

Physics. — La pression du toit sur le charbon près du front dans les exploitations par tailles chassantes. Par F. K. TH. VAN ITERSSEN. (III).

DEUXIÈME CHAPITRE.

Répartition des pressions après écrasement du charbon.

(Communicated at the meeting of January 27, 1940.)

Annexe 1. Se référant au § 2.

Distributions des pressions dans le massif rocheux, chargeant le charbon jusqu'à la résistance à l'écrasement.

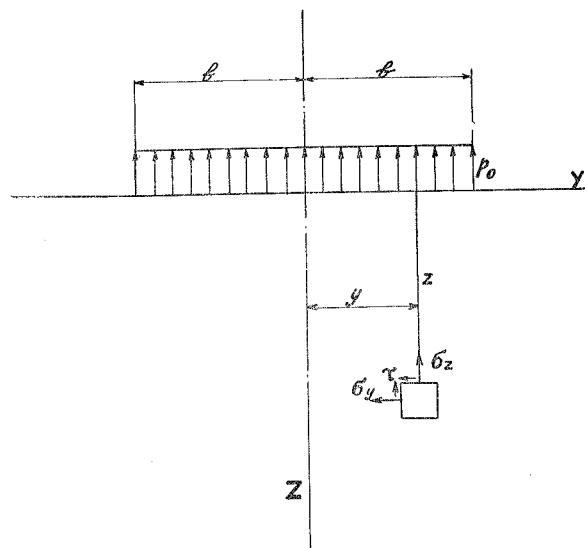


Fig. 18. Héli-espace sollicité sur une bande de charbon de largeur $2b$ par la tension p_0 .

Au lieu d'aborder le problème posé dans la figure 2, nous allons résoudre le problème indiqué dans la figure 18 et après nous superposons la pression p_0 régnant dans tous les sens. p_0 est la résistance à l'écrasement du charbon.

En substituant $K = -p_0 dy_0$ dans les formules de MICHELL-FLAMANT de la page 92 du Chapitre I, Proceedings Vol. XLII, No. 2, 1939, on obtient

$$\sigma_z = \frac{2 p_0 z}{\pi} \int_{y_0=-b}^{y_0=+b} \frac{dy_0}{\{(y-y_0)^2 + z^2\}^2} = \frac{p_0}{\pi} \left\{ \frac{(y+b)z}{(y+b)^2 + z^2} - \frac{(y-b)z}{(y-b)^2 + z^2} + \operatorname{arc tg} \frac{y+b}{z} - \operatorname{arc tg} \frac{y-b}{z} \right\}$$

$$\sigma_y = \frac{2 p_0 z}{\pi} \int_{y_0=-b}^{y_0=+b} \frac{(y-y_0)^2 dy_0}{\{(y-y_0)^2 + z^2\}^2} = \frac{p_0}{\pi} \left\{ -\frac{(y+b)z}{(y+b)^2 + z^2} + \frac{(y-b)z}{(y-b)^2 + z^2} + \operatorname{arc tg} \frac{y+b}{z} - \operatorname{arc tg} \frac{y-b}{z} \right\}$$

$$\tau = \frac{2 p_0 z^2}{\pi} \int_{y_0=-b}^{y_0=+b} \frac{(y-y_0) dy_0}{\{(y-y_0)^2 + z^2\}^2} = \frac{p_0}{\pi} \left\{ \frac{z^2}{(b-y)^2 + z^2} - \frac{z^2}{(b+y)^2 + z^2} \right\}$$

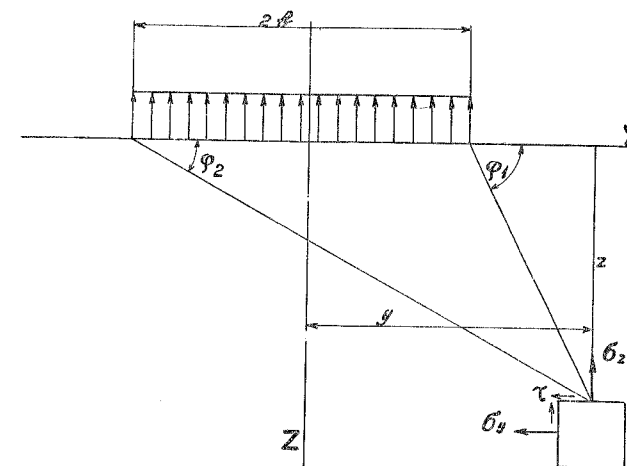


Fig. 19. Même problème que fig. 18. Les points de l'héli-espace sont fixés par les angles φ_1 et φ_2 au lieu de l'être par les coordonnées y et z .

Quand on se rend compte de la signification des termes, on peut mieux fixer chaque point $y z$ par les deux angles φ_1 et φ_2 (Fig. 19) et alors nos formules deviennent comme chez NÁDAI:

$$\sigma_z = \frac{p_0}{2\pi} (2\varphi_1 - 2\varphi_2 - \sin 2\varphi_1 + \sin 2\varphi_2) - p_0$$

$$\sigma_y = \frac{p_0}{2\pi} (2\varphi_1 - 2\varphi_2 + \sin 2\varphi_1 - \sin 2\varphi_2) - p_0$$

$$\tau = \frac{p_0}{2\pi} (\cos 2\varphi_1 - \cos 2\varphi_2).$$

Ici nous avons superposé la pression $-p_0$ dans tous les sens pour donner la distribution autour d'une veine de charbon, dont on a exploité une bande (C'est le cas de la figure 2). Nous supposons que la profondeur est telle que des deux côtés le charbon est également écrasé et résiste avec la contrepression p_0 .

Annexe 2. Se référant au § 4.

Répartition de la pression sur des piliers de charbon, compte tenu de l'élasticité du charbon et du schiste.

Nous cherchons la répartition de la pression sur un pilier, une bande inexploitée de charbon. (Figure 11). Cette fois pas, comme dans le Chapitre I considérée comme indéformable, mais au contraire élastique et se dilatant transversalement sans résistance, sans frottement, entre toit et mur. Parce que c'est un cas symétrique nous ne considérons que la moitié inférieure. La solution exacte n'est pas connue, mais nous savons que la pression augmente vers les bords et nous posons

$$p = p_0 + k \frac{y^2}{b^2} + l \frac{y^4}{b^4} + m \frac{y^6}{b^6} + \dots$$

Les coefficients à déterminer de manière que le dessous du pilier de charbon épouse la surface du mur (le sol).

D'abord nous calculons l'empreinte du mur; pas la profondeur absolue, mais uniquement sa forme. Nous employons une formule donnée dans le Chapitre I, Proceedings Vol. XLII, No. 2, 1939, p. 4.

$$\frac{dw}{dy} = -\frac{2(m^2-1)K}{\pi m^2 E} \frac{1}{y} \quad 1)$$

$\frac{dw}{dy}$ est l'inclinaison de la surface due à l'action d'une charge K à une distance y de K . Dans notre cas présent nous remplaçons K par $p dy$ et y par $(y-y_0)$ pour calculer d'abord l'inclinaison de la surface à la distance y du centre. Nous nous contentons de trois termes et trouvons

$$\frac{dw}{dy} = -\frac{2(m^2-1)}{\pi m^2 E} \int_{y_0=-b}^{y_0=+b} \left(p_0 + k \frac{y_0^2}{b^2} + l \frac{y_0^4}{b^4} \right) \frac{dy_0}{y_0-y}$$

$$\frac{dw}{dy} = -\frac{2(m^2-1)}{\pi m^2 E} \left[p_0 \ln \frac{b+y}{b-y} + \frac{k}{b^2} \left(y^2 \ln \frac{b+y}{b-y} - 2by \right) + \frac{l}{b^4} \left\{ y^4 \ln \frac{b+y}{b-y} - by \left(\frac{2}{3} b^2 + 2y^2 \right) \right\} \right].$$

$$\text{Pour } y=0 \quad \frac{dw}{dy} = 0.$$

En intégrant encore une fois on trouve l'empreinte sauf la constante d'intégration (L'index s veut dire que c'est la déformation de la surface du schiste).

$$w_s = \frac{2(m^2-1)}{\pi m^2 E_s} \left\{ p_0 \left(b \ln \frac{b^2}{b^2-y^2} - y \ln \frac{b+y}{b-y} \right) + \frac{k}{b^2} \left(\frac{b^3}{3} \ln \frac{b^2}{b^2-y^2} - \frac{y^3}{3} \ln \frac{b+y}{b-y} + \frac{2}{3} b y^2 \right) + \frac{l}{b^4} \left(\frac{b^5}{5} \ln \frac{b^2}{b^2-y^2} - \frac{y^5}{5} \ln \frac{b+y}{b-y} + \frac{2}{15} b^3 y^2 + \frac{2}{5} b y^4 \right) \right\}.$$

1) Nous corrigeons ici une erreur de calcul, qui n'avait aucune influence sur les résultats du chapitre premier.

E_s représente le module d'élasticité du schiste.

La forme que prend la surface inférieure du pilier de charbon comprimé par les mêmes pressions sera

$$w_c = \frac{p_0 + k \frac{y^2}{b^2} + l \frac{y^4}{b^4}}{E_c} a.$$

E_c représente le module d'élasticité du charbon.

La partie constante de l'intégral, l'impression au centre ne nous intéresse pas. Il ne s'agit que de la diminution de l'affaissement du dessous du pilier vers les bords.

Pour trouver les coefficients k et l on mettra

$$\begin{aligned} & \frac{2(m^2-1)}{\pi m^2 E_s} \left\{ p_0 \left(b \ln \frac{b^2}{b^2-y^2} - y \ln \frac{b+y}{b-y} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{k}{b^2} \left(\frac{b^3}{3} \ln \frac{b^2}{b^2-y^2} - \frac{y^3}{3} \ln \frac{b+y}{b-y} + \frac{2}{3} b y^2 \right) \right. \\ & \left. + \frac{l}{b^4} \left(\frac{b^5}{5} \ln \frac{b^2}{b^2-y^2} - \frac{y^5}{5} \ln \frac{b+y}{b-y} + \frac{2}{15} b^3 y^2 + \frac{2}{5} b y^4 \right) \right\} = \frac{-k \frac{y^2}{b^2} - l \frac{y^4}{b^4}}{E_c} a. \end{aligned}$$

Nous devons calculer

$$p = p_0 + k \frac{y^2}{b^2} + l \frac{y^4}{b^4}.$$

k et l étant proportionnel à p_0 .

On voit que seulement

$$\frac{2(m^2-1) E_c}{\pi m^2 E_s} \frac{b}{a}$$

joue un rôle et qu'une autre proportion de E_c et E_s équivaut à un changement égal dans la proportion b et a .

Avant de continuer nous devons choisir les constantes. Prenons $E_{schiste} = 360.000 \text{ kg/cm}^2$ $E_{charbon} = 54.500 \text{ kg/cm}^2$. Il nous suffit de prendre $E_s : E_c = 6.6$. Pour le schiste m est très grand. Prenons $m = 10$.

Alors $\frac{2(m^2-1) E_c}{\pi m^2 E_s} = 0.0955$.

Il est impossible de faire coïncider les deux surfaces sur toute la largeur du pilier de charbon. En effet le relèvement tout près des bords a un caractère différent pour les deux courbes. Mais en prenant k et l égale on obtient une coïncidence quasi parfaite sur une très grande étendue. C'est ce que nous avons représenté dans les figures 12, 13 et 14.

Nous ne prétendons pas contribuer dans cette étude à la théorie de l'élasticité, ce que nous cherchons ce sont les lois physiques pour l'équilibre du terrain houllier autour des exploitations profondes où les pressions surpassent la résistance des matières à la compression.

Les modules d'élasticité du schiste et du grès sont très élevés comparés à celui du charbon. C'est déjà un résultat qui mérite l'attention que notre calcul a démontré que pour les piliers de charbon laissés dans une couche puissante de charbon, c.à.d. pour la méthode américaine d'exploitation on peut avec une approximation suffisante considérer le charbon comme de la matière élastique comprimée entre surfaces parallèles et indéformables.

Il est utile d'appliquer pour ce cas la solution donnée par KNEIN¹⁾, où le frottement est dûment mis en compte. Alors on trouve, que sur une étendue très restreinte dans les coins au ras du front, les pressions sont infiniment grandes, mais en comparant le calcul avec les résultats d'essai on s'aperçoit que ce résultat de calcul n'a pas de signification réelle et qu'on contraire le frottement provoque que le pilier porte plus que la masse de charbon fendue en colonnes mise à la base de nos calculs.

Nous avons donc prouvé que pour les exploitations à faible profondeur ou dans le houllier de forte résistance, le charbon n'est pas morcelé. Dans cette condition il faut l'abattre par machines haveuses et explosifs, tandis que nous traitons à présent les exploitations à pressions tellement élevées que le front du charbon se déplace vers le vide et fait apparaître des plans de clivage soit macro- ou du moins microscopiques.

Annexe 3. Se référant au § 5.

Distribution de la pression sur les couches de charbon. Celui-ci considéré comme de la matière parfaitement plastique.

Nous nous basons pour résoudre ce problème sur un exemple devenu classique, traité dans tous les manuels sur la théorie de la plasticité, celui de la matière plastique pressée entre deux surfaces rugueuses et parallèles. Par ces traités nous savons qu'on peut considérer le frottement selon les surfaces comme constant et égal à p_s la résistance au cisaillement de la matière.

PRANDTL, Zeitschr. Ang. Mech. 1923, p. 401.

HÜTTE, Des Ingenieurs Taschenbuch, I, 1936, p. 347 e).

Quetschen einer plastischen Masse zwischen reibenden Platten.

NÁDAI, Plasticity 1931, p. 221.

Handbuch der Physik, Band VI, Mechanik der Elastischen Körper, 1928, p. 473.

Sur la distance que la matière est exprimée, sur la largeur $b-c$ que le charbon est en mouvement plastique, la pression contre le toit et le mur

¹⁾ MAX KNEIN, Zur Theorie des Druckversuchs. Abhandlungen aus dem Aerodynamischen Institut an der Technischen Hochschule Aachen. Heft 7, 1927, p. 43—62.

s'accroît linéairement de zéro jusqu'à la pression p_0 du terrain vierge.

Nous trouvons la solution en superposant la compression $-p_0$ dans tous les sens, le chargement de l'hémi-espace représenté dans la partie

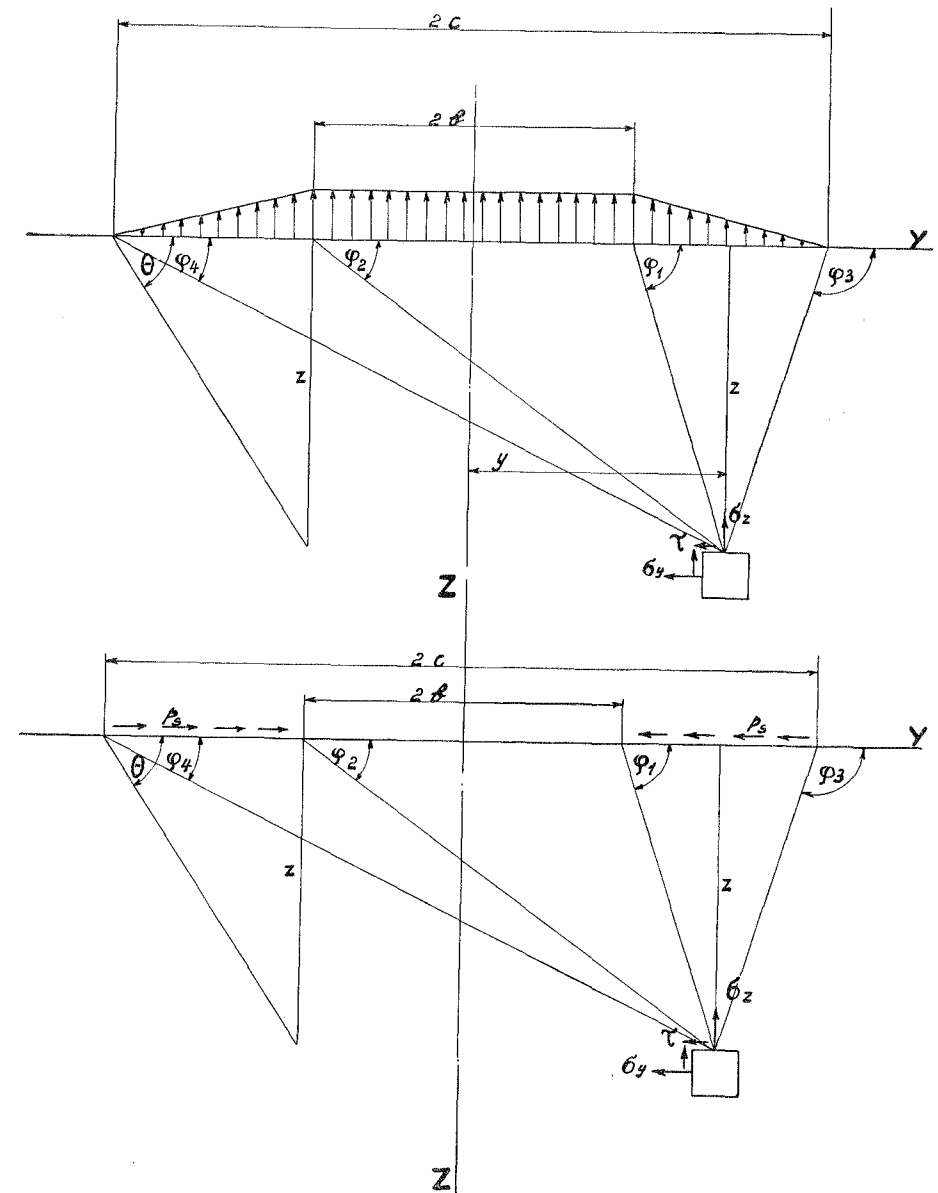


Fig. 20. Notations pour le traitement du problème d'une matière plastique comprimé entre deux hémisphères de matière élastique.

supérieure de la figure 20 et le frottement indiqué dans la partie inférieure de la même figure. A la distance c du centre il règne la pression $-p_0$ dans la masse plastique sur toute la hauteur de la couche d'épaisseur $2a$.

Cette pression tend à pousser la partie plastique de la couche et est en équilibre avec la résistance exercée par les deux surfaces.

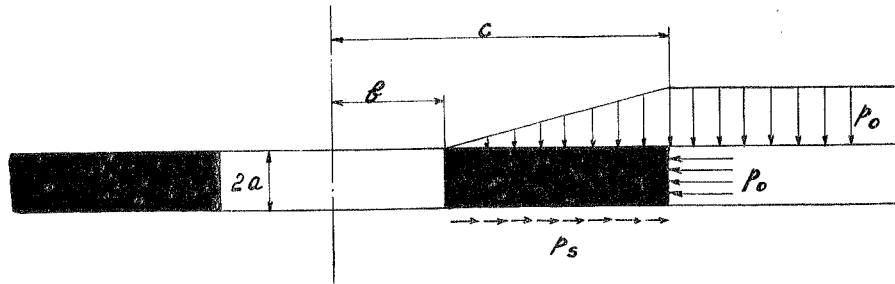


Fig. 21. Equilibre entre la poussée sur la zone plastique et le frottement avec le rocher.

$$p_0 \times 2a = 2p_s(c-b) \quad c-b = \frac{p_0}{p_s} a.$$

Ainsi la distance c jusqu'à laquelle la matière se trouve en état plastique peut être calculée et alors on connaît pour chaque point les angles indiqués dans la distribution de la pression verticale dans les figures 20 et 21. Par des intégrations analogues à celles du paragraphe précédent on trouve pour les trois tensions en chaque point y, z

$$\begin{aligned} \sigma_z = & -p_0 + \frac{p_0}{2\pi} (2\varphi_1 - 2\varphi_2 - \sin 2\varphi_1 + \sin 2\varphi_2) \\ & + \frac{p_0}{2\pi} \frac{c-y}{c-b} (2\varphi_3 - 2\varphi_1 + \sin 2\varphi_1 - \sin 2\varphi_3) - \frac{p_0}{\pi} \operatorname{tg} \theta (\sin^2 \varphi_3 - \sin^2 \varphi_1) \\ & + \frac{p_0}{2\pi} \frac{c+y}{c-b} (2\varphi_2 - 2\varphi_4 - \sin 2\varphi_2 + \sin 2\varphi_4) - \frac{p_0}{\pi} \operatorname{tg} \theta (\sin^2 \varphi_2 - \sin^2 \varphi_4) \\ & + \frac{p_s}{\pi} (\sin^2 \varphi_3 - \sin^2 \varphi_1 - \sin^2 \varphi_2 + \sin^2 \varphi_4) \\ \sigma_y = & -p_0 + \frac{p_0}{2\pi} (2\varphi_1 - 2\varphi_2 + \sin 2\varphi_1 - \sin 2\varphi_2) \\ & + \frac{p_0}{2\pi} \frac{c-y}{c-b} (2\varphi_3 - 2\varphi_1 + \sin 2\varphi_3 - \sin 2\varphi_1) + \\ & \quad + \frac{p_0}{\pi} \operatorname{tg} \theta \left(\ln \frac{\sin^2 \varphi_3}{\sin^2 \varphi_1} - \sin^2 \varphi_3 + \sin^2 \varphi_1 \right) \\ & + \frac{p_0}{2\pi} \frac{c+y}{c-b} (2\varphi_2 - 2\varphi_4 + \sin 2\varphi_2 - \sin 2\varphi_4) + \\ & \quad + \frac{p_0}{\pi} \operatorname{tg} \theta \left(\ln \frac{\sin^2 \varphi_4}{\sin^2 \varphi_2} + \sin^2 \varphi_2 - \sin^2 \varphi_4 \right) \\ & + \frac{p_s}{\pi} \left(\ln \frac{\sin^2 \varphi_3 \sin^2 \varphi_4}{\sin^2 \varphi_1 \sin^2 \varphi_2} - \sin^2 \varphi_3 + \sin^2 \varphi_1 + \sin^2 \varphi_2 - \sin^2 \varphi_4 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau = & \frac{p_0}{2\pi} (\cos 2\varphi_1 - \cos 2\varphi_2) \\ & + \frac{p_0}{2\pi} \operatorname{tg} \theta (\sin 2\varphi_3 - \sin 2\varphi_1 + 2\varphi_3 - 2\varphi_1) - \frac{p_0}{\pi} \frac{y-c}{c-b} (\sin^2 \varphi_3 - \sin^2 \varphi_1) \\ & - \frac{p_0}{2\pi} \operatorname{tg} \theta (\sin 2\varphi_2 - \sin 2\varphi_4 + 2\varphi_2 - 2\varphi_4) + \frac{p_0}{\pi} \frac{c+b}{c-b} (\sin^2 \varphi_2 - \sin^2 \varphi_4) \\ & + \frac{p_s}{2\pi} (2\varphi_3 - 2\varphi_1 - 2\varphi_2 + 2\varphi_4 + \sin 2\varphi_3 - \sin 2\varphi_1 - \sin 2\varphi_2 + \sin 2\varphi_4). \end{aligned}$$

Avec ces formules nous avons construit la figure 16, où quelques absurdités ou impossibilités sautent aux yeux.

Pour bien comprendre l'applicabilité de la théorie de la plasticité et pour mieux apprécier la valeur des calculs suivants il faut que nous nous étendions sur les anomalies aux points $z=0, y=b$ et $y=c$.

Comme presque toujours, les équations différentielles simultanées, qui doivent conduire à la répartition des tensions dans la masse plastique et aux lignes de glissement, ne permettent pas une solution générale et il faut choisir une répartition simple, une distribution spéciale des tensions au contour de la masse qui donne une solution rationnelle.

La solution connue, qui a servi de base à nos calculs est celle correspondante à la distribution des tensions au contour représentée en la figure 22.

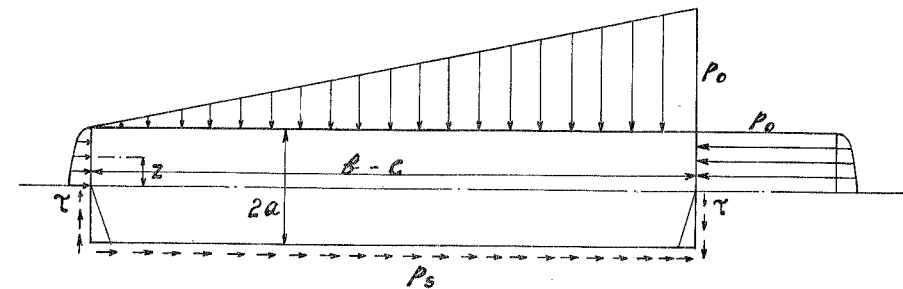


Fig. 22. Distribution des pressions et des tensions de cisaillement, autour de la masse plastique, un peu idéalisée (d'après PRANDTL-NÁDAL-HÜTTE) pour permettre la solution des équations d'équilibre.

En vérité le front du charbon est exempt de pression et de tensions de cisaillement, mais nous adoptons sur le front nu du charbon la pression

$$\sigma_y = 2p_s \sqrt{1 - \frac{y^2}{a^2}}.$$

C'est une pression très légère distribuée selon une ellipse et aussi la tension de cisaillement

$$\tau = p_s \frac{z}{a}.$$

C'est une force de cisaillement nulle et des tensions insignifiantes.

Sur la surface de la masse plastique située à l'intérieur de la couche nous calculons avec la pression

$$\sigma_y = p_0 + 2 p_s \sqrt{1 - \frac{z^2}{a^2}}$$

au lieu de p_0 seulement. Ainsi nous n'ajoutons aucune force résultante sur la masse plastique. Les tensions de cisaillement ajoutées sont

$$\tau = -p_s \frac{z}{a}$$

mais ne donnent non plus de forces de cisaillement sur toute l'épaisseur de la masse plastique.

Les tensions τ devaient être ajoutées pour donner l'équilibre des tensions jusque dans les coins même. En vérité elles n'existent pas sur la surface libre et alors le frottement disparaît dans le coin même sur une très petite étendue. Les anomalies représentées dans la figure 12 peuvent être rayées. Mais la solution exacte tout près des coins n'est pas connue.

La solution est parfaitement acceptable à quelque distance du front $y=b$ et de la limite de plasticité, chez $y=c$. Pour ces limites elle se simplifie en

$$\tau = 0 \text{ et } \sigma_y = p_0 \quad \sigma_z = p_0 \quad \tau = 0.$$

Mais alors nous pouvons simplifier cette sorte de problèmes en admettant que σ_x est constante dans toute l'épaisseur de la couche supposée comme assez étendue en largeur, comparée à l'épaisseur.

Annexe 4. Se référant au § 6.

La pression sur une couche de matière incohérente.

Nous avons exposé dans une étude sur le fonçage des puits de mine ¹⁾ que la condition pour le glissement à l'intérieur d'un massif pulvérulent est que la pression agissante sur une surface de glissement devient tangente au cercle de Mohr. L'angle entre cette pression et la surface de glissement est égale à l'angle du talus naturel. On trouve ce théorème expliqué dans plusieurs traités ²⁾.

Pour le charbon tout venant le talus est de 45° . Et pour calculer un exemple en chiffres nous prenons cet angle.

Dans la figure 23 nous avons représenté le cercle de Mohr pour ce cas. La figure 23 nous apprend

$$\varrho_1 = \varrho_2 \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi}.$$

¹⁾ De Ingenieur 1930, No. 4, M. p. 20 et No. 52, M. p. 31.

²⁾ Les Cuvelages par L. DENOËL 1935, p. 46.

Equilibre des massifs à frottement interne par ALB. CAQUOT 1934.

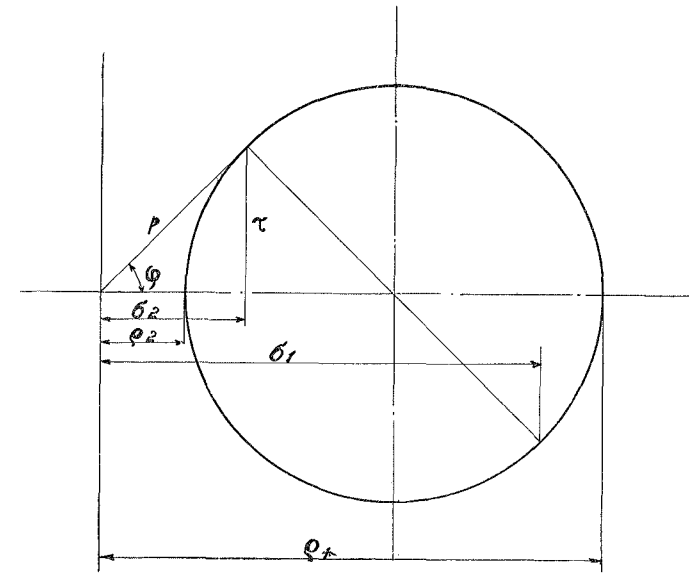


Fig. 23. Cercle de MOHR représentant la condition de glissement dans un massif pulvérulent. Dans chaque point de la zone plastique la tension p est tangente du cercle et fait l'angle φ avec la surface où il agit. $\varphi =$ angle du talus naturel, σ composante normale de p , τ composante tangentielle en même temps résistance au glissement interne. ϱ_1 et ϱ_2 tensions principales au même point.

Pour $\varphi = 45^\circ \quad \varrho_1 = 5,8 \varrho_2$

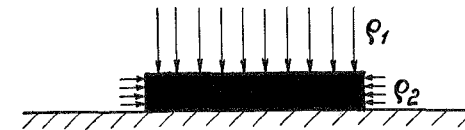


Fig. 24. Contraintes d'un élément dans un massif incohérent au moment de glissement.

Quelle pression ϱ_1 peut supporter un élément d'une matière pulvérulente, appuyée latéralement par la pression ϱ_2 . La réponse est donnée par la condition de glissement

$$\varrho_1 = \varrho_2 \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi}.$$

En général le schiste du toit et du mur est luisant et le coefficient de frottement est petit. Nous le dénommons f et écrivons l'équilibre pour un élément de hauteur $2a$ et de largeur dy quand il se déplace vers le vide

$$2a \times dp_y = 2fp_z dy \quad p_z = \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} p_y$$

$$\frac{dp_y}{p_y} = f \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} d \frac{y}{a}.$$

Après intégration

$$\ln \frac{p_y}{p_0} = f \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \frac{y}{a}$$

$$p_y = p_0 e^{f \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \frac{y}{a}} \quad p_z = \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} p_0 e^{f \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \frac{y}{a}}$$

Avec la formule

$$y = a \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} \frac{1}{f} \ln \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} \frac{p_z}{p_0}$$

on peut calculer à quelle distance y atteint la pression correspondante à la profondeur

$$p = \frac{h \gamma}{10} \text{ kg par cm}^2.$$

Le résultat est qu'avec un peu d'appui, un peu de boisage une matière incohérente peut supporter des pressions très élevées tout près du front. C'est ce que dit la loi exponentielle.

Pour terminer nous calculons encore la répartition de la pression près du front du charbon pour la condition d'écrasement du charbon qui se rapproche de la réalité.

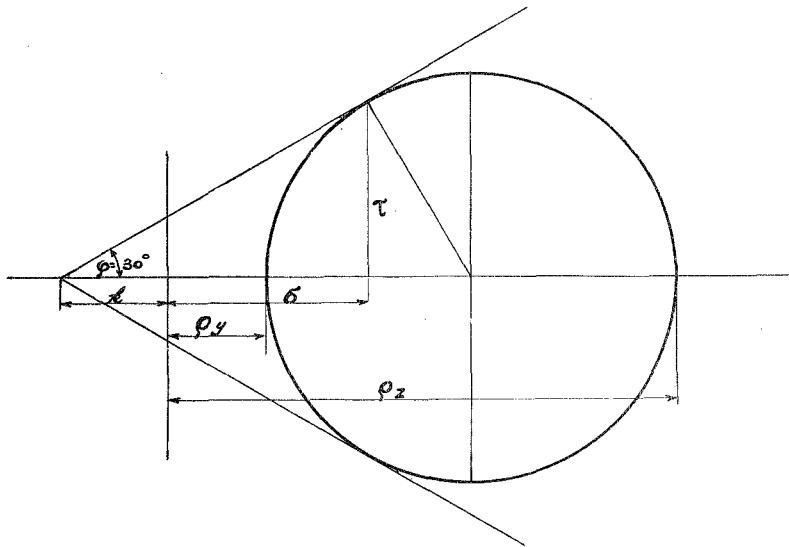


Fig. 25. Condition de la résistance au glissement à l'intérieur d'une couche de charbon. Les confins des cercles de MOHR sont deux lignes à 30° avec l'axe.

Le charbon peut résister à une petite tension et des essais de résistance à la pression sur éprouvettes soumises à pression dans tous les sens ont démontré que la représentation de la condition de rupture est assez bien

exprimée par la figure 25. Les cercles de Mohr touchent aux deux tangentes sous 30° avec l'abscisse.

La condition de glissement dans le massif du charbon selon la figure est

$$\sin \varphi = \frac{\frac{\sigma_z - \sigma_y}{2}}{\frac{\sigma_z + \sigma_y}{2} + k}$$

et on obtient la formule

$$\sigma_z = \frac{2 \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} k e^{f \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \frac{y}{a}}$$

que nous représentons dans la figure 26 pour $f = 1/10$.

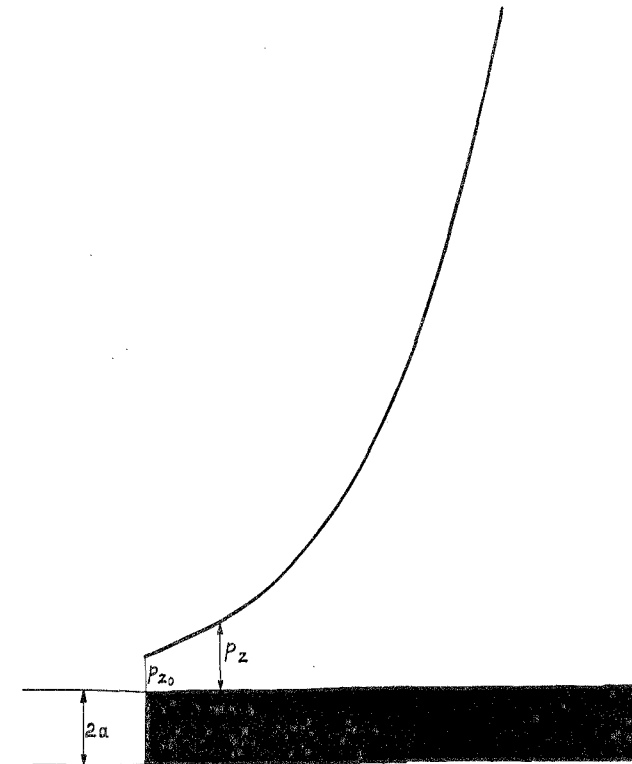


Fig. 26. Augmentation rapide de la pression sur le charbon devant le front selon une loi exponentielle, dessinée à échelle. p_{z_0} est la résistance à l'écrasement du charbon.

Nous devons observer que nous appelons la pression du toit sur le charbon une pression principale σ_z . Mais il faut observer qu'elle est accompagnée d'un peu de frottement, d'une tension de cisaillement $f\sigma_z$. L'approximation est absolument permise pour les applications techniques.

Du reste il est possible d'appliquer des formules analogues à celles utilisées dans l'annexe 3¹⁾.

Si l'on poursuit les calculs avec les équations données par HARTMANN on trouve exactement la même répartition de la pression p_z selon les surfaces de contact et on peut indiquer que pour les parties près du front et près de la limite qui sépare la partie écrasée de la partie déformée élastiquement, la théorie complète doit se contenter aussi d'une acceptation arbitraire mais peu importante.

Il est à noter que même dans le charbon friable la pression peut accroître à des valeurs excessives, surpassant sans limites la résistance à la rupture du toit et du mur, à très courte distance y grace au frottement et à la loi exponentielle.

Les calculs ont été contrôlés par M. A. HELLEMANS, ingénieur physicien et électricien, ingénieur des travaux de fond à la mine Hendrik. M. HELLEMANS, ainsi que M. G. E. TUMMERS, ingénieur physicien des laboratoires des recherches mécaniques de la mine Emma ont bien voulu discuter avec moi les problèmes traités dans cette étude.

¹⁾ Handbuch der Physik, Band VI. Das Gleichgewicht lockerer Massen, p. 493.

Hydrodynamics. — *On the application of viscosity data to the determination of the shape of protein molecules in solution.* *) By J. M. BURGERS. (Mededeeling N^o. 38 uit het Laboratorium voor Aero- en Hydrodynamica der Technische Hoogeschool te Delft.)

(Communicated at the meeting of March 30, 1940.)

Formulae for some model systems consisting of rigidly connected spheres of equal radius.

6. *Model system consisting of two rigidly connected spheres.* — In the preceding sections the results of experimental investigations on the effective viscosity of suspensions of certain proteins and on the sedimentation velocities of these proteins have been compared with the results derived from theoretical calculations, based upon the assumption that the protein molecules might be treated as rotational ellipsoids, either elongated or flattened. It was found that there always remained discrepancies between calculated and observed results, in the sense that the sedimentation velocities came out too low, when the dimensions were calculated with the aid of the observed values of η_{sp} .

Now ellipsoidal bodies, whether elongated or oblate, have a rather large concentration of mass near the centre. It can be supposed that with bodies of other types, where the mass is more dispersed towards the ends, the specific increase of the viscosity will be enhanced relatively to the frictional constant. It is possible that such an effect will tend to diminish the discrepancy which was found when making the calculations for ellipsoids.

An approximate calculation can be made without great difficulty for an extreme case, in which the molecule is assumed to consist of *two spheres* of equal radius R , joined by a rigid link (which itself is assumed not to influence the motion of the liquid and which, therefore, will be left out of consideration), so that the centres of the spheres are at the constant distance a from each other (see fig. 1a). Such a system has already been

*) Continued from these Proceedings 43, 315 (1940). — Dr. K. O. PEDERSEN in a letter to the author has pointed out that the value 150000 for the molecular weight of serum globulin, mentioned in the preceding part in Table I and used in the calculations concerning the sedimentation velocity, must be considered as too low, and that the value 167000, given in Table 5, p. 44, of "The Ultracentrifuge", is assumed to be the most probable one. He further mentions that the behaviour of gliadin shows that the molecules of this particular protein are thread-shaped. — In connection with footnote 5) the following paper should be mentioned: A. POLSON, Untersuchungen über die Diffusionskonstanten der Proteine, Kolloid-Zeitschr. 87, 149—181 (1939).