4. Genügt ein Vektor w_λ einem System von Gleichungen

$$X_a^{\mu\varkappa_1\ldots\varkappa_{s_a}}\, w_\mu\, w_{\varkappa_1} \ldots . w_{\varkappa_{s_a}} = 0 \; ; \; a = 1, \ldots, p \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (9)$$

wo die $X_a^{\mu\varkappa_1\ldots\varkappa_{s_a}}$ symmetrisch sind, und schreibt man $X_{ab}^{\mu\varkappa_1\ldots\varkappa_{s_a+s_b}}$ für die Komitante von X_a und X_b, so beweist man leicht, dass

$$\left.\begin{array}{l} X_{ab}^{\mu\varkappa_1\ldots\varkappa_{s_a+s_b}}\, w_\mu\, w_{\varkappa_1} \ldots . w_{\varkappa_{s_a+s_b}} = \\ = 2\,(s_a+1)\,(s_b+1)\; X_a^{\lambda\varkappa_1\ldots\varkappa_{s_a}}\, X_b^{\mu\nu_1\ldots\nu_{s_b}}\, w_{\varkappa_1} \ldots . w_{\varkappa_{s_a}}\, w_{\nu_1} \ldots . w_{\nu_{s_b}}\, \partial_{[\mu}\, w_{\lambda]} \end{array}\right\} . \qquad (10)$$

ist, in welcher Gleichung man rechts wegen der Symmetrie der X statt über $\mu\lambda$ auch über $a b$ alternieren darf. Sind die Valenzen der X_a alle eins und ist gefordert dass $\partial_{[\mu}\, w_{\lambda]} = 0$ sei, also $w_\lambda = \partial_\lambda p$, so ist (9) ein System linearer partieller Differentialgleichungen erster Ordnung in p und man benutzt dann die Beziehung (10) bekanntlich dazu um das System (9) zu verlängern und zu einem vollständigen System zu gelangen. Ueber einen ähnlichen Verlängerungsprozess der Gleichungen (9) mittels (10) für allgemeine Werte der Valenzen, wenn allgemeinere Forderungen für $\partial_{[\mu}\, w_{\lambda]}$ aufgestellt werden, soll in einer folgenden Mitteilung berichtet werden.

Mathematics. — *Beiträge zur Theorie der Systeme* PFAFF*scher Gleichungen. III. Beweis des Hauptheorems für den Fall dass der Rang den höchsten Wert hat.* Von J. A. SCHOUTEN und W. VAN DER KULK.

(Communicated at the meeting of March 30, 1940.)

1. *Formulierung des Hauptheorems.*

a. Es sei

$$C_\lambda^x\, d x^\lambda = 0 \; ; \; x = p+1, \ldots, n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (1)$$

ein System von $q = n - p$ linear unabhängigen PFAFFschen Gleichungen in n Variabeln und

$$B_b^\varkappa\, \partial_\varkappa f = 0 \; ; \; b = 1, \ldots, p \; ; \; B_b^\mu\, C_\mu^x = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (2)$$

das adjungierte System von p linear unabhängigen partiellen Differentialgleichungen und es seien die C_λ^x und $B_b^\varkappa$ analytisch in der Umgebung des beliebig gewählten Punktes $x^\varkappa = \underset{0}{x}{}^\varkappa$.

Ferner sei

$$C_{[\dot a_1 \dot b_1}{}^{x_1} \ldots . C_{\dot a_\sigma \dot b_\sigma]}{}^{x_\sigma} \; \begin{cases} = 0 \text{ für } \sigma > \varrho \\ \neq 0 \text{ für } \sigma = \varrho \end{cases} ; \; C_{\dot a \dot b}{}^x = 2\, C_\lambda^x\, B_{[a}^\mu\, \partial_{|\mu|}\, B_{b]}^\lambda \, . \quad . \qquad (3)$$

d.h. es sei der Halbrang (nach ENGEL) von (1) gleich ϱ. $(2\varrho \leqq p)$. Sodann besitzt das System von $p - \varrho$ multilinearen Differentialgleichungen mit $\varrho + 1$ Unbekannten

$$\left\| \begin{array}{ccc} X_1 \overset{1}{p} & ; \ldots & X_1 \overset{\varrho+1}{p} \\ \vdots & & \vdots \\ X_p \overset{1}{p} & ; \ldots & X_p \overset{\varrho+1}{p} \end{array} \right\| = \text{Matrix vom Range } \varrho; \quad X_b = B_b^\mu\, \partial_\mu \quad . \qquad (4)$$

ein System von Lösungen $\overset{1}{p}, \ldots, \overset{\varrho+1}{p}$, das im Punkte $x^\varkappa = \underset{0}{x}{}^\varkappa$ der Gleichung

$$(\partial_{[\lambda_1} \overset{1}{p})\,(\partial_{\lambda_2} \overset{2}{p}) \ldots . (\partial_{\lambda_{\varrho+1}]} \overset{\varrho+1}{p}) = Q_{[\lambda_1}\, P_{\lambda_2 \ldots . \lambda_{\varrho+1}]} \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (5)$$

genügt. In dem Ausdrucke rechts ist Q_λ ein Vektor in $x^\varkappa = \underset{0}{x}{}^\varkappa$ der Teiler von $w_{\lambda_1 \ldots \lambda_q} = C_{[\lambda_1}^{p+1} \ldots C_{\lambda_q]}^{n}$ ist, d. h. die Gleichung

$$B_a^\lambda\, Q_\lambda = 0; \; a = 1, \ldots, p \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (6)$$

erfüllt und der ausserdem der algebraischen Bedingung

$$Q_{[a_1 b_1} \ldots Q_{a_\varrho b_\varrho]} \neq 0 \;;\; Q_{ba} = 2\, B^{\omega}_{[b} (\partial_{|\omega|} B^{\lambda}_{a]})\, Q_\lambda \quad \ldots \quad (7)$$

genügt, im übrigen aber beliebig wählbar ist, während $P_{\lambda_1 \ldots \lambda_\varrho}$ ein einfacher ϱ-Vektor in $x^\varkappa = \overset{}{\underset{0}{x^\varkappa}}$ ist, der keinen Teiler von $w_{\lambda_1 \ldots \lambda_q}$ als Teiler enthält, d. h. der Ungleichung

$$v^{\varkappa_1 \ldots \varkappa_p} P_{\varkappa_1 \ldots \varkappa_\varrho} \neq 0 \;;\; v^{\varkappa_1 \ldots \varkappa_p} = B_1^{[\varkappa_1} \ldots B_{\mathrm{p}}^{\varkappa_p]} \quad \ldots \quad (8)$$

genügt, und der ausserdem für $p > 2$ noch den algebraischen Bedingungen

$$(\partial_{\lambda_p} v^{\lambda_1 \ldots \lambda_p})\, Q_{\lambda_1} P_{\lambda_2 \ldots \lambda_{\varrho+1}} = 0. \quad \ldots \quad (9)$$

unterworfen ist, im übrigen aber ebenfalls beliebig wählbar ist.

b. Es gibt mindestens einen Teiler w_λ von $w_{\lambda_1 \ldots \lambda_q}$, dessen Klasse gleich $2\varrho + 1$ ist und der in $x^\varkappa = \underset{0}{x^\varkappa}$ mit Q_λ zusammenfällt.

c. Es gibt q linear unabhängige Teiler von $w_{\lambda_1 \ldots \lambda_q}$, deren Klassen höchstens gleich $2\varrho + 1$ sind, dagegen gibt es keine q linear unabhängigen Teiler, deren Klassen alle kleiner als $2\varrho + 1$ wären.

In dieser Mitteilung beweisen wir den Teil (*a*) des Haupttheorems für den Fall wo der Halbrang ϱ den grösst möglichen Wert $\varrho = u - 1 = \left[\frac{p}{2}\right]$ hat.

In der nächsten Mitteilung folgt dann der Beweis des Teiles (*a*) für den hier noch ausgeschlossenen Fall mit kleinerem ϱ und der Teile (*b*) und (*c*).

2. *Beweis von* (a) *für maximales* $\varrho = u - 1$ *und ungerades* p, $p = 2u - 1$.

Wir nehmen an, der Beweis sei schon geliefert für das vorhergehende gerade p, $p = 2u - 2$, $\varrho = u - 1$. Zunächst wählen wir die X_b so, dass

$$X_b = \partial_b + B_b^{p+1} \partial_{p+1} + \ldots + B_b^n \partial_n\ ^{1)}. \quad \ldots \quad (10)$$

ist. Infolge (7) lässt sich durch Vertauschung der Indizes 1,...,p immer erreichen dass

$$Q_{[23} \ldots Q_{2u-2\ 2u-1]} \neq 0 \;;\; Q_{ba} = 2\, B^{\omega}_{[b} (\partial_{|\omega|} B^{\lambda}_{a]})\, Q_\lambda \quad \ldots \quad (11)$$

ist. Ferner sind die Bedingungen (8) und (9) infolge (6) gleichbedeutend mit

$$P_{b_2 \ldots b_u} \neq 0 \;;\; P_{b_2 \ldots b_u} = B_{b_2}^{\lambda_2} \ldots B_{b_u}^{\lambda_u} P_{\lambda_2 \ldots \lambda_u} \;;\; b_2, \ldots, b_u = 1, \ldots, \mathrm{p}. \quad (12)$$

---

[1]) Wir vereinfachen also die Bezeichnungsweise, indem wir sofort das speziell gewählte System der X mit X_b bezeichnen und nicht mit $X_{\mathfrak{b}}$. Vergl. die beiden vorigen Mitteilungen dieser Serie, Proc. Kon. Ned. Akad. v. Wet. **43**, 18—31, 179—188, (1940), hier als I und II zitiert.

bzw.

$$Q_{[ab} P_{b_2 \ldots b_u]} = 0 \;;\; a, b, b_2, \ldots, b_u = 1, \ldots, \mathrm{p} \quad \ldots \quad (13)$$

Nehmen wir nun einmal an, dass alle Bestimmungszahlen von $P_{b_2 \ldots b_u}$, die keinen Index 1 enthalten, Null wären. Dann enthielte $P_{b_2 \ldots b_u}$ einen Faktor π_b, dessen Bestimmungszahlen $\pi_2, \ldots, \pi_{\mathrm{p}}$ alle Null wären.

(13) liesse sich also in der Form schreiben

$$Q_{[ab}\, \pi_{b_2}\, \pi_{b_3 \ldots b_u]} = 0 \;;\; a, b, b_2, b_3, \ldots, b_u = 1, \ldots, \mathrm{p} \quad \ldots \quad (14)$$

wo $\pi_{b_3 \ldots b_u}$ ein einfacher $(u-2)$-Vektor wäre. Aus (14) würde aber folgen

$$Q_{[ab}\, \pi_{b_3 \ldots b_u]} = 0 \;;\; a, b, b_3, \ldots, b_u = 2, \ldots, \mathrm{p} \text{ (also nicht } 1\,!) . \quad (15)$$

In der E_{2u-2} der Indizes 2,...,p ist nun aber Q_{ab} infolge (11) ein Bivektor vom höchsten Range $2u - 2$ und aus (15) folgt also dass $\pi_{b_3 \ldots b_u} = 0$; $b_3, \ldots, b_u = 2, \ldots, \mathrm{p}$; ist [1]). Es würde also $P_{b_2 \ldots b_u} = \pi_{[b_2}\, \pi_{b_3 \ldots b_u]}$; $b_2, \ldots, b_u = 1, \ldots \mathrm{p}$; verschwinden, was jedoch im Widerspruch wäre mit (12), und daraus geht hervor, dass $P_{b_2 \ldots b_u}$ mindestens eine nicht verschwindende Bestimmungszahl hat ohne Index 1. Durch Vertauschung der Indizes 2,...,p (welche Vertauschung keinen Einfluss auf (11) hat) kann man also stets erreichen dass

$$P_{2 \ldots \mathrm{u}} \neq 0 \quad \ldots \quad (16)$$

ist.

Im $(n-1)$-dimensionalen Raum $x^1 = \underset{0}{x^1}$ mit den Koordinaten x^α; $\alpha, \beta = 2, \ldots, n$; betrachten wir jetzt die Komponenten Q_β und $P_{\beta_2 \ldots \beta_u}$; $\beta, \beta_2, \ldots, \beta_u = 2, \ldots, n$; sowie

$$\overset{0}{B}{}^\alpha_b (x^2, \ldots, x^n) = B^\alpha_b (\underset{0}{x^1}, x^2, \ldots, x^n) \;;\; b = 2, \ldots, \mathrm{p} \quad \ldots \quad (17)$$

$$\overset{0}{C}{}^x_\beta (x^2, \ldots, x^n) = C^x_\beta (\underset{0}{x^1}, x^2, \ldots, x^n) \;;\; x = \mathrm{p} + 1, \ldots, \mathrm{n}. \quad . \quad (18)$$

$$\alpha, \beta = 2, \ldots, n$$

Da die Bestimmungszahlen B^1_b für $b \geqq 2$ infolge (10) verschwinden, ist

$$\overset{0}{C}{}^x_\beta\, \overset{0}{B}{}^\beta_b = 0 \;;\; x = \mathrm{p} + 1, \ldots, \mathrm{n} \;;\; b = 2, \ldots, \mathrm{p}\ \ \beta = 2, \ldots, n. \quad (19)$$

---

[1]) Wir verwenden hier den Hilfssatz: Ist $Q_{\mu\lambda}$ ein Bivektor vom höchsten Range in einer E_n mit geradem $n = 2\mathrm{m}$ und ist $t_{\lambda_1 \ldots \lambda_{m-1}}$ ein einfacher $(m-1)$-Vektor, so folgt aus $Q_{[\mu\lambda}\, t_{\lambda_1 \ldots \lambda_{m-1}]} = 0$ das verschwinden von $t_{\lambda_1 \ldots \lambda_{m-1}}$. Der Beweis ist sehr einfach und ergibt sich durch geschickte Wahl der Massvektoren.

Im Raume $x^1 = \underset{0}{x}^1$ sind also die q Gleichungen

$$\overset{0}{C}{}^{\varkappa}_{\beta}\, dx^{\beta} = 0 \;;\; \varkappa = \mathrm{p}+1, \ldots, \mathrm{n} \;;\; \beta = 2, \ldots, n \quad . \; . \; . \quad (20)$$

und die $p-1 = 2u-2$ Gleichungen

$$\overset{0}{B}{}^{\beta}_{b}\, \partial_{\beta} f = 0 \;;\; b = 2, \ldots, \mathrm{p} \;;\; \beta = 2, \ldots, n \quad . \; . \; . \; . \quad (21)$$

adjungierte Systeme.

Da für $x^{\alpha} = \underset{0}{x}^{\alpha}$ die Vektoren B_b und $\overset{0}{B}{}^{\alpha}_{b}$ für $b \geqq 2$, sowie $2 B^{\omega}_{[b}\, \partial_{|\omega|}\, B^{\alpha}_{a]}$ und $2 \overset{0}{B}{}^{\beta}_{[b}\, \partial_{|\beta|}\, \overset{0}{B}{}^{\alpha}_{a]}$; $b, a \geqq 2$; einander gleich sind, folgt aus (6)

$$\overset{0}{B}{}^{\beta}_{b}\, Q_{\beta} = 0 \;;\; b = 2, \ldots, \mathrm{p} \;;\; \beta = 2, \ldots, n \quad . \; . \; . \; . \quad (22)$$

im Punkte $x^{\alpha} = \underset{0}{x}^{\alpha}$; und aus (11), wegen des Verschwindens der ersten p Bestimmungszahlen aller $2 B^{\omega}_{[b}\, \partial_{|\omega|}\, B^{\varkappa}_{a]}$,

$$Q_{[23} \ldots Q_{2\mathrm{u}-2\, 2\mathrm{u}-1]} \neq 0 \;;\; Q_{ba} = 2 \overset{0}{B}{}^{\beta}_{[b}\, (\partial_{|\beta|}\, \overset{0}{B}{}^{\alpha}_{a]})\, Q_{\alpha} \quad . \; . \quad (23)$$

im selben Punkte. Aus (16) und (13) erhält man schliesslich

$$P_{2\ldots\mathrm{u}} \neq 0 \;;\; P_{b_2 \ldots b_u} = \overset{0}{B}{}^{\beta_2}_{b_2} \ldots \overset{0}{B}{}^{\beta_u}_{b_u}\, P_{\beta_2 \ldots \beta_u} \;;\; b_2, \ldots b_u = 2, \ldots, \mathrm{p} \quad . \quad (24)$$

und

$$Q_{[ab}\, P_{b_2 \ldots b_u]} = 0 \;;\; a, b, b_2, \ldots, b_u = 2, \ldots, \mathrm{p} \quad . \; . \; . \quad (25)$$

für $x^{\alpha} = \underset{0}{x}^{\alpha}$.

Die Grössen Q_{β} und $P_{\beta_2 \ldots \beta_u}$ genügen also, infolge (22), (23), (24) und (25), den Bedingungen (6), (7), (8) und (9) für das im Raume $x^1 = \underset{0}{x}^1$ liegende PFAFFsche System (20). Da nun aber angenommen war, dass Teil (*a*) des Haupttheorems schon für $p = 2u-2$ und $\varrho = u-1$ bewiesen ist, existieren somit u in der Umgebung des Punktes $x^{\alpha} = \underset{0}{x}^{\alpha}$ analytische Funktionen $\overset{1}{p}_0, \ldots, \overset{\mathrm{u}}{p}_0$ die den Gleichungen

$$\left\| \begin{matrix} \overset{0}{X}_2 \overset{1}{p}_0, & \ldots, & \overset{0}{X}_2 \overset{\mathrm{u}}{p}_0 \\ \vdots & & \vdots \\ \overset{0}{X}_{\mathrm{p}} \overset{1}{p}_0, & \ldots, & \overset{0}{X}_{\mathrm{p}} \overset{\mathrm{u}}{p}_0 \end{matrix} \right\| = \text{Matrix vom Range} < u \quad . \; . \; . \; . \quad (26)$$

$$\overset{0}{X}_b = \overset{0}{B}{}^{\beta}_{b}\, \partial_{\beta} \;;\; b = 2, \ldots, \mathrm{p} \qquad \beta = 2, \ldots, n$$

und in $x^{\alpha} = \underset{0}{x}^{\alpha}$ den Bedingungen

$$(\partial_{[\beta_1} \overset{1}{p}_0) \ldots (\partial_{\beta_u]} \overset{\mathrm{u}}{p}_0) = Q_{[\beta_1}\, P_{\beta_2 \ldots \beta_u]} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (27)$$

genügen.

Von diesen Funktionen beweisen wir nun, dass sie den Bedingungen (II 12), (II 13) und (II 14) [1]) genügen. Aus (27) folgt in $x^{\alpha} = \underset{0}{x}^{\alpha}$

$$\overset{0}{B}{}^{\beta_2}_{2} \ldots \overset{0}{B}{}^{\beta_u}_{\mathrm{u}}\, (\partial_{[\beta_1} \overset{1}{p}_0) \ldots (\partial_{\beta_u]} \overset{\mathrm{u}}{p}_0) = \frac{1}{u}\, Q_{\beta_1}\, P_{2 \ldots \mathrm{u}} \quad . \; . \; . \quad (28)$$

Da Q_{β} wegen (23) nicht Null sein kann und auch $P_{2\ldots\mathrm{u}}$ infolge (24) nicht verschwinden kann, ist die linke Seite von (28) nicht Null. Daraus geht hervor, dass (II 12) erfüllt ist. Ferner lassen sich die Determinanten der Matrix (26), die die ersten $u-1$ Reihen enthalten, schreiben

$$(\overset{0}{X}_{[k} \overset{1}{p}_0)(\overset{0}{X}_2 \overset{2}{p}_0) \ldots \overset{0}{X}_{\mathrm{u}]} \overset{\mathrm{u}}{p}_0) = (X_{[k} \overset{1}{p}_0)_0 (X_2 \overset{2}{p}_0)_0 \ldots (X_{\mathrm{u}]} \overset{\mathrm{u}}{p}_0)_0 \,;\, k = \mathrm{u}+1, \ldots, \mathrm{p} \quad (29)$$

und aus (26) folgt also dass auch (II 14) erfüllt ist. Aus der Definition (II 8*b*) von Ψ_{ik}, (22) und (27) folgt des weiteren

$$\left. \begin{aligned} \Psi_{ik} &= \frac{1}{u} \{ Q_{ik}\, P_{2\ldots\mathrm{u}} - Q_{i2}\, P_{k3\ldots\mathrm{u}} + \ldots + (-1)^u\, Q_{i\mathrm{u}}\, P_{k2\ldots\mathrm{u}-1} \} = \\ &= Q_{i[k}\, P_{2\ldots\mathrm{u}]} \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

in $x^{\varkappa} = \underset{0}{x}^{\varkappa}$, sodass (II 13) in $x^{\varkappa} = \underset{0}{x}^{\varkappa}$ geschrieben werden kann

$$\triangle = \begin{vmatrix} Q_{2[\mathrm{u}+1}\, P_{2\ldots\mathrm{u}]} & \ldots & Q_{\mathrm{u}[\mathrm{u}+1}\, P_{2\ldots\mathrm{u}]} \\ \vdots & & \vdots \\ Q_{2[\mathrm{p}}\, P_{2\ldots\mathrm{u}]} & \ldots & Q_{\mathrm{u}[\mathrm{p}}\, P_{2\ldots\mathrm{u}]} \end{vmatrix} \neq 0 \quad . \; . \; . \quad (31)$$

Nun können wir aber für $\triangle^2$ schreiben

$$\triangle^2 = u^{2-2u} \begin{vmatrix} Q_{22}\, P_{2\ldots\mathrm{u}} & \ldots Q_{\mathrm{u}2}\, P_{2\ldots\mathrm{u}} & -u\, Q_{2[\mathrm{u}+1}\, P_{2\ldots\mathrm{u}]} & \ldots & -u\, Q_{2[\mathrm{p}}\, P_{2\ldots\mathrm{u}]} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ Q_{2\mathrm{u}}\, P_{2\ldots\mathrm{u}} & \ldots Q_{\mathrm{uu}}\, P_{2\ldots\mathrm{u}} & -u\, Q_{\mathrm{u}[\mathrm{u}+1}\, P_{2\ldots\mathrm{u}]} & \ldots & -u\, Q_{\mathrm{u}[\mathrm{p}}\, P_{2\ldots\mathrm{u}]} \\ u\, Q_{2[\mathrm{u}+1}\, P_{2\ldots\mathrm{u}]} & \ldots u\, Q_{\mathrm{u}[\mathrm{u}+1}\, P_{2\ldots\mathrm{u}]} & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ u\, Q_{2[\mathrm{p}}\, P_{2\ldots\mathrm{u}]} & \ldots u\, Q_{\mathrm{u}[\mathrm{p}}\, P_{2\ldots\mathrm{u}]} & 0 & \ldots & 0 \end{vmatrix} \quad (32)$$

[1]) Beiträge zur Theorie der Systeme PFAFFscher Gleichungen, II, Proc. Kon. Ned. Akad. v. Wet. **43**, 179—188, (1940).

und durch Umrechnung dieser Determinante ergibt sich

$$\triangle^2 = u^{2-2u}\,(P_{2\ldots\mathrm{u}})^{2u-2} \begin{vmatrix} Q_{22} & \ldots & Q_{\mathrm{p}2} \\ \vdots & & \\ Q_{2\mathrm{p}} & \ldots & Q_{\mathrm{pp}} \end{vmatrix} \quad \ldots\ldots \quad (33)$$

oder

$$\triangle^2 = u^{2-2u} \left(\frac{(2u-2)!}{(u-1)!}\right)^2 (P_{2\ldots\mathrm{u}})^{2u-2}\,(Q_{[23}\ldots\ldots Q_{\mathrm{p}-1\,\mathrm{p}]})^2 \,.\;. \quad (34)$$

Infolge (11) und (16) ist also $\triangle \neq 0$ in $x^\varkappa = \underset{0}{x}{}^\varkappa$, also auch in einer Umgebung von diesem Punkt und es ist also auch die Bedingung (II 13) erfüllt. In (II) wurde aber bewiesen, dass es dann auch Funktionen $\overset{1}{p},\ldots,\overset{\mathrm{u}}{p}$ von $x^1,\ldots,x^n$ gibt, die den Gleichungen

$$\left\| \begin{matrix} X_1 \overset{1}{p} & \ldots & X_1 \overset{\mathrm{u}}{p} \\ \vdots & & \vdots \\ X_{\mathrm{p}} \overset{1}{p} & \ldots & X_{\mathrm{p}} \overset{\mathrm{u}}{p} \end{matrix} \right\| = \text{Matrix vom Range} < u \quad \ldots \quad (35)$$

genügen und für $x^l = \underset{0}{x}{}^l$ übergehen in $\overset{1}{p}_0,\ldots,\overset{\mathrm{u}}{p}_0$. Es ist also nur noch zu beweisen, dass diese Funktionen in $x^\varkappa = \underset{0}{x}{}^\varkappa$ auch den Gleichungen

$$\partial_{[\lambda_1} \overset{1}{p} \ldots\ldots \partial_{\lambda_u]} \overset{\mathrm{u}}{p} = Q_{[\lambda_1} P_{\lambda_2\ldots\lambda_u]} \;;\; \lambda_1,\ldots,\lambda_u = 1,\ldots,n \quad .\;. \quad (36)$$

genügen. Jedenfalls folgt schon aus (27), dass in $x^\varkappa = \underset{0}{x}{}^\varkappa$

$$(\partial_{[\beta_1} \overset{1}{p}) \ldots\ldots (\partial_{\beta_u]} \overset{\mathrm{u}}{p}) = Q_{[\beta_1} P_{\beta_2\ldots\beta_u]} \;;\; \beta_1,\ldots,\beta_u = 2,\ldots,n \quad . \quad (37)$$

ist. Da $Q_{[\lambda_1} P_{\lambda_2\ldots\lambda_u]}$ einfach ist, kann man schreiben

$$Q_{[\lambda_1} P_{\lambda_2\ldots\lambda_u]} = \overset{1}{P}_{[\lambda_1} \ldots\ldots \overset{\mathrm{u}}{P}_{\lambda_u]} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (38)$$

und infolge (37) lassen sich die Faktoren so wählen, dass in $x^\varkappa = \underset{0}{x}{}^\varkappa$

$$\partial_\beta \overset{1}{p} = \overset{1}{P}_\beta \,;\ldots;\, \partial_\beta \overset{\mathrm{u}}{p} = \overset{\mathrm{u}}{P}_\beta \;;\; \beta = 2,\ldots,n \quad \ldots\ldots \quad (39)$$

ist. Nun lassen sich $\partial_1 \overset{1}{p},\ldots,\partial_1 \overset{\mathrm{u}}{p}$ bestimmen mittels (II, 10), in welchen Gleichungen für $\overset{2}{\sigma},\ldots,\overset{\mathrm{u}}{\sigma}$ die Werte eingesetzt werden müssen, die man erhält indem man ζ_k (II 8*a*) gleich Null setzt. Diese Lösungen existieren,

da jetzt tatsächlich (II 9) erfüllt ist. Wir schreiben jetzt (II 10) (identisch mit (II 6*a*)) in der Form

$$\left.\begin{matrix} \overset{1}{p}_1 = \overset{2}{\sigma}\overset{1}{p}_2 + \ldots + \overset{\mathrm{u}}{\sigma}\overset{1}{p}_{\mathrm{u}} \\ \vdots \\ \overset{\mathrm{u}}{p}_1 = \overset{2}{\sigma}\overset{\mathrm{u}}{p}_2 + \ldots + \overset{\mathrm{u}}{\sigma}\overset{\mathrm{u}}{p}_{\mathrm{u}} \end{matrix}\right\} p_i = B_i^\mu\,\partial_\mu p \;;\; i = 1,\ldots,\mathrm{u} \quad .\;. \quad (40)$$

und bemerken, dass die Gleichungen zur Bestimmung von $\overset{2}{\sigma},\ldots,\overset{\mathrm{u}}{\sigma}$ für $x^\varkappa = \underset{0}{x}{}^\varkappa$ wegen (30) übergehen in

$$\zeta_k = Q_{1[k} P_{2\ldots\mathrm{u}]} - \overset{2}{\sigma} Q_{2[k} P_{2\ldots\mathrm{u}]} - \ldots - \overset{\mathrm{u}}{\sigma} Q_{\mathrm{u}[k} P_{2\ldots\mathrm{u}]} = 0 \;;\; k = \mathrm{u}+1,\ldots,\mathrm{p} \quad (41)$$

Anderseits ist, wegen des Verschwindens von $B_b^\mu Q_\mu$ und (38)

$$\overset{1}{P}_{[1} \ldots\ldots \overset{\mathrm{u}}{P}_{\mathrm{u}]} = 0 \;;\; P_i = B_i^\mu\, P_\mu \;;\; i = 1,\ldots,\mathrm{u} \quad \ldots \quad (42)$$

und es müssen also zwischen den P_i Gleichungen bestehen von der Form

$$\left.\begin{matrix} \overset{1}{P}_1 = \overset{2}{\tau}\overset{1}{P}_2 + \ldots + \overset{\mathrm{u}}{\tau}\overset{1}{P}_{\mathrm{u}} \\ \vdots \\ \overset{\mathrm{u}}{P}_1 = \overset{2}{\tau}\overset{\mathrm{u}}{P}_2 + \ldots + \overset{\mathrm{u}}{\tau}\overset{\mathrm{u}}{P}_{\mathrm{u}} \end{matrix}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (43)$$

Es ist also nur noch zu beweisen, dass die τ in (43) mit den σ in (40) identisch sind. (Aus (39) geht hervor, dass $\overset{i}{P}_k = \overset{i}{p}_k$ ist für $i = 1,\ldots,\mathrm{u}$; $k = 2,\ldots,\mathrm{u}$).

Dazu gehen wir aus von (13) und folgern daraus

$$Q_{[kb} P_{2\ldots\mathrm{u}]} = 0 \;;\; k = \mathrm{u}+1,\ldots,\mathrm{p} \;;\; b = 1,\ldots,p \quad .\;.\;. \quad (44)$$

welche Gleichung sich folgendermassen ausschreiben lässt

$$2\,Q_{b[k} P_{2\ldots\mathrm{u}]} + (-1)^u (u-1)\, Q_{[k2} P_{3\ldots\mathrm{u}]b} = 0 \quad \ldots \quad (45)$$

Infolge (38) und (6) ist diese Gleichung aber gleichwertig mit

$$\left.\begin{aligned} Q_{b[k} P_{2\ldots\mathrm{u}]} &= (-1)^{u-1}(u-1)(B^\omega_{[k}\,\partial_{|\omega|} B_2^{\lambda_2}) B_3^{\lambda_3} \ldots B_{\mathrm{u}]}^{\lambda_u} B_b^\lambda\, Q_{\lambda_2} P_{\lambda_3\ldots\lambda_u\lambda} = \\ &= (-1)^{u-1}(u-1)\,u!\,(B^\omega_{[k}\,\partial_{|\omega|} B_2^{\lambda_2}) B_3^{\lambda_3} \ldots B_{\mathrm{u}]}^{\lambda_u} B_b^\lambda\, \overset{[1}{P}_{\lambda_2} \ldots \overset{\mathrm{u}-1}{P}_{\lambda_u} \overset{\mathrm{u}]}{P}_\lambda = \\ &= (-1)^{u-1}(u-1)\,u!\,(B^\omega_{[k}\,\partial_{|\omega|} B_2^\lambda)\, \overset{[1}{P}_{|\lambda|} \overset{2}{P}_3 \ldots \overset{\mathrm{u}-1}{P}_{\mathrm{u}]} \overset{\mathrm{u}]}{P}_b \end{aligned}\right\} . \quad (46)$$

woraus hervorgeht, dass

$$\left.\begin{aligned} & Q_{1[k} P_{2\ldots\mathrm{u}]} - \overset{2}{\tau} Q_{2[k} P_{2\ldots\mathrm{u}]} - \ldots - \overset{\mathrm{u}}{\tau} Q_{\mathrm{u}[k} P_{2\ldots\mathrm{u}]} = \\ & = (-1)^{u-1}(u-1)\,u!\,(B^\omega_{[k}\,\partial_{|\omega|} B_2^\lambda)\, \overset{[1}{P}_{|\lambda|} \overset{2}{P}_3 \ldots \overset{\mathrm{u}-1}{P}_{\mathrm{u}]} (\overset{\mathrm{u}]}{P}_1 - \overset{|2|}{\tau} \overset{\mathrm{u}]}{P}_2 - \ldots - \overset{|\mathrm{u}|}{\tau} \overset{\mathrm{u}]}{P}_{\mathrm{u}}) = 0 \end{aligned}\right\} \quad (47)$$

ist, womit dargetan ist, dass $\overset{2}{\tau},\dots,\overset{u}{\tau}$ ebenfalls Lösungen sind der Gleichungen (41), deren Determinante $\triangle$ infolge (34) nicht verschwindet, sodass die τ mit den σ zusammenfallen:

$$\overset{1}{p}_1 = \overset{1}{P}_1\,;\dots;\,\overset{u}{p}_1 = \overset{u}{P}_1 \quad \dots\dots\dots \quad (48)$$

Ausgeschrieben lauten diese Gleichungen

$$(\partial_1 \overset{i}{p} - \overset{i}{P}_1) + B_1^{p+1}(\partial_{p+1}\overset{i}{p} - \overset{i}{P}_{p+1}) + \dots + B_1^n(\partial_n \overset{i}{p} - \overset{i}{P}_n) = 0;\ i=1,\dots,u\,. \quad (49)$$

und aus (39) folgt also in $x^\varkappa = \underset{0}{x}^\varkappa$

$$\partial_1 \overset{1}{p} = \overset{1}{P}_1;\dots;\partial_1\overset{u}{p} = \overset{u}{P}_1 \quad \dots\dots\dots \quad (50)$$

also, kombiniert mit (39)

$$\partial_\lambda \overset{1}{p} = \overset{1}{P}_\lambda;\dots;\partial_\lambda \overset{u}{p} = \overset{u}{P}_\lambda;\ \lambda = 1,\dots,n \quad \dots\dots \quad (51)$$

woraus, unter Berücksichtigung von (38) die zu beweisende Gleichung (36) folgt. Die Existenz der Lösungen $\overset{1}{p},\dots,\overset{u}{p}$ von (4), die in $x^\varkappa = \underset{0}{x}^\varkappa$ der Bedingung (5) genügen, ist damit für ungerades p und $\varrho = \frac{1}{2}(p-1)$ bewiesen. Da ausserdem die linke Seite von (28), wie bemerkt, nicht verschwinden kann, ist

$$(X_2 \overset{[i_2}{p}) \dots (X_u \overset{i_u]}{p}) \neq 0\,;\ i_2,\dots,i_u = 1,\dots,u \quad \dots\dots \quad (52)$$

und hat (35) demnach genau den Rang $u-1$. Der Beweis ist damit für diesen Fall vollständig erledigt.

3. *Beweis von* (a) *für maximales* $\varrho = u-1$ *und gerades* $p,\, p=2u-2$.
Wir nehmen an, der Beweis sei schon geliefert für das vorhergehende ungerade $p,\, p=2u-3$ und maximales $\varrho=u-2$. Infolge (8) besitzt $P_{\lambda_2\dots\lambda_u}$ einen Teiler P_λ, für welchen in $x^\varkappa = \underset{0}{x}^\varkappa$ gilt

$$B_b^\lambda P_\lambda \neq 0\,;\ b=1,\dots,p \quad \dots\dots\dots \quad (53)$$

Es gibt also wenigstens einen Vektor, z.B. $B_1^\varkappa$, so dass in $x^\varkappa = \underset{0}{x}^\varkappa$

$$B_1^\lambda P_\lambda \neq 0 \quad \dots\dots\dots\dots \quad (54)$$

ist. Wir transformieren jetzt das Koordinatensystem, so dass für das neue System (das wir aber einfachheitshalber wieder mit $x^\varkappa$ bezeichnen) überall

$$B_1^\varkappa = \underset{1}{e}^\varkappa \quad \dots\dots\dots\dots \quad (55)$$

ist und in $x^\varkappa = \underset{0}{x}^\varkappa$

$$P_\lambda = \overset{1}{e}_\lambda \quad \dots\dots\dots\dots \quad (56)$$

Durch lineare Transformationen der $B_b^\varkappa$ bilden wir ferner die $B_b^\varkappa$ in solcher Weise, dass

$$B_b^1 = 0\,;\ b=2,\dots,p \text{ (also nicht } 1!) \quad \dots\dots \quad (57)$$

ist. Infolge (56) lässt sich dann $P_{\lambda_2\dots\lambda_u}$ schreiben

$$P_{\lambda_2\dots\lambda_u} = \overset{1}{e}_{[\lambda_2} P'_{\lambda_3\dots\lambda_u]}\,, \quad \dots\dots\dots \quad (58)$$

wo $P'_{\lambda_3\dots\lambda_u}$ ein einfacher $(u-2)$-Vektor ist. Da aber $P_{b_2\dots b_u} = B_{b_2}^{\lambda_2}\dots B_{b_u}^{\lambda_u} P_{\lambda_2\dots\lambda_u};\ b_2,\dots,b_u = 1,\dots p$ infolge (8) nicht verschwindet, folgt aus (55), (57) und (58)

$$P'_{b_3\dots b_u} \neq 0\,;\ b_3,\dots,b_u = 2,\dots,p \quad \dots\dots \quad (59)$$

Nun ist (9) gleichwertig mit

$$Q_{[ab} P_{b_2\dots b_u]} = 0\,;\ a,b,b_2,\dots,b_u = 1,\dots,p \quad \dots \quad (60)$$

und unter Berücksichtigung von (55), (57) und (58) folgt daraus

$$Q_{[ab}P'_{b_3\dots b_u]} = 0\,;\ a,b,b_3,\dots,b_u=2,\dots,p \quad \dots \quad (61)$$

Infolge (7) ist ferner

$$Q_{[12}\dots Q_{2u-3\;2u-2]} \neq 0\,. \quad \dots\dots\dots \quad (62)$$

und daraus folgt, dass nicht *alle* Alternationen über $2u-4$ der Indizes von $2,\dots,p$ von $u-2$ Faktoren Q_{ab} verschwinden können. D.h. es ist

$$Q_{[a_3b_3}\dots Q_{a_ub_u]} \neq 0\,;\ a_3,\dots,a_u,b_3,\dots,b_u = 2,\dots,p \quad \dots \quad (63)$$

Wir betrachten jetzt den einfachen $(p-1)$-Vektor $B_2^{[\varkappa_2}\dots B_p^{\varkappa_p]}$ und den zugehörigen einfachen $(q+1)$-Vektor. In bezug auf das zu diesem $(q+1)$-Vektor gehörige System von $q+1$ PFAFFschen Gleichungen genügen Q_λ und $P'_{\lambda_3\dots\lambda_u}$ den Bedingungen (6), (7) (wegen (63)), (8) (wegen (59)) und (9) (wegen 61)). Da wir bei diesem System gerade den Fall vor uns haben mit dem vorhergehenden ungeraden p-Wert ($p-1=2u-3$ und $\varrho=u-2$) existiert ein System von $u-1$ Funktionen $\overset{2}{p},\dots,\overset{u}{p}$ von $x^1,\dots,x^n$, die den Gleichungen

$$\left\| \begin{matrix} X_2\overset{2}{p} & \dots & X_2\overset{u}{p} \\ \vdots & & \vdots \\ X_p\overset{2}{p} & \dots & X_p\overset{u}{p} \end{matrix} \right\| = \text{Matrix vom Range } u-2\,. \quad \dots \quad (64)$$

und ausserdem in $x^\varkappa = \underset{0}{x}{}^\varkappa$ den Bedingungen

$$(\partial_{[\lambda_2} \overset{2}{p}) \dots (\partial_{\lambda_u]} \overset{u}{p}) = Q_{[\lambda_2} P'_{\lambda_3 \dots \lambda_u]} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (65)$$

genügen. Wählt man nun $\overset{1}{p} = -x^1$, so ist

$$\left\| \begin{matrix} X_1 \overset{1}{p} & \dots & X_1 \overset{u}{p} \\ \vdots & & \vdots \\ X_p \overset{1}{p} & \dots & X_p \overset{u}{p} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & X_2 \overset{2}{p} & \dots & X_2 \overset{u}{p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & X_p \overset{2}{p} & \dots & X_p \overset{u}{p} \end{matrix} \right\| = \text{Matrix vom Range } u-1 \qquad (66)$$

und ausserdem ist in $x^\varkappa = \underset{0}{x}{}^\varkappa$ infolge (65)

$$(\partial_{[\lambda_1} \overset{1}{p}) \dots (\partial_{\lambda_u]} \overset{u}{p}) = -\overset{1}{e}_{[\lambda_1} Q_{\lambda_2} P'_{\lambda_3 \dots \lambda_u]} = Q_{[\lambda_1} P_{\lambda_2 \dots \lambda_u]} \quad . \quad . \quad . \qquad (67)$$

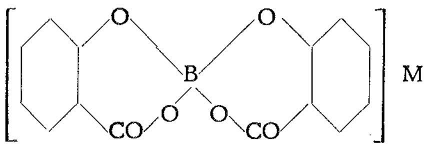
sodass der Beweis jetzt auch für gerades p und $\varrho = {}^1/_2\, p$ erledigt ist.

Chemistry. — *The behaviour of the ortho-hydroxy-naphtoic acids 2.3, 2.1 and 1.2 in respect to a 0.5 molar aqueous boracic acid solution.* By J. BÖESEKEN and A. NIKS.

(Communicated at the meeting of March 30, 1940.)

§ 1. It was previously demonstrated that there are a number of ortho-hydroxy benzene carbonic acids which by boracic acid in an aqueous solution, exhibit a very considerable increase in conductivity [1]).

Also salts of the type

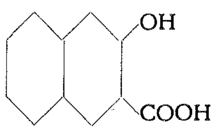


and similar ones of bi-valent kations were readily obtained. MEULENHOFF, by splitting the *strychnine salt* into optic antipodes, succeeded in demonstrating that the borium atom stands in the centre of a tetraeder [2]).

Such an extraordinary increase in the conductivity, even with moderately concentrated solutions, indicated a stand of the hydroxyl groups highly favourable to the formation of a six-atomic ring, which may be taken as a proof of the theory that the OH and COOH groups are held at these favourable places in the plane of the rigid benzene ring.

As the naphtalene ring corresponds concerning its sterical conditions completely to the benzene ring, we expected analogous phenomena with the hydroxy naphtoic acids, with merely slight differences between the three isomers.

In the initial experiments with the 2.3 acid no increase of the conductivity was observed.



It further appeared, however, that the solubility was very poor.

Owing to this property, the solubility could not be accurately enough measured in the usual way, e.g. by weighing and titration.

We, therefore, applied the method of determining the conductivity. Very weak solutions were prepared by weighing the acids upon the micro-

---

[1]) Rec. trav. Chim. **40**, 574 (1920).

[2]) Proc. Kon. Akad. v. Wetensch., Amsterdam, **26**, 32 and 97 (1923); J. MEULENHOFF, Dissertation, Delft 1924.