nu \end{matrix}\right) = G_{1,3}^{3,1}\left(\zeta^2 \,\middle|\, \begin{matrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\mu + \frac{1}{2}\nu, -\frac{1}{2}\mu - \frac{1}{2}\nu \end{matrix}\right)$$

$$= 2\,\Gamma(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\mu - \tfrac{1}{2}\nu)\,\Gamma(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\mu + \tfrac{1}{2}\nu)\, S_{0,\mu+\nu}(2\zeta).$$

---

38) Man vergl. [6], Formel (42).
39) WATSON, [17], 440. Siehe auch MEIJER, [8], 16—17; [9], 483.

Setzt man $\alpha = 0$, $\beta = \frac{1}{2}$ und $u = \cosh t$ in (111), so erhält man also mit Rücksicht auf (108)

$$V_{\nu,\mu}(z) = \frac{8\cos(\frac{1}{2}\mu - \frac{1}{2}\nu)\pi}{\pi^2} \int_0^\infty S_{0,\mu+\nu}(2z\cosh t)\cosh(\mu-\nu)\,t\,dt.$$

Diese Beziehung, gültig für $|\arg z| < \pi$ und $|\Re(\mu-\nu)| < 1$, ist mit (109) und (110) verwandt.

Durch Anwendung von (7) auf (53) findet man die entsprechende Integraldarstellung der Funktion $U_{\nu,\mu}(z)$, nämlich

$$U_{\nu,\mu}(z) = \frac{8(\mu+\nu)\sin(\frac{1}{2}\nu - \frac{1}{2}\mu)\pi}{\pi^2} \int_0^\infty S_{-1,\mu+\nu}(2z\cosh t)\cosh(\mu-\nu)\,t\,dt;$$

hierin ist $|\arg z| < \pi$ und $|\Re(\mu-\nu)| < 2$.

§ 10. Die Anwendung von (7) auf (54) liefert nicht nur (111), sondern auch

$$\left.\begin{aligned} V_{\nu,\mu}(z) = {} & \frac{4\cos(\frac{1}{2}\mu + \frac{1}{2}\nu)\pi\cos(\frac{1}{2}\mu - \frac{1}{2}\nu)\pi}{\Gamma(\alpha+\beta-\mu)\,\pi^{\frac{5}{2}}} \int_1^\infty G_{2,4}^{4,1}\left(z^2u^2 \,\middle|\, \begin{matrix} \frac{1}{2}, 0 \\ \alpha, \beta, \frac{1}{2}\nu - \frac{1}{2}\mu, -\frac{1}{2}\mu - \frac{1}{2}\nu \end{matrix}\right) \\ & \times {}_2F_1(\alpha - \tfrac{1}{2}\mu - \tfrac{1}{2}\nu, \alpha - \tfrac{1}{2}\mu + \tfrac{1}{2}\nu; \alpha+\beta-\mu; 1-u^2)(u^2-1)^{\alpha+\beta-\mu-1}u^{1-2\beta}\,du. \end{aligned}\right\} \quad (112)$$

Nun gilt wegen (56), (55) und (42)

$$G_{2,4}^{4,1}\left(\zeta^2 \,\middle|\, \begin{matrix} \frac{1}{2}, 0 \\ 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\nu - \frac{1}{2}\mu, -\frac{1}{2}\mu - \frac{1}{2}\nu \end{matrix}\right) = G_{1,3}^{3,1}\left(\zeta^2 \,\middle|\, \begin{matrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\nu - \frac{1}{2}\mu, -\frac{1}{2}\mu - \frac{1}{2}\nu \end{matrix}\right)$$

$$= \zeta^{-\mu} G_{1,3}^{3,1}\left(\zeta^2 \,\middle|\, \begin{matrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mu \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mu, \frac{1}{2}\nu, -\frac{1}{2}\nu \end{matrix}\right) = 2^{1-\mu}\zeta^{-\mu}\Gamma(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\mu - \tfrac{1}{2}\nu)\Gamma(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\mu + \tfrac{1}{2}\nu)S_{\mu,\nu}(2\zeta).$$

Aus (112) mit $\alpha = 0$, $\beta = \frac{1}{2}$ und $u = \cosh t$ ergibt sich also mit Rücksicht auf (73)

$$V_{\nu,\mu}(z) = \frac{2^{-2\mu+\frac{5}{2}}z^{-\mu}}{\Gamma(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mu + \frac{1}{2}\nu)\Gamma(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mu - \frac{1}{2}\nu)\sqrt{\pi}}$$

$$\times \int_0^\infty S_{\mu,\nu}(2z\cosh t)P_{\nu-\frac{1}{2}}^{\mu+\frac{1}{2}}(\cosh t)\sinh^{\frac{1}{2}-\mu}t\cosh^{-\mu}t\,dt;$$

hierin ist $|\arg z| < \pi$, $\Re(\mu) < \frac{1}{2}$ und $\Re(\mu \pm \nu) > -1$.

Auf analoge Weise findet man mit Hilfe von (53) und (42)

$$U_{\nu,\mu}(z) = -\frac{2^{-2\mu+\frac{7}{2}}z^{-\mu}}{\Gamma(\frac{1}{2}\mu + \frac{1}{2}\nu)\Gamma(\frac{1}{2}\mu - \frac{1}{2}\nu)\sqrt{\pi}}$$

$$\times \int_0^\infty S_{\mu-1,\nu}(2z\cosh t)P_{\nu-\frac{1}{2}}^{\mu+\frac{1}{2}}(\cosh t)\sinh^{\frac{1}{2}-\mu}t\cosh^{-\mu}t\,dt;$$

diese Beziehung gilt für $|\arg z| < \pi$, $\Re(\mu) < \frac{1}{2}$ und $\Re(\mu \pm \nu) > -2$.

Die (112) entsprechende Integraldarstellung der Funktion $K_\mu(z)K_\nu(z)$ ist wegen (7) und (52)

$$\left.\begin{aligned} K_\mu(z)K_\nu(z) = {} & \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\alpha+\beta-\mu)} \int_1^\infty G_{2,4}^{4,0}\left(z^2u^2 \,\middle|\, \begin{matrix} 0, \frac{1}{2} \\ \alpha, \beta, \frac{1}{2}\nu - \frac{1}{2}\mu, -\frac{1}{2}\mu - \frac{1}{2}\nu \end{matrix}\right) \\ & \times {}_2F_1(\alpha - \tfrac{1}{2}\mu - \tfrac{1}{2}\nu, \alpha - \tfrac{1}{2}\mu + \tfrac{1}{2}\nu; \alpha+\beta-\mu; 1-u^2)(u^2-1)^{\alpha+\beta-\mu-1}u^{1-2\beta}\,du. \end{aligned}\right\} \quad (113)$$

Nun hat man infolge (56), (55) und (36)

$$G_{2,4}^{4,0}\left(\zeta^2 \,\middle|\, \begin{matrix} 0, \frac{1}{2} \\ 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\nu - \frac{1}{2}\mu, -\frac{1}{2}\mu - \frac{1}{2}\nu \end{matrix}\right) = G_{0,2}^{2,0}(\zeta^2 \,|\, \tfrac{1}{2}\nu - \tfrac{1}{2}\mu, -\tfrac{1}{2}\mu - \tfrac{1}{2}\nu)$$

$$= \zeta^{-\mu}G_{0,2}^{2,0}(\zeta^2 \,|\, \tfrac{1}{2}\nu, -\tfrac{1}{2}\nu) = 2\zeta^{-\mu}K_\nu(2\zeta).$$

Aus (113) mit $\alpha = 0$, $\beta = \frac{1}{2}$ und $u = \cosh t$ geht also hervor mit Rücksicht auf (73)

$$K_\mu(z)K_\nu(z) = 2^{\frac{1}{2}-\mu}z^{-\mu}\sqrt{\pi}\int_0^\infty K_\nu(2z\cosh t)P_{\nu-\frac{1}{2}}^{\mu+\frac{1}{2}}(\cosh t)\sinh^{\frac{1}{2}-\mu}t\cosh^{-\mu}t\,dt;$$

diese Beziehung, gültig für $|\arg z| < \frac{1}{2}\pi$ und $\Re(\mu) < \frac{1}{2}$, habe ich früher[40]) auf andre Weise abgeleitet.

Ebenso beweist man, ausgehend von (51),

$$T_{\nu,\mu}(z) = \frac{2^{\frac{5}{2}-\mu}z^{-\mu}}{i\sqrt{\pi}}\int_0^\infty J_\nu(2z\cosh t)P_{\nu-\frac{1}{2}}^{\mu+\frac{1}{2}}(\cosh t)\sinh^{\frac{1}{2}-\mu}t\cosh^{-\mu}t\,dt;$$

hierin ist $z > 0$, $\Re(\mu) < \frac{1}{2}$ und $\Re(2\mu \pm \nu) > -\frac{3}{2}$.

Setzt man $\alpha = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mu + \frac{1}{2}\nu$, $\beta = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mu - \frac{1}{2}\nu$ und $u = \operatorname{cotgh} t$ in (113), so erhält man

$$\left.\begin{aligned} K_\mu(z)K_\nu(z) = {} & \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(1-2\mu)} \int_0^\infty G_{2,4}^{4,0}\left(z^2\operatorname{cotgh}^2 t \,\middle|\, \begin{matrix} 0, \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mu + \frac{1}{2}\nu, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mu - \frac{1}{2}\nu, \frac{1}{2}\nu - \frac{1}{2}\mu, -\frac{1}{2}\mu - \frac{1}{2}\nu \end{matrix}\right) \\ & \times {}_2F_1(\tfrac{1}{2} - \mu, \tfrac{1}{2} - \mu + \nu; 1-2\mu; 1-\operatorname{cotgh}^2 t)\sinh^{3\mu-\nu-2}t\cosh^{\mu+\nu}t\,dt. \end{aligned}\right\} \quad (114)$$

---

40) Meijer, [9], 482, Formel (51).

Nun ist [41])

$$
{}_2F_1\left(\tfrac{1}{2}-m,\,1-m+n\,;\,1-2m\,;\,1-\mathrm{tgh}^2 t\right)
= 2^{-2m}\,\Gamma(1-m)\sinh^{-n-1} t\,\cosh^{n-2m+1} t\,P_n^m(\mathrm{cotgh}\,2t);
$$

diese Beziehung geht mit Hilfe von (13) in

$$
{}_2F_1\left(\tfrac{1}{2}-m,\,1-m+n\,;\,1-2m\,;\,1-\mathrm{cotgh}^2 t\right)
= 2^{-2m}\,\Gamma(1-m)\sinh^{n-2m+1} t\,\cosh^{-n-1} t\,P_n^m(\mathrm{cotgh}\,2t)
$$

über.

Für die in (114) vorkommende Funktion ${}_2F_1$ gilt daher

$$
\left.\begin{aligned}
&{}_2F_1\left(\tfrac{1}{2}-\mu,\,\tfrac{1}{2}-\mu+\nu\,;\,1-2\mu;\,1-\mathrm{cotgh}^2 t\right)\\
&= 2^{-2\mu}\,\Gamma(1-\mu)\sinh^{\nu-2\mu+\frac{1}{2}} t\,\cosh^{-\nu-\frac{1}{2}} t\,P^{\mu}_{\nu-\frac{1}{2}}(\mathrm{cotgh}\,2t).
\end{aligned}\right\}\quad . \quad . \quad (115)
$$

Ferner hat man wegen (55) und (43)

$$
\left.\begin{aligned}
&G^{4,0}_{2,4}\left(\zeta^2\,\middle|\,\begin{matrix}0,\,\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mu+\frac{1}{2}\nu,\,\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mu-\frac{1}{2}\nu,\,\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}\mu,\,-\frac{1}{2}\mu-\frac{1}{2}\nu\end{matrix}\right)\\
&=\zeta^{-\mu}\,G^{4,0}_{2,4}\left(\zeta^2\,\middle|\,\begin{matrix}\frac{1}{2}\mu,\,\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mu\\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\nu,\,\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu,\,\frac{1}{2}\nu,\,-\frac{1}{2}\nu\end{matrix}\right)=2^{\mu-\frac{1}{2}}\,\zeta^{-\mu-\frac{1}{2}}\sqrt{\pi}\,e^{-\zeta}\,W_{\frac{1}{2}-\mu,\nu}(2\zeta).
\end{aligned}\right\}\quad (116)
$$

Die Funktion $K_\mu(z)\,K_\nu(z)$ besitzt also mit Rücksicht auf (114), (116) und (115) die Integraldarstellung

$$
K_\mu(z)\,K_\nu(z)=\frac{2^{\mu-\frac{1}{2}}\,z^{-\mu-\frac{1}{2}}\,\pi^{\frac{3}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\mu\right)}\int_0^\infty e^{-z\,\mathrm{cotgh}\,t}
$$

$$
\times\, W_{\frac{1}{2}-\mu,\nu}(2z\,\mathrm{cotgh}\,t)\,P^{\mu}_{\nu-\frac{1}{2}}(\mathrm{cotgh}\,2t)\sinh^{2\mu-1} t\,\cosh^{-1} t\,dt;
$$

hierin ist $|\arg z|<\frac{1}{2}\pi$ und $\Re(\mu)<\frac{1}{2}$.

Genau so findet man, wenn man $\alpha=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mu+\frac{1}{2}\nu$, $\beta=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mu-\frac{1}{2}\nu$ und $u=\mathrm{cotgh}\,t$ setzt in (113),

$$
K_\mu(z)\,K_\nu(z)=\frac{2^{\mu+\frac{1}{2}}\,z^{-\mu-\frac{3}{2}}\,\pi^{\frac{3}{2}}}{\Gamma\left(-\frac{1}{2}-\mu\right)}\int_0^\infty e^{-z\,\mathrm{cotgh}\,t}
$$

$$
\times\, W_{-\frac{1}{2}-\mu,\nu}(2z\,\mathrm{cotgh}\,t)\,P^{\mu+1}_{\nu-\frac{1}{2}}(\mathrm{cotgh}\,2t)\sinh^{2\mu} t\,dt;
$$

diese Beziehung gilt für $|\arg z|<\frac{1}{2}\pi$ und $\Re(\mu)<-\frac{1}{2}$.

---

41) Man vergl. HOBSON, [2], 236, Formel (74).

Mathematics. — *Développements en série de polynomes d'*HERMITE *et de* LAGUERRE *à l'aide des transformations de* GAUSS *et de* HANKEL. III [26]). Par ERVIN FELDHEIM. (Communicated by Prof. J. G. VAN DER CORPUT).

(Communicated at the meeting of February 24, 1940.)

§ 5. *Quelques généralisations ultérieures.*

Cette partie du travail contient des généralisations pour certains résultats de I et II, et surtout pour la formule (21) qui a été établie dans un travail actuellement sous presse [27]). Nous allons montrer aussi que les développements (18), et une inversion de (60), permettent de donner une nouvelle interprétation pour quelques résultats connus.

1⁰. *Généralisation de l'équation intégrale* (21). Si nous remplaçons, dans la formule (46), y et z respectivement par $u+v$ et $u-v$, cette relation nous fournit la transformée de GAUSS $G_x(a,u)$ du produit $H_m\left(\frac{x+v}{\lambda}\right)H_n\left(\frac{x-v}{\mu}\right)$, u et v étant des valeurs quelconques de l'intervalle $(-\infty,+\infty)$, les autres paramètres restant assujettis aux conditions imposées pour (46). Si nous posons, dans la relation obtenue, $a=\lambda=\mu=1$, nous serons conduits à l'équation intégrale

$$
\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-iu)^2}\,H_m(x+v)\,H_n(x-v)\,dx=\\
&\qquad=2^m\,n!\,(v+iu)^{m-n}\,L_n^{(m-n)}(2u^2+2v^2)\qquad (m\geqq n)
\end{aligned}\right\}\quad . \quad . \quad (61)
$$

Cette équation résulte immédiatement de (20), et ne peut pas être considérée par suite comme une généralisation de celle-ci. Mais son inversion:

$$
\left.\begin{aligned}
&2^m\,n!\,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(u+ix)^2}\,(v+iu)^{m-n}\,L_n^{(m-n)}(2u^2+2v^2)\,du=\\
&\qquad=H_m(x+v)\,H_n(x-v)\qquad (m\geqq n)
\end{aligned}\right\}\quad . \quad . \quad (62)
$$

---

26) Les parties I et II ont été publiées dans les Proc. Kon. Ned. Akad. v. Wetensch., Amsterdam, **43**, 224—239; 240—248 (1940).

27) FELDHEIM, [8]. Les nombres entre crochets renvoient à la Bibliographie placée à la fin de la 2e communication.