Nun ist [41])

$$
\begin{aligned}
&{}_2F_1(\tfrac{1}{2}-m, 1-m+n; 1-2m; 1-\mathrm{tgh}^2 t)\\
&=2^{-2m}\,\Gamma(1-m)\sinh^{-n-1} t \cosh^{n-2m+1} t\, P_n^m(\mathrm{cotgh}\, 2t);
\end{aligned}
$$

diese Beziehung geht mit Hilfe von (13) in

$$
\begin{aligned}
&{}_2F_1(\tfrac{1}{2}-m; 1-m+n; 1-2m; 1-\mathrm{cotgh}^2 t)\\
&=2^{-2m}\,\Gamma(1-m)\sinh^{n-2m+1} t \cosh^{-n-1} t\, P_n^m(\mathrm{cotgh}\, 2t)
\end{aligned}
$$

über.

Für die in (114) vorkommende Funktion ${}_2F_1$ gilt daher

$$
\left.
\begin{aligned}
&{}_2F_1(\tfrac{1}{2}-\mu, \tfrac{1}{2}-\mu+\nu; 1-2\mu; 1-\mathrm{cotgh}^2 t)\\
&=2^{-2\mu}\,\Gamma(1-\mu)\sinh^{\nu-2\mu+\frac{1}{2}} t \cosh^{-\nu-\frac{1}{2}} t\, P^{\mu}_{\nu-\frac{1}{2}}(\mathrm{cotgh}\, 2t).
\end{aligned}
\right\} \quad . \quad . \quad (115)
$$

Ferner hat man wegen (55) und (43)

$$
\left.
\begin{aligned}
&G^{4,0}_{2,4}\left(\zeta^2 \middle| \begin{matrix} 0, \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mu+\frac{1}{2}\nu, \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mu-\frac{1}{2}\nu, \frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}\mu, -\frac{1}{2}\mu-\frac{1}{2}\nu \end{matrix}\right)\\
&=\zeta^{-\mu}\, G^{4,0}_{2,4}\left(\zeta^2 \middle| \begin{matrix} \frac{1}{2}\mu, \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mu \\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\nu, \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu, \frac{1}{2}\nu, -\frac{1}{2}\nu \end{matrix}\right) = 2^{\mu-\frac{1}{2}}\,\zeta^{-\mu-\frac{1}{2}}\sqrt{\pi}\, e^{-\zeta}\, W_{\frac{1}{2}-\mu,\nu}(2\zeta).
\end{aligned}
\right\} \quad (116)
$$

Die Funktion $K_\mu(z)\,K_\nu(z)$ besitzt also mit Rücksicht auf (114), (116) und (115) die Integraldarstellung

$$
\begin{aligned}
K_\mu(z)\,K_\nu(z) &= \frac{2^{\mu-\frac{1}{2}}\, z^{-\mu-\frac{1}{2}}\,\pi^{\frac{3}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2}-\mu)} \int_0^\infty e^{-z\,\mathrm{cotgh}\, t}\\
&\times W_{\frac{1}{2}-\mu,\nu}(2z\,\mathrm{cotgh}\, t)\, P^{\mu}_{\nu-\frac{1}{2}}(\mathrm{cotgh}\, 2t)\sinh^{2\mu-1} t \cosh^{-1} t\, dt;
\end{aligned}
$$

hierin ist $|\arg z| < \frac{1}{2}\pi$ und $\Re(\mu) < \frac{1}{2}$.

Genau so findet man, wenn man $\alpha = -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mu+\frac{1}{2}\nu$, $\beta = -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mu-\frac{1}{2}\nu$ und $u = \mathrm{cotgh}\, t$ setzt in (113),

$$
\begin{aligned}
K_\mu(z)\,K_\nu(z) &= \frac{2^{\mu+\frac{1}{2}}\, z^{-\mu-\frac{3}{2}}\,\pi^{\frac{3}{2}}}{\Gamma(-\frac{1}{2}-\mu)} \int_0^\infty e^{-z\,\mathrm{cotgh}\, t}\\
&\times W_{-\frac{1}{2}-\mu,\nu}(2z\,\mathrm{cotgh}\, t)\, P^{\mu+1}_{\nu-\frac{1}{2}}(\mathrm{cotgh}\, 2t)\sinh^{2\mu} t\, dt;
\end{aligned}
$$

diese Beziehung gilt für $|\arg z| < \frac{1}{2}\pi$ und $\Re(\mu) < -\frac{1}{2}$.

41) Man vergl. HOBSON, [2], 236, Formel (74).

Mathematics. — *Développements en série de polynomes d'*HERMITE *et de* LAGUERRE *à l'aide des transformations de* GAUSS *et de* HANKEL. III [26]). Par ERVIN FELDHEIM. (Communicated by Prof. J. G. VAN DER CORPUT).

(Communicated at the meeting of February 24, 1940.)

§ 5. *Quelques généralisations ultérieures.*

Cette partie du travail contient des généralisations pour certains résultats de I et II, et surtout pour la formule (21) qui a été établie dans un travail actuellement sous presse [27]). Nous allons montrer aussi que les développements (18), et une inversion de (60), permettent de donner une nouvelle interprétation pour quelques résultats connus.

1°. *Généralisation de l'équation intégrale* (21). Si nous remplaçons, dans la formule (46), y et z respectivement par $u+v$ et $u-v$, cette relation nous fournit la transformée de GAUSS $G_x(a, u)$ du produit $H_m\left(\frac{x+v}{\lambda}\right) H_n\left(\frac{x-v}{\mu}\right)$, u et v étant des valeurs quelconques de l'intervalle $(-\infty, +\infty)$, les autres paramètres restant assujettis aux conditions imposées pour (46). Si nous posons, dans la relation obtenue, $a=\lambda=\mu=1$, nous serons conduits à l'équation intégrale

$$
\left.
\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-iu)^2}\, H_m(x+v)\, H_n(x-v)\, dx =\\
&\qquad = 2^m\, n!\,(v+iu)^{m-n}\, L_n^{(m-n)}(2u^2+2v^2) \qquad (m \geqq n)
\end{aligned}
\right\} \quad . \quad . \quad (61)
$$

Cette équation résulte immédiatement de (20), et ne peut pas être considérée par suite comme une généralisation de celle-ci. Mais son inversion:

$$
\left.
\begin{aligned}
&2^m\, n!\,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(u+ix)^2}\,(v+iu)^{m-n}\, L_n^{(m-n)}(2u^2+2v^2)\, du =\\
&\qquad = H_m(x+v)\, H_n(x-v) \qquad (m \geqq n)
\end{aligned}
\right\} \quad . \quad . \quad (62)
$$

26) Les parties I et II ont été publiées dans les Proc. Kon. Ned. Akad. v. Wetensch., Amsterdam, **43**, 224—239; 240—248 (1940).

27) FELDHEIM, [8]. Les nombres entre crochets renvoient à la Bibliographie placée à la fin de la 2e communication.

constitue bien une généralisation de la relation (21), qui ne peut pas être déduite du développement (16). Nous allons donner un peu plus tard le développement équivalent à (62), mais démontrons d'abord cette équation intégrale à l'aide de (61). On en tire

$$2^m n! \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(u+ix)^2} (v+iu)^{m-n} L_n^{(m-n)} (2u^2+2v^2)\, du =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(u+ix)^2} du \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(y-iu)^2} H_m(y+v) H_n(y-v)\, dy.$$

Si l'intégration par rapport à u est d'abord effectuée entre les limites $-\frac{U}{2}$ et $\frac{U}{2}$, le produit des deux intégrales précédentes pourra être considéré comme une intégrale double qui est sûrement absolument convergente. On aura ainsi

$$\lim_{U \to \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2+y^2} H_m(y+v) H_n(y-v) \frac{\sin U(y-x)}{\pi(y-x)}\, dy,$$

ce qui admet, comme il est bien connu, la valeur $H_m(x+v) H_n(x-v)$, et par cela la démonstration de l'équation intégrale (62) est achevée.

Pour $v=0$, les relations (61) et (62) se réduisent à (19) et (21).

Observons que ces deux relations (61) et (62) permettent d'écrire l'équation intégrale suivante:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(u+ix)^2-(v+iy)^2} (v+iy)^{m-n} L_n^{(m-n)} (2u^2+2v^2)\, du\, dv \\ &\qquad = (-1)^n (x-iy)^{m-n} L_n^{(m-n)} (2x^2+2y^2), \qquad (m \geqq n) \end{aligned}\right\}. \quad (63)$$

et cette relation pourra être simplifiée de façon à redonner une forme particulière de l'équation de WILSON (12*c*).

Une équation du même genre est

$$2^m n! \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(u+ix)^2-(v+ix)^2} (iu)^{m-n} L_n^{(m-n)} (2uv)\, du\, dv = (-1)^n H_{m+n}(x). \quad (64)$$

qui peut être démontrée directement à l'aide de (24').

Si nous remplaçons, dans (61), les variables auxiliaires u et v par

$\varrho \cos\theta$ et $\varrho \sin\theta$, nous serons conduits, eu égard à (19), à la relation:

$$\left.\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-i\varrho)^2} H_m(x) H_n(x)\, dx = \\ &\quad = e^{(m-n)i\theta} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-i\varrho\cos\theta)^2} H_m(x+\varrho\sin\theta) H_n(x-\varrho\sin\theta)\, dx \end{aligned}\right\}. \quad (65)$$

où ϱ et θ sont arbitraires. Pour $\varrho=0$, on retrouve la propriété d'orthogonalité des polynomes d'HERMITE; pour $\theta=0$, (65) devient une identité. Remarquons que le second membre de (65) est indépendant du paramètre θ. En particulier, pour $\theta=\frac{\pi}{2}$, nous retrouvons la relation (20') du § 3. Nous allons voir aussi l'analogue de (65) pour les développements en série.

Remarquons que les formules inverses (19) et (21), écrites avec les fonctions de WHITTAKER correspondantes [28]), prennent une forme très symétrique qui est peut-être susceptible de généralisations. Par exemple, si $m+n$ est un entier pair, on aura les formules inverses

$$\int_0^\infty J_{-\frac{1}{2}}(2\sqrt{uv})\, u^{-\frac{3}{4}} W_{\frac{m}{2}+\frac{1}{4}, \pm\frac{1}{4}}(u)\, W_{\frac{n}{2}+\frac{1}{4}, \pm\frac{1}{4}}(u)\, du = (-1)^{\frac{m+n}{2}}\, 2^{-\frac{m+n+1}{2}}\, v^{-\frac{3}{4}} W_{\frac{m+n+1}{2}, \frac{m-n}{2}}(2v),$$

$$(-1)^{\frac{m+n}{2}}\, 2^{-\frac{m+n+1}{2}} \int_0^\infty J_{-\frac{1}{2}}(2\sqrt{uv})\, u^{-\frac{3}{4}} W_{\frac{m+n+1}{2}, \frac{m-n}{2}}(2u)\, du = v^{-\frac{3}{4}} W_{\frac{m}{2}+\frac{1}{4}, \pm\frac{1}{4}}(v)\, W_{\frac{n}{2}+\frac{1}{4}, \pm\frac{1}{4}}(v).$$

Si $m+n$ est impair, on aura des équations intégrales analogues, avec la fonction de BESSEL d'ordre $+\frac{1}{2}$.

2°. *Applications.* Nous avons vu [29]) que les polynomes de LAGUERRE vérifient la relation

$$\sum_{k=0}^{n} L_k^{(\alpha)}(x)\, L_{n-k}^{(\beta)}(y) = L_n^{(\alpha+\beta+1)}(x+y) = \sum_{k=0}^{n} L_k^{(\alpha+\beta)}(x+y). \quad . \quad . \quad (66)$$

Cette formule, par spécialisation des paramètres α et β, nous donnera des résultats intéressants. Posons, par exemple, $\alpha=\beta=-\frac{1}{2}$. Si nous rappelons les relations (15) qui lient les polynomes d'HERMITE et de LAGUERRE, nous aurons la généralisation d'une formule antérieure:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} H_{2k}(x)\, H_{2n-2k}(y) = (-1)^n\, 2^{2n}\, n!\, L_n(x^2+y^2) \quad . \quad . \quad (67)$$

---

[28]) Modern Analysis (cité sous [11])).

[29]) FELDHEIM, [8].

En appliquant aux deux membres la transformation $G_x(2, -iz)$, les relations (3c) et (62) donneront:

$$2^{-n} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} H_{2k}(z\sqrt{2})\, H_{2n-2k}(y\sqrt{2}) = H_n(y+z)\, H_n(y-z) \quad . \quad (68)$$

et cette formule est une conséquence immédiate de la formule de MEHLER[30]. La relation (67), si l'on y applique la transformation $G_x(2, -iz)$, redonne en vertu de (3c) et (68), l'équation intégrale (62). Nous avons supposé évidemment, pour que cette remarque ait un sens, que (68) a été démontré directement, sans l'emploi de (62). Elle permet encore d'écrire une relation analogue à (65):

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} H_{2k}(\varrho)\, H_{2n-2k}(\varrho) = \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} H_{2k}(\varrho\sqrt{2}\cos\theta)\, H_{2n-2k}(\varrho\sqrt{2}\sin\theta) \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad (69)$$

et l'on voit que le second membre est indépendant de θ.

Si l'on fait ensuite, dans (66), $\alpha = -\frac{1}{2}$, $\beta = 0$, les mêmes formules (15) donneront lieu à la relation

$$\frac{H_{2n+1}(x)}{2x} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k\, 2^{2k}\, k! \binom{n}{k} L_k(x^2-y^2)\, H_{2n-2k}(y) \quad . \; . \quad (70)$$

(y étant arbitraire). L'application de (62) à cette égalité conduit à

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x+iz)^2} \frac{H_{2n+1}(x\sqrt{2})}{2x}\, dx = \\ &= \sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{k} H_k(y+z)\, H_k(y-z)\, H_{2n-2k}(iy\sqrt{2}) \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad (71)$$

Le second membre représente ici encore une expression qui est indépendante de y. Si l'on fait $y=0$, on retrouve une relation établie déjà dans le n^0. 3 du § 2 [31]).

[30]) Voir § 2, n^0. 2. La relation (68) a été récemment démontrée par F. SCHOBLIK, Ueber eine Funktionalbeziehung Hermitescher Polynome. Monatsh. Math. Phys. **47**, 333—337 (1939).

[31]) Un grand nombre des relations liant les polynomes d'Hermite et de Laguerre, parmi lesquelles, par exemple, les formules déduites de (31), et la relation (38), ont été récemment données par L. TOSCANO, Numeri di Stirling generalizzati, etc. Comm. Pontif. Acad. Sc. **3**, 721—757 (1939), Mémoire paru après que le présent travail a été rédigé. La méthode de l'article cité est entièrement différente de la nôtre, et fait usage d'opérateurs différentiels, appliqués à

$$\frac{d^n(e^{-x^2})}{dx^n} = (-1)^n e^{-x^2} H_n(x), \quad \text{et à} \quad \frac{d^n(x^{n+\alpha}e^{-x})}{dx^n} = n!\, x^\alpha e^{-x} L_n^{(\alpha)}(x).$$

Continuons encore à considérer des conséquences de la formule (66), où nous supposons maintenant les paramètres α et β des entiers non-négatifs (que nous désignerons, pour distinction, par r et s), et remplaçons x et y respectivement par $2x^2$ et $2y^2$. Appliquons à cette relation, simultanément pour x et y, la transformation (21). Il vient

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} H_k(u)\, H_{k+r}(u)\, H_{n-k}(v)\, H_{n-k+s}(v) = \\ &= 2^{n+r+s}\, n!\, \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty}\!\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x+iu)^2-(y+iv)^2} (ix)^r (iy)^s L_n^{(r+s+1)}(2x^2+2y^2)\, dx\, dy \end{aligned}\right\} \quad (72)$$

r et s étant des entiers arbitraires, non-négatifs. Il ne sera pas superflu d'indiquer le cas particulier de (72) correspondant au cas le plus simple où $r = s = 0$. Alors (72) devient, en vertu de (63),

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} H_k^2(u)\, H_{n-k}^2(v) = 2^n\, n! \sum_{k=0}^{n} (-1)^k L_k(2u^2+2v^2), \ldots . \quad (73)$$

et l'on vérifie que cette relation peut aussi être déduite de la formule de MEHLER.

Nous insérons ici un résultat pouvant être déduit aussi de (67), en y posant $x = u+v$, $y = u-v$, et appliquant aux deux membres les transformations (61) et (62). Nous n'écrivons ce résultat, pour plus de simplicité, que dans le cas où $n = 2m$:

$$\left.\begin{aligned} &\binom{2m}{m}(2m)!\, L_{2m}(\varrho^2) + 2\sum_{k=1}^{m} (-1)^k \binom{2m}{m-k} (2m-2k)!\, \varrho^{4k} \cos 4k\theta \,.\, L_{2m-2k}^{(4k)}(\varrho^2) = \\ &\qquad = H_{2m}(\varrho\cos\theta)\, H_{2m}(\varrho\sin\theta). \end{aligned}\right\} (74)$$

Les cas particuliers correspondant à $\theta = 0$ et $\theta = \frac{\pi}{4}$ de cette relation sont à confronter aux relations établies dans I (§ 2, n^0. 2).

3^0. *Développement du produit de deux polynomes d'*HERMITE *de degrés et d'arguments différents.* Passons à la généralisation de la formule (68) en cherchant le développement analogue pour produits de polynomes d'HERMITE de degrés différents. Nous partons de la fonction génératrice (2) qui permet d'écrire que

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^m T^n}{m!\, n!} H_m(x+y)\, H_n(x-y) =$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(t+T)^r (t-T)^s}{r!\, s!}\, 2^{-\frac{r+s}{2}} H_r(x\sqrt{2})\, H_s(y\sqrt{2}),$$

et il faut chercher le coefficient de $t^m T^n$ dans la somme double du second membre.

Indiquons immédiatement la relation obtenue pour $T=0$:

$$\mathcal{H}_m\left(\frac{x+y}{2}\right)=\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\mathcal{H}_k(x)\,\mathcal{H}_{m-k}(y), \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (75)$$

qui constitue la généralisation de la formule (8).

En général, on a

$$\left.\begin{aligned} H_m(x+y)\,H_n(x-y) &= \\ &= (-1)^n\,2^{-\frac{m+n}{2}}\sum_{k=0}^{m+n} A_k^{(m,n)}\,H_k(x\sqrt{2})\,H_{m+n-k}(y\sqrt{2}) \\ \text{avec} \qquad A_k^{(m,n)} &= \sum_{r=0}^{k}(-1)^r\binom{n}{r}\binom{m}{k-r} \end{aligned}\right\} \quad . \qquad (76)$$

Remarquons que $A_k^{(m,n)}$ est le coefficient de x^k dans le développement du produit $(1+x)^m(1-x)^n$. Si $m=n$, ce coefficient n'est différent de 0 que pour k pair, et $A_{2k}^{(n,n)}=(-1)^k\binom{n}{k}$, de sorte que (76) redonne la relation (68). Si l'on fait $x=0$, on aura le développement

$$\mathcal{H}_m(y)\,\mathcal{H}_n(y)=2^{-(m+n)}\sum_{k=0}^{\left[\frac{m+n}{2}\right]}(-1)^k\frac{(2k)!}{k!}A_{2k}^{(m,n)}\,H_{m+n-2k}(y) \quad . \qquad (76')$$

qui est à comparer à la formule (16).

La relation (76) peut encore être généralisée, par exemple, de la façon suivante:

$$\left.\begin{aligned} H_m(x\cos\alpha+y\sin\alpha)\,H_n(x\sin\alpha-y\cos\alpha) &= \\ &= (-1)^n \sin^m\alpha\cos^n\alpha\sum_{k=0}^{m+n}\operatorname{cotg}^k\alpha\,.\,B_k^{(m,n)}\,H_k(x)\,H_{m+n-k}(y) \\ \text{avec} \qquad B_k^{(m,n)} &= \sum_{r=0}^{k}(-1)^k\binom{n}{r}\binom{m}{k-r}\operatorname{tg}^{2r}\alpha \end{aligned}\right\} \qquad (77)$$

α étant quelconque. Pour $\alpha=\frac{\pi}{4}$, (77) se réduit à (76). Indiquons une conséquence de (77). Multiplions ses deux membres par e^{-x^2}, et intégrons par rapport à x de $-\infty$ à $+\infty$. (L'intégration terme à terme, comme pour toutes les séries intervenant dans ce travail, est évidemment justifiée). Le second membre, par suite de l'orthogonalité, n'est différent de 0 que pour $k=0$, et alors on retrouve la relation (52).

4⁰. *Quelques conséquences des formules* (18). Remarquons que les relations (18) peuvent être considérées comme une généralisation de la formule (31) [32]. En effet, si nous posons, dans (18), $n=0$, la formule fondamentale (13*a*) permet d'écrire que

$$(-1)^m c_\nu(m,0,\beta-m,\alpha+m)=(-1)^\nu\binom{m+\alpha}{m-\nu},$$

de sorte que

$$L_m^{(\alpha)}(y)=\sum_{\nu=0}^{m}(-1)^{m-\nu}\binom{\beta}{m-\nu}L_\nu^{(\alpha+\beta)}(y),$$

et ceci est équivalent à (31).

Nous avons vu que l'inversion de (18), sous la forme (35), est impossible, et nous avons démontré, par contre, la possibilité du développement (60). On peut alors se proposer de chercher l'inversion de cette formule (60), c'est-à-dire une relation analogue à (18):

$$L_m^{(\alpha)}(y)\,L_n^{(\beta)}(y)=\sum_{n=0}^{m+n}h_k(m,n;\alpha,\beta)\,L_k^{(\alpha+\beta)}(2y) \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (78)$$

Nous pouvons démontrer, par la même méthode qui nous a conduit au résultat exprimé par (18) [33], que les coefficients h_k de ce développement vérifient la relation

$$h_k(m,n;\alpha,\beta)=(-1)^{m+n-k}\,h_k(m,n;\beta-m+n,\alpha+m-n) \quad . \qquad (78a)$$

(L'application de la transformation de HANKEL à (78) redonnera, en vertu de (12*c*), l'équation intégrale (22)).

En particulier, si $m=n$, les coefficients h_k sont nuls pour les valeurs impaires de k. Si nous prenons, par exemple, $m=n$, $\alpha=\beta=\frac{1}{2}$, et $y=v^2$, la formule (78) devient

$$H_{2n+1}^2(\sqrt{v})=2v\sum_{k=0}^{n}h_k\,L_{2k}^{(1)}(2v) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (79)$$

avec les valeurs correspondantes $h_k(n,n;\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ des coefficients. Or, si nous appliquons à cette relation la transformation de HANKEL de noyau $J_1(2\sqrt{uv})\,e^{-\nu}\,v^{-\frac{1}{2}}$, l'équation (12*c*) de WILSON donnera

$$\int_0^\infty J_1(2\sqrt{uv})\,e^{-\nu}\,v^{-\frac{1}{2}}\,H_{2n+1}^2(\sqrt{v})\,dv=2\,u^{\frac{1}{2}}\sum_{k=0}^{n}h_k\,L_{2k}^{(1)}(2u)=e^{-u}\,u^{-\frac{1}{2}}\,H_{2n+1}(\sqrt{u}).$$

C'est une équation intégrale établie par S. C. MITRA [34]. On déduit

---

[32]) Cette formule (31) a été déjà donnée, comme nous venons de le voir, dans le Mémoire de E. KOGBETLIANTZ, Recherches sur la sommabilité des séries d'Hermite. Ann. Sc. de l'Ec. Norm. Sup. 3, **49**, 137—221 (1932).

[33]) FELDHEIM, [8].

[34]) MITRA, Journ. London Math. Soc. **11**, 252 (1936).

ensuite de (78), par dérivation, et en posant $\alpha=\beta=-\frac{1}{2}$, le développement

$$H_{2n-1}(\sqrt{v})\, H_{2n}(\sqrt{v})=2\, v^{\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{n-1} h'_k\, L_{2k+1}(2v), \quad . \quad . \quad . \qquad (79a)$$

qui fournit, par application de la transformation de HANKEL de noyau $J_0(2\sqrt{u\,v})\, e^{-v}\, v^{-\frac{1}{2}}$, l'équation intégrale analogue à celle de MITRA, et trouvée par A. ERDÉLYI [35]. (Ces équations intégrales sont des cas particuliers de (22), et leur déduction précédente rentre dans la remarque faite au sujet de la formule (78)).

Remarquons, pour terminer, que (18) et (78) donnent lieu aux développements

$$H_{2n}(\sqrt{v})=\sum_{k=0}^{n} h_k\, L_k^{(n-1)}(v)=(-1)^n \sum_{k=0}^{n} h_k \frac{v^k}{k!} \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (80)$$

(avec les mêmes h_k dans les coefficients!), et

$$H_{2n}(\sqrt{v})=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} h'_k\, L_{2k}^{(n-1)}(2v) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (80')$$

L'application de la transformation de HANKEL à (80) (ainsi qu'à la relation que l'on en déduit par dérivation) ou à (80') conduira à des équations intégrales démontrées également par MITRA, et MEIJER [36], et formant des cas particuliers de (22).

Budapest, le 12 février, 1940.

35) ERDÉLYI, [2].

36) MITRA, Math. Zeitschr. **43**, 205—211 (1938); C. S. MEIJER, Proc. Kon. Ned. Akad. v. Wetensch., Amsterdam, **41**, 744—755 (1938).

Mathematics. — *On the thermo-hydrodynamics of perfectly perfect fluids.* I. By D. VAN DANTZIG. (Communicated by Prof. J. A. SCHOUTEN).

(Communicated at the meeting of February 24, 1940.)

Summary.

The equations of motion of a perfectly perfect (in particular of a relativistically perfect) fluid are brought into a general invariant form, independent of metrical geometry (§ 1). They are shown to be derivable from a simple variational principle. It states that the integral of the pressure over an arbitrary fourdimensional domain in space time, under a deformation "dragging along" (cf. § 1) the chemical parameters λ^r and the temperature vector ϑ^h, hence also the congruence of macroscopic wordlines, is equal to δx^4 times the virtual heat of the deformation, flowing through the boundary into U (§ 2). In § 3 some other variational relations are derived. In § 4 a result due to EISENHART and used by SYNGE is obtained by metrical specialisation from a one dimensional variational principle.

§ 1. *The equations of motion.*

The equations of motion of continuously distributed matter are according to EINSTEIN [1])

$$\nabla_j\, \mathfrak{T}^{j}_{.i}=0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (1)$$ [2])

where ∇_j is the symbol for covariant derivation, whereas for a relativistically perfect fluid [3])

$$\mathfrak{T}^{h}_{.i}=\mathfrak{K}^{h}_{.i}+\mathfrak{S}^{h}_{.i}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (2)$$

$$\mathfrak{K}^{h}_{.i}=-(\varrho+\mathfrak{p})\, i^h\, i_i+\mathfrak{p}\, A^h_i, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (3)$$ [4]) [5]) [6])

$$\mathfrak{S}^{h}_{.i}=\sqrt{-\mathfrak{g}}\,(F^{hk}F_{ik}-\tfrac{1}{4}A^h_i F_{jk}F^{jk}) \quad . \quad . \quad . \qquad (4)$$

1) E. g. A. EINSTEIN, [1], in particular § 17, 19, 20. The numbers between square brackets refer to the bibliography at the end of the paper.

2) The suffixes h, i, j, k, l run independently through the range $1, 2, 3, 4$, corresponding with the space-time coordinates x^h; r, s, t run through the range $5, \ldots, 4+n$, corresponding with the n chemical components Γ^r; $\varkappa, \lambda, \mu, \nu$ through the range $1, 2, 3, \ldots, 4+n$, and A, B, C through the range $0, 1, 2, \ldots, 4+n$.

3) The remark that (3) is valid for a perfect fluid in *adiabatic* motion only, was made by EINSTEIN [1] already; it seems to have been neglected by several later autors.

4) In order to avoid superfluous factors $\sqrt{-\mathfrak{g}}$ ($\mathfrak{g}=det\, g_{ij}$), ϱ itself instead of $\varrho\sqrt{-\mathfrak{g}}$ stands for the proper energy density. All densities except ϱ, ϱ_0, $\bar{\varrho}$ are denoted by Gothic letters.

5) A^h_i is the unit-tensor of space-time: $A^h_i=\begin{cases}1, & h=i\\ 0, & h\neq i\end{cases}$. The unit-tensors Δ^r_s, $E^\varkappa_\lambda$, $\mathfrak{A}^A_B$ play the same rôle as A^h_i with regard to their respective ranges.

6) $i^h=\dfrac{dx^h}{ds}$ is a unit-vector along the macroscopic worldlines, $i^h\, i_h=+1$, $i^4>0$.