11. As for the self-projective throws in S_n for general value of n, each case must be considered for it self. Indeed the solution depends on the arithmetic properties of the number n. Meanwhile some general remarks can be made. In S_n a throw consists of $n+3$ points. If r_1 is a factor of $n+2$ (which may be the number $n+2$ itself) there clearly always exists a throw, which is invariant for a cyclic group of order r_1. If r_2 is a factor of $n+3$ or of $n+1$, there always exists a throw, invariant for a dihedron group of order $2r_2$. In S_5 (more generally: for $n = 1, 5, 7, 9, 11$ (mod. 12)) we have throws which are invariant for a tetrahedron group. In S_5 (more generally: for $n = 3$, 5, 9, 11, 15, 17, 21, 23 (mod. 24)), we have throws with the symmetry of the octahedron group. The case of a throw, which is invariant for the icosahedron group first occurs in S_9 (and generally for $n = 9$, 17, 27, 29, 39, 47, 57, 59 (mod. 60)).

Mathematics. — *Ueber eine Erweiterung der* LAPLACE-*Transformation.* (Erste Mitteilung). Von C. S. MEIJER. (Communicated by Prof. J. G. VAN DER CORPUT).

(Communicated at the meeting of April 27, 1940.)

LITERATURVERZEICHNIS.

S. BOCHNER.
1. Vorlesungen über FOURIERsche Integrale (1932).

F. W. BRADLEY.
2. An extension of the FOURIER–BESSEL integral. Proc. London Math. Soc., (2) **41**, 209—214 (1936).

R. V. CHURCHILL.
3. The inversion of the LAPLACE Transformation by a direct expansion in series and its application to boundary-value problems. Math. Zeitschrift, **42**, 567—579 (1937).

G. DOETSCH.
4. Theorie und Anwendung der LAPLACE-Transformation (1937).

C. FOX.
5. A note on HANKEL's theorem. Proc. London Math. Soc., (2) **30**, 18—22 (1930).

S. GOLDSTEIN.
6. Operational representations of WHITTAKER's confluent hypergeometric function and WEBER's parabolic cylinder function. Proc. London Math. Soc., (2) **34**, 103—125 (1932).

G. H. HARDY.
7. Some further applications of MELLIN's inversion formula. Messenger of Math., **56**, 186—192 (1927).

C. S. MEIJER.
8. Asymptotische Entwicklungen von BESSELschen, HANKELschen und verwandten Funktionen. Proc. Kon. Akad. v. Wetensch., Amsterdam, **35**, 656—667, 852—866, 948—958 und 1079—1090 (1932).
9. Noch einige Integraldarstellungen für Produkte von WHITTAKERschen Funktionen. Ibidem, **40**, 871—879 (1937).
10. Ueber BESSELsche, LOMMELsche und WHITTAKERsche Funktionen. Ibidem, **42**, 872—879 und 938—947 (1939).
11. Ueber Produkte von LEGENDREschen Funktionen. Ibidem, **42**, 930—937 (1939).
12. Ueber WHITTAKERsche bezw. BESSELsche Funktionen und deren Produkte. Nieuw Archief voor Wiskunde, (2) **18**, (4tes Heft), 10—39 (1936).
13. Integraldarstellungen für Produkte von LEGENDREschen Funktionen. Ibidem, (2) **19**, 207—234 (1938).
14. Neue Integraldarstellungen aus der Theorie der WHITTAKERschen und HANKELschen Funktionen. Math. Annalen, **112**, 469—489 (1936).
15. Neue Integraldarstellungen für BESSELsche Funktionen. Compositio Mathematica (Diese Arbeit wird demnächst erscheinen).

A. C. OFFORD.
16. On HANKEL transforms. Proc. London Math. Soc., (2) **39**, 49—67 (1935).

P. M. OWEN.
17. The RIEMANNian theory of HANKEL transforms. Proc. London Math. Soc., (2) **39**, 295—320 (1935).

M. PLANCHEREL.
18. Sur les formules d'inversion de FOURIER et de HANKEL. Proc. London Math. Soc., (2) **24**, 62—70 (1926).
J. D. TAMARKIN.
19. On LAPLACE's integral equations. Trans. American Math. Soc., **28**, 417—425 (1926).
E. C. TITCHMARSH.
20. HANKEL transforms. Proc. Cambridge Phil. Soc., **21**, 463—473 (1923).
21. Introduction to the theory of FOURIER integrals (1937).
G. N. WATSON.
22. A treatise on the theory of BESSEL functions (1922).
E. T. WHITTAKER and G. N. WATSON.
23. A course of modern analysis (fourth edition, 1927).

§ 1. Einleitung.

Genügt $\varphi(x)$ gewissen Voraussetzungen, so gilt bekanntlich nach den FOURIERschen cos- und sin-Formeln

$$\varphi(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos xy\, dy \int_0^\infty \varphi(t) \cos yt\, dt \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

und

$$\varphi(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \sin xy\, dy \int_0^\infty \varphi(t) \sin yt\, dt \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Die FOURIERschen Relationen sind sehr nahe verwandt [1]) mit der häufig betrachteten Umkehrformel der LAPLACE-Transformation, d.h. also mit der Formel

$$F(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\beta-\infty i}^{\beta+\infty i} e^{xs}\, ds \int_0^\infty e^{-st} F(t)\, dt. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Die Beziehungen (1) und (2) sind Spezialfälle der HANKELschen Formel [2])

$$\varphi(x) = \int_0^\infty J_\nu(xy)(xy)^{\frac{1}{2}}\, dy \int_0^\infty J_\nu(yt)(yt)^{\frac{1}{2}} \varphi(t)\, dt; \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

[1]) Für den Zusammenhang zwischen (1) und (2) einerseits und (3) anderseits vergl. man DOETSCH, [4], 89, 94 und 104—105; ferner TITCHMARSH, [21], 1—6.

[2]) WATSON, [22], 456; BOCHNER, [1], 180; TITCHMARSH, [21], 240. Viele Arbeiten sind dem Studium der HANKELschen Formel gewidmet worden; ich erwähne hier nur: TITCHMARSH, [20]; PLANCHEREL, [18]; FOX, [5]; OFFORD, [16]; OWEN, [17]; BRADLEY, [2].

denn diese Formel geht wegen

$$J_{-\frac{1}{2}}(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}} \cos z, \qquad J_{\frac{1}{2}}(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}} \sin z$$

für $\nu = -\frac{1}{2}$ in (1) und für $\nu = \frac{1}{2}$ in (2) über.

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist eine mit (4) verwandte Erweiterung von (3) abzuleiten. Mein Hauptresultat lautet wie folgt:

Satz 1. Voraussetzungen: 1. *Die Funktion $F(t)$ sei definiert für $t > 0$ und in jedem endlichen Intervall $0 < T_1 \leqq t \leqq T_2$ im* RIEMANN*schen Sinn eigentlich integrierbar.*

2. *Das Integral*

$$\int_0^\infty e^{-\beta t} |F(t)|\, dt$$

sei konvergent für $\beta > a \geqq 0$.

3. *Es sei $x > 0$ und $F(t)$ von beschränkter Variation in der Umgebung des Punktes $t = x$.*

Behauptung [3]): *Ist $-\frac{1}{2} \leqq \nu \leqq \frac{1}{2}$ und $\beta > a$, so gilt für den in Voraussetzung 3 genannten Punkt x*

$$\frac{F(x+0)+F(x-0)}{2} = \frac{1}{\pi i}\lim_{\lambda\to\infty}\int_{\beta-\lambda i}^{\beta+\lambda i} I_\nu(xs)(xs)^{\frac{1}{2}}\, ds \int_0^\infty K_\nu(st)(st)^{\frac{1}{2}} F(t)\, dt. \quad (5)$$

[3]) Ist $\Re(z) > 0$ und $-\frac{1}{2} \leqq \nu \leqq \frac{1}{2}$, so ist $|K_\nu(z)\, z^{\frac{1}{2}}| \leqq \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{-\Re(z)}$ (man vergl. WATSON, [22], 219; MEIJER, [8], 658, Satz 1). Aus der zweiten Voraussetzung folgt also, dass das in (5) vorkommende Integral

$$\int_0^\infty K_\nu(st)(st)^{\frac{1}{2}} F(t)\, dt$$

absolut konvergiert.

In vielen Fällen ist

$$\int_{\beta-\infty i}^{\beta+\infty i} I_\nu(xs)(xs)^{\frac{1}{2}}\, ds \int_0^\infty K_\nu(st)(st)^{\frac{1}{2}} F(t)\, dt$$

konvergent; man darf dann bei der Integration nach s den CAUCHYschen Hauptwert

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_{\beta-\lambda i}^{\beta+\lambda i} \quad \text{durch} \quad \int_{\beta-\infty i}^{\beta+\infty i}$$

ersetzen.

Die Funktion $K_\nu(z)$ ist bekanntlich eine gerade Funktion von ν. Aus (5) folgt daher

$$\frac{F(x+0)+F(x-0)}{2}=\frac{1}{2\pi i}\lim_{\lambda\to\infty}\int_{\beta-\lambda i}^{\beta+\lambda i}\{I_\nu(xs)+I_{-\nu}(xs)\}(xs)^{\frac{1}{2}}\,ds\int_0^\infty K_\nu(st)(st)^{\frac{1}{2}}F(t)\,dt. \quad (6)$$

Nun ist

$$I_{\frac{1}{2}}(z)=\left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}}\sinh z,\ I_{-\frac{1}{2}}(z)=\left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}}\cosh z,\ K_{\pm\frac{1}{2}}(z)=\left(\frac{\pi}{2z}\right)^{\frac{1}{2}}e^{-z};$$

für $\nu=\pm\frac{1}{2}$ geht (6) also in

$$\frac{F(x+0)+F(x-0)}{2}=\frac{1}{2\pi i}\lim_{\lambda\to\infty}\int_{\beta-\lambda i}^{\beta+\lambda i}e^{xs}\,ds\int_0^\infty e^{-st}F(t)\,dt \quad (7)$$

über. Die Beziehungen (5) und (6) sind daher Erweiterungen von (3). Satz 1 ist eine Verallgemeinerung eines DOETSCHschen Satzes [4]).

Falls $F(t)$ stetig ist, lässt Formel (5) sich folgenderweise auseinandernehmen:

$$f(s)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty K_\nu(st)(st)^{\frac{1}{2}}F(t)\,dt, \quad (8)$$

$$F(t)=\frac{1}{i\sqrt{2\pi}}\lim_{\lambda\to\infty}\int_{\beta-\lambda i}^{\beta+\lambda i}I_\nu(ts)(ts)^{\frac{1}{2}}f(s)\,ds. \quad (9)$$

Mit dieser Bezeichnung besagt Satz 1: Genügt $F(t)$ gewissen Voraussetzungen und wird $f(s)$ durch (8) erklärt, so kann man $F(t)$ mit Hilfe von (9) aus $f(s)$ zurückbekommen.

In den Sätzen 2, 3, und 4 werde ich beweisen: Genügt $f(s)$ gewissen Bedingungen und wird $F(t)$ durch (9) definiert, so gilt (8). Satz 2 ist eine Erweiterung eines Satzes von DOETSCH und CHURCHILL [5]). Ein Spezialfall von Satz 3 kommt bei CHURCHILL vor [6]).

Satz 2. Voraussetzungen: 1. *Die Funktion $f(s)$ sei analytisch in der Halbebene $\Re(s)>a\geqq 0$.*

[4]) DOETSCH, [4], 105, Satz 2. Der DOETSCHsche Satz bezieht sich auf Formel (7).
[5]) DOETSCH, [4], 126, Satz 2; CHURCHILL, [3], 569, Satz 1.
[6]) CHURCHILL, [3], 571, Satz 2. Die Sätze von DOETSCH und CHURCHILL beziehen sich auf den LAPLACEschen Fall.

2. *Es sei $-\frac{1}{2}\leqq\Re(\nu)\leqq\frac{1}{2}$; für ein festes $\beta>a$ und jedes $t\geqq 0$ existiere der Grenzwert*

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_{\beta-\lambda i}^{\beta+\lambda i}I_\nu(tz)(tz)^{\frac{1}{2}}f(z)\,dz, \quad (10)$$

und zwar gleichmässig in jedem endlichen Intervall $0\leqq t\leqq b$.

3. *Das Integral*

$$\int_{\beta-\infty i}^{\beta+\infty i}\frac{|f(z)|}{|z|}\,|dz|$$

sei konvergent.

4. *Es sei $|f(s)|<A$ für $\Re(s)\geqq\beta$, wo A eine nicht von s abhängige Zahl bedeutet.*

5. *Es sei*

$$\lim_{x\to\infty}f(x+iy)=0$$

gleichmässig für alle reellen Werte von y.

Behauptung: *Für $\Re(s)>\beta$ gilt (8), wo $F(t)$ durch (9) definiert ist.*

Ein Spezialfall von Satz 2 ist

Satz 3. Voraussetzungen: 1. *Die Funktion $f(s)$ sei analytisch in der Halbebene $\Re(s)>a\geqq 0$.*

2. *Für ein festes $\beta>a$ sei das Integral*

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(\beta+iy)|\,dy$$

konvergent.

3. *Es sei $|f(s)|<A$ für $\Re(s)\geqq\beta$, wo A eine nicht von s abhängige Zahl bedeutet.*

4. *Es sei*

$$\lim_{x\to\infty}f(x+iy)=0$$

gleichmässig für alle reellen Werte von y.

5. *Es sei $-\frac{1}{2}\leqq\Re(\nu)\leqq\frac{1}{2}$.*

Behauptung: *Für $\Re(s)>\beta$ gilt (8), wo $F(t)$ die Funktion*

$$F(t)=\frac{1}{i\sqrt{2\pi}}\int_{\beta-\infty i}^{\beta+\infty i}I_\nu(tz)(tz)^{\frac{1}{2}}f(z)\,dz \quad (11)$$

bezeichnet.

Dieser Satz kann sehr leicht aus Satz 2 abgeleitet werden. Man hat nämlich, falls $\Re(\nu) \geqq -\frac{1}{2}$ ist, (man vergl. (14), (15), und (20))

$$|I_\nu(z)\, z^{\frac{1}{2}}| < B\, e^{|\Re(z)|}, \qquad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (12)$$

wo B unabhängig von z ist. Für $0 \leqq t \leqq b$ und $z = \beta + iy$ mit $\beta > 0$ gilt also

$$|I_\nu(tz)\,(tz)^{\frac{1}{2}} f(z)| < B e^{b\beta}\, |f(\beta + iy)|.$$

Man sieht nun sofort ein, dass die Voraussetzungen 2 und 3 von Satz 2 erfüllt sind und dass Satz 3 aus Satz 2 folgt.

Ist $f(s)$ analytisch in der Halbebene $\Re(s) > a \geqq 0$ und $s^k f(s)$ $(k > 1)$ beschränkt für $\Re(s) > a$, so sind die Voraussetzungen von Satz 3 erfüllt, und zwar für jedes $\beta > a$; die durch (11) definierte Funktion $F(t)$ hängt dann wegen des CAUCHYschen Satzes nicht von β ab (man vergl. (12)) und genügt der Integralgleichung (8).

Ist $\Re(\theta) < 0$, $t > 0$ und $\beta > 0$, so gilt bekanntlich [7])

$$\frac{1}{i\sqrt{2\pi}} \int_{\beta-\infty i}^{\beta+\infty i} I_\nu(ts)\,(ts)^{\frac{1}{2}}\, s^\theta\, ds = \frac{2^{\theta+1}\sqrt{\pi}\; t^{-\theta-1}}{\Gamma(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}\theta)\,\Gamma(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}\theta)};$$

ferner hat man [8]), falls $\Re(\frac{1}{2} \pm \nu - \theta) > 0$ und $\Re(s) > 0$ ist,

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty K_\nu(st)\,(st)^{\frac{1}{2}}\, \frac{2^{\theta+1}\sqrt{\pi}\; t^{-\theta-1}\, dt}{\Gamma(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}\theta)\,\Gamma(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}\theta)} = s^\theta.$$

Diese zwei Beziehungen sind nur Spezialfälle der Relationen (9) und (8), und zwar mit

$$f(s) = s^\theta, \quad F(t) = \frac{2^{\theta+1}\sqrt{\pi}\; t^{-\theta-1}}{\Gamma(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}\theta)\,\Gamma(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}\theta)}.$$

Die Funktion $f(s) = s^\theta$ genügt aber für $-1 \leqq \Re(\theta) < 0$ weder den Voraussetzungen von Satz 3, noch den Voraussetzungen von Satz 2 [9]). Für diese spezielle Funktion $f(s)$ zeigt also *die direkte Berechnung*, dass die durch (9) definierte Funktion $F(t)$ eine Lösung der Integralgleichung (8) ist.

Ich kann jetzt die folgende Erweiterung von Satz 2 aussprechen:

---

[7]) Man vergl. MEIJER, [10], 873, Formel (3).

[8]) WATSON, [22], 388, Formel (8).

[9]) Ist $f(z) = z^\theta$ und $-1 \leqq \Re(\theta) < 0$, so existiert der Grenzwert (10), jedoch nicht gleichmässig in t im Intervall $0 \leqq t < \varepsilon$.

Satz 4. *Genügt $f(s)$ den Voraussetzungen von Satz 2 und wird $g(s)$ durch*

$$g(s) = f(s) + \sum_{h=1}^{n} c_h\, s^{\theta_h}$$

definiert, wo $\Re(\theta_h) < 0$ $(h = 1, \ldots, n)$, so hat man für $\Re(s) > \beta$

$$g(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty K_\nu(st)\,(st)^{\frac{1}{2}}\, G(t)\, dt,$$

wo $G(t)$ die Funktion

$$G(t) = \frac{1}{i\sqrt{2\pi}} \lim_{\lambda \to \infty} \int_{\beta-\lambda i}^{\beta+\lambda i} I_\nu(ts)\,(ts)^{\frac{1}{2}}\, g(s)\, ds$$

bezeichnet.

Es ist klar, dass Satz 3 eine analoge Erweiterung besitzt. Ein verwandter Satz für die LAPLACE-Transformation kommt bei TAMARKIN vor [10]).

§ 2. Hilfssätze.

Ich gebe zunächst einige Hilfsformeln, die ich im Folgenden benutzen werde.

Für die Funktion $K_\nu(z)$ gilt [11]) für festes positives ε und für $|z| \to \infty$

$$K_\nu(z) = \left(\frac{\pi}{2z}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-z}\,\{1 + O(z^{-1})\} \qquad (-\tfrac{3}{2}\pi + \varepsilon < \arg z < \tfrac{3}{2}\pi - \varepsilon). \quad . \quad (13)$$

Die entsprechenden Formeln für $I_\nu(z)$ sind

$$\left.\begin{aligned} I_\nu(z) &= \frac{e^z}{(2\pi z)^{\frac{1}{2}}}\{1 + O(z^{-1})\} + \frac{e^{-z-(\nu+\frac{1}{2})\pi i}}{(2\pi z)^{\frac{1}{2}}}\{1 + O(z^{-1})\} \\ &\qquad (-\tfrac{3}{2}\pi + \varepsilon < \arg z < \tfrac{1}{2}\pi - \varepsilon) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (14)$$

und

$$\left.\begin{aligned} I_\nu(z) &= \frac{e^z}{(2\pi z)^{\frac{1}{2}}}\{1 + O(z^{-1})\} + \frac{e^{-z+(\nu+\frac{1}{2})\pi i}}{(2\pi z)^{\frac{1}{2}}}\{1 + O(z^{-1})\} \\ &\qquad (-\tfrac{1}{2}\pi + \varepsilon < \arg z < \tfrac{3}{2}\pi - \varepsilon) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (15)$$

Die Beziehungen (14) und (15) können leicht mit Hilfe von [12])

$$I_\nu(z) = \frac{e^{-\nu\pi i} K_\nu(z) - K_\nu(z e^{\pi i})}{\pi i} = \frac{K_\nu(z e^{-\pi i}) - e^{\nu\pi i} K_\nu(z)}{\pi i}$$

aus (13) abgeleitet werden.

---

[10]) TAMARKIN, [19], 419. Siehe auch DOETSCH, [4], 128, Satz 3.

[11]) Man vergl. WATSON, [22], § 7. 23; MEIJER, [8], 658, Satz 1.

[12]) Man vergl. WATSON, [22], 80, Formel (18).

Schliesslich brauche ich noch [13])

$$\int I_\nu(xs)\, K_\nu(ts)\, s\, ds = \frac{s\{x I_{\nu+1}(xs) K_\nu(ts) + t I_\nu(xs) K_{\nu+1}(ts)\}}{x^2 - t^2} + C \quad . \quad (16)$$

Hilfssatz 1. *Es sei* $x > 0,\ y > 0,\ r > 0$. *Ich betrachte das Integral*

$$L_1 = \left\{ \int_{-\infty i}^{-ri} + \int_{C_r} + \int_{ri}^{\infty i} \right\} I_\nu(xs)\, I_{\nu+1}(ys)\, ds; \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (17)$$

hierin (und ebenso in (21)) *bezeichnet* C_r *den auf der rechten Seite der imaginären Achse liegenden Halbkreis mit Mittelpunkt* $s = 0$ *und Radius* r *(von* $-ri$ *bis* ri *durchlaufen).*

Behauptung:

$$L_1 = \begin{cases} -2 i x^\nu y^{-\nu-1} \sin \nu\pi & \textit{für } x < y, \\ -i x^{-1} \sin \nu\pi & \textit{für } x = y, \\ 0 & \textit{für } x > y. \end{cases} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (18)$$

Beweis. Ist $x > 0,\ y > 0$ und $\Re(\nu) > -1$, so gilt bekanntlich [14])

$$\int_0^{\infty i} I_\nu(xs)\, I_{\nu+1}(ys)\, ds = \begin{cases} -e^{\nu\pi i} x^\nu y^{-\nu-1} & \text{für } x < y, \\ -\frac{1}{2} e^{\nu\pi i} x^{-1} & \text{für } x = y, \\ 0 & \text{für } x > y. \end{cases} \quad . \; . \quad (19)$$

Die linke Seite dieser Beziehung werde L_2 gesetzt. Mit Rücksicht auf

$$I_\nu(z) = \frac{2^{-\nu} z^\nu}{\Gamma(\nu+1)}\, {}_0F_1(\nu+1; \tfrac{1}{4} z^2) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (20)$$

sieht man leicht ein, dass L_1 nicht von r abhängig ist und dass dieses Integral für $\Re(\nu) > -1$ den Wert

$$L_1 = (1 - e^{-2\nu\pi i}) \int_0^{\infty i} I_\nu(xs)\, I_{\nu+1}(ys)\, ds = 2 i e^{-\nu\pi i} L_2 \sin \nu\pi$$

besitzt. Formel (18) folgt daher sofort aus (19) [15]).

---

13) WATSON, [22], 134, Formel (8).

14) WATSON, [22], 406, Formel (8).

15) Die Bedingung $\Re(\nu) > -1$ darf bei (18) fortgelassen werden, da der Punkt $s = 0$ nicht auf dem Integrationswege des Integrals L_1 liegt.

Hilfssatz 2. *Es sei* $x > 0,\ y > 0,\ r > 0$. *Ich betrachte das Integral*

$$L_3 = \lim_{\lambda \to \infty} \left\{ \int_{-\lambda i}^{-ri} + \int_{C_r} + \int_{ri}^{\lambda i} \right\} I_\nu(xs)\, I_{-\nu-1}(ys)\, ds. \; . \; . \; . \quad (21)$$

Behauptung:

$$L_3 = -2 i x^\nu y^{-\nu-1} \sin \nu\pi. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (22)$$

Beweis. Die Integrale

$$\int_{-\infty i}^{-ri} I_\nu(xs)\, I_{-\nu-1}(ys)\, ds \text{ und } \int_{ri}^{\infty i} I_\nu(xs)\, I_{-\nu-1}(ys)\, ds$$

sind zwar für $x \neq y$ konvergent [16]), aber nicht für $x = y$. Das ist der Grund, warum ich in Hilfssatz 2 Hauptwerte eingeführt habe.

Wegen (20) gilt

$$\int_{-\lambda i}^{-ri} I_\nu(xs)\, I_{-\nu-1}(ys)\, ds = -\int_{ri}^{\lambda i} I_\nu(xs)\, I_{-\nu-1}(ys)\, ds,$$

so dass

$$L_3 = \int_{C_r} I_\nu(xs)\, I_{-\nu-1}(ys)\, ds$$

ist, und dieses Integral ist mit Rücksicht auf (20) gleich

$$\frac{2 x^\nu y^{-\nu-1}}{\Gamma(\nu+1)\,\Gamma(-\nu)} \int_{C_r} {}_0F_1(\nu+1; \tfrac{1}{4} x^2 s^2) \,.\, {}_0F_1(-\nu; \tfrac{1}{4} y^2 s^2) \frac{ds}{s}$$

$$= \frac{2 x^\nu y^{-\nu-1}}{\Gamma(\nu+1)\,\Gamma(-\nu)} \int_{C_r} \frac{ds}{s} = \frac{2\pi i x^\nu y^{-\nu-1}}{\Gamma(\nu+1)\,\Gamma(-\nu)} = -2 i x^\nu y^{-\nu-1} \sin \nu\pi,$$

womit der Beweis geliefert ist.

Hilfssatz 3. *Es sei* $x > 0,\ y > 0,\ \beta > 0$. *Ich betrachte das Integral*

$$L_4 = \lim_{\lambda \to \infty} \int_{\beta - \lambda i}^{\beta + \lambda i} I_\nu(xs)\, K_{\nu+1}(ys)\, ds. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (23)$$

---

16) Man vergl. (14) und (15).

Behauptung:

$$L_4 = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \textit{für } x < y, \\ \frac{1}{2}\pi i x^{-1} & \textit{für } x = y, \\ \pi i x^{\nu} y^{-\nu-1} & \textit{für } x > y. \end{array} \right\} \quad \dots\dots\dots \quad (24)$$

Beweis. Aus (15) und (13) bezw. (14) und (13) geht hervor, dass die Integrale

$$\int\limits_{\lambda i}^{\beta+\lambda i} I_\nu(xs)\, K_{\nu+1}(ys)\, ds \quad \text{und} \quad \int\limits_{-\lambda i}^{\beta-\lambda i} I_\nu(xs)\, K_{\nu+1}(ys)\, ds$$

gegen Null streben für $\lambda \to \infty$. Das Integral L_4 besitzt daher den Wert

$$L_4 = \lim_{\lambda\to\infty} \left\{ \int\limits_{-\lambda i}^{-ri} + \int\limits_{C_r} + \int\limits_{ri}^{\lambda i} \right\} I_\nu(xs)\, K_{\nu+1}(ys)\, ds. \quad \dots \quad (25)$$

Für nicht-ganzzahlige Werte von ν gilt aber

$$K_{\nu+1}(z) = \frac{\pi}{2 \sin \nu\pi} \{ I_{\nu+1}(z) - I_{-\nu-1}(z) \};$$

aus (25) ergibt sich also mit Rücksicht auf (17) und (21)

$$L_4 = \frac{\pi}{2 \sin \nu\pi} \{ L_1 - L_3 \}.$$

Formel (24) folgt nun sofort aus (18) und (22) [17].

[17]) Durch Grenzübergang findet man, dass Formel (24) auch gilt für ganze Werte von ν.

Mathematics. — *On the thermo-hydrodynamics of perfectly perfect fluids.* II. By D. VAN DANTZIG.

(Communicated at the meeting of April 27, 1940.)

Summary.

In § 5 the equations for chemical reactions are given; the mass-action law is obtained as a special case of the condition of isentropy. In § 6 the equations of continuity for the different components in the absence of reactions are introduced. A number of errors often made in relativistic hydro- and thermodynamics is pointed out. The equations of motion and of continuity together are brought in a simple polydimensional (§ 7) and a homogeneous form (§ 8).

§ 5. *Chemical reactions.*

From the equations of motion, e.g. in the form I (25) [28]) follows with $\mathfrak{S}^h = \mathfrak{s}\,\vartheta^h$, $\mathfrak{N}_r^h = \mathfrak{p}_r\,\vartheta^h$, $\mathfrak{s} = -\mathfrak{p}_i\,\vartheta^i - \mathfrak{p}_r\,\lambda^r$:

$$d_L\,\mathfrak{s} = -\vartheta^i\, d_L\,\mathfrak{p}_i - \mathfrak{p}_r\, d_L\,\lambda^r - \lambda^r\, d_L\,\mathfrak{p}_r = -\lambda^r\, d_L\,\mathfrak{p}_r, \quad \dots \quad (66)$$

i.e.

$$\partial_j\,\mathfrak{S}^j = -\lambda^r\,\partial_j\,\mathfrak{N}_r^j. \quad \dots\dots\dots \quad (67)$$

If the element $\mathrm{d}V$ is "dragged along", i.e. if $d_L\,\mathrm{d}\mathfrak{V}_i = 0$, this is equivalent with

$$\frac{d}{d\theta} S^{\mathrm{d}V} = -\lambda^r \frac{d}{d\theta} N_r^{\mathrm{d}V}. \quad \dots\dots\dots \quad (68)\ [29])$$

This equation shows (always for a perfectly perfect fluid!) that *increase of entropy is only possible if the amount of at least one component changes.* This is of course to be expected because of the definition of perfectly perfectness.

Let us suppose now that k chemical reactions can take place between the n components Γ^r, the stoichiometric equations of which are

$$'a_r^u\,\Gamma^r \to {}''a_r^u\,\Gamma^r. \quad \dots\dots\dots \quad (69)$$

Here $'a_r^u$ and $''a_r^u$ are non-negative integers, whereas Γ^r are the

[28]) Cf. the first part of the paper, these Proceedings **43** (1940), 387—402, referred to as I.

[29]) The reference on p. 399, I line 6 should be read: cf. § 6, (81).