Mathematics. — *Zur projektiven Differentialgeometrie der Regelflächen im R_4.* (Dritte Mitteilung). Von R. WEITZENBÖCK.

(Communicated at the meeting of May 25, 1940.)

Ich setze im Anschlusse an die vorige Mitteilung die Ermittlung der zu einer allgemeinen Erzeugenden der Fläche F gehörigen linearen Räume fort, wobei die Voraussetzung gemacht wird, dass die (einfachste) Differentialinvariante Q nicht verschwindet. Als besondere Tatsache sei hervorgehoben, dass die Heftebene von der zur Erzeugenden „assoziierten" oder Bei-Geraden getroffen wird.

§ 9.

Die durch (32) gegebene Heftebene m_{ijk} der Erzeugenden 0_{ik} kann nach Gleichung (35) auch in der Gestalt

$$m\,(0_{ik}) = (1^2 H \pi^2) = 0$$

dargestellt werden. Wir ersetzen nun 0_{ik} nach (60) durch

$$\varphi_{ik} = \tfrac{3}{2}\,(HH_1)_{ik} + \lambda\,.\,0_{ik},$$

d.h. wir berechnen

$$m_{ijk}\,(\varphi_{ik}) = m\,(\varphi) = (\varphi_1{}^2\, H\,(\varphi)\,\pi^2).$$

Nach (62) und (70) wird

$$m\,(\varphi) = 3\,(HH_2H\,(\varphi)\,\pi^2) + \tfrac{3}{2}\,\lambda\,.\,(1^2 H\,(\varphi)\,\pi^2) + \tfrac{3}{2}\,\lambda'\,(0^2 H\,(\varphi)\,\pi^2) =$$
$$= \tfrac{3}{2}\,\lambda^2\,(\lambda - 8\,Q)^2\,.\,(1^2 H \pi^2),$$

also

$$m_{ijk}\,(\varphi) = \tfrac{3}{2}\,\lambda^2\,(\lambda - 8\,Q)^2\,.\,m_{ijk}, \qquad (78)$$

wovon als besonderer Fall für $\lambda = 4\,Q$ folgt:

$$m_{ijk}\,(a) = 3.2^7\,.\,Q^4\,.\,m_{ijk}; \qquad (79)$$

weiters haben wir nach (59)

$$m_{ik} = a_{ik} + 4\,Q\,.\,0_{ik}.$$

Hieraus wird

$$m_{ik}\,(\varphi) = a_{ik}\,(\varphi) + 4\,Q\,(\varphi)\,.\,\varphi_{ik},$$

also nach (76) und (74)

$$m_{ik}(\varphi) = \lambda^3 (\lambda - 8\,Q)^3 \,.\, m_{ik}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (80)$$

Hieraus wieder für $\lambda = 4\,Q$:

$$m_{ik}(a) = -(4\,Q)^6 \,.\, m_{ik}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (81)$$

Aus (80) folgt noch, dass der nach (42) zu berechnende Punkt M für die Gerade φ_{ik}, also der Punkt $M(\varphi)$, wieder der Geraden m_{ik} angehört.

Dem in (42) stehenden Ausdruck

$$R_0 = 2_{05,\,03}$$

lässt sich, wenn man die Ableitung Q' von $Q = 0_{13,\,23}$ benutzt, eine andere Gestalt geben. Wir haben

$$Q' = 1_{13,\,23} + 0_{23,\,23} + 0_{14,\,23} + 0_{13,\,33} + 0_{13,\,24}.$$

Hier verschwindet rechts der zweite Term, der vierte ist R (Vgl. (41)). Auch der dritte Term ist nach (1) Null. Beim ersten Term haben wir auf Grund der Gleichungen (1) und der zyklischen Symmetrie:

$$1_{13,23} = -2_{13,13} - 3_{13,12} = +\tfrac{1}{2}\,1_{33,12} = -\tfrac{1}{6}\,1_{33,03} = +\tfrac{1}{6}\,0_{33,13} = -\tfrac{1}{6}\,R\,;$$

und beim letzten Term wird analog

$$\begin{aligned} 0_{13,24} &= -\tfrac{2}{3}\,0_{13,33} - \tfrac{2}{5}\,0_{13,\,15} = -\tfrac{2}{3}\,R + \tfrac{2}{5}\,1_{03,\,15} = -\tfrac{2}{3}\,R - \tfrac{1}{5}\,5_{03,\,11} = \\ &= -\tfrac{2}{3}\,R + \tfrac{1}{5}\,5_{03,\,02} \quad = -\tfrac{2}{3}\,R + \tfrac{1}{5}\,2_{05,\,03} = -\tfrac{2}{3}\,R + \tfrac{1}{5}\,R_0. \end{aligned}$$

Also kommt schliesslich

$$R_0 = 2_{05,\,03} = 5\,Q' - \tfrac{5}{6}\,R \quad , \quad Q' = \tfrac{1}{6}\,R + \tfrac{1}{5}\,2_{05,03}. \quad . \quad . \quad (82)$$

Diese Grösse R_0 tritt auch in der Gleichung der Schmiegebene h_{ijk}

$$(h'\pi)^2 = (\pi^2\,HH_1H_2) = 0 \quad , \quad h_{ijk} = (HH_1H_2)_{ijk}\,. \quad . \quad . \quad (83)$$

im Punkte H an die Kurve C_H auf. Nach (21) haben wir

$$\begin{aligned} (\pi^2\,HH_1\,H_2) = (0H_1\,H_2\,\pi^2)\,0_{22} = \tfrac{1}{2}\,(0^2\,H_2\,\pi^2)\,(H_1)_{22} - \\ - \tfrac{1}{2}\,(0^2\,H_1\,\pi^2)\,(H_2)_{22} - (0^2\,H_1\,H_2\,\pi)\,\pi_{22}. \end{aligned}$$

Dies kann mit Hilfe von (54) und (55) umgeformt werden auf

$$(h'\pi)^2 = (\pi^2\,HH_1\,H_2) = \tfrac{4}{3}\,Q\,(\pi_{02,\,04} + \pi_{02,\,22}) + \tfrac{1}{3}\,\pi_{02,\,03}\,(H_2)_{22}. \quad . \quad (84)$$

Hier enthält der letzte Term die Heftebene m_{ijk} (Vgl. (32)) und für den Koeffizienten $(H_2)_{22}$ ergibt sich nach (55):

$$(H_2)_{22} = 4.1_{22,\,23} + 2.0_{22,\,33} + 2.0_{22,\,24}.$$

Nun ist wie oben:

$$1_{22,23} = -3_{22,12} = +\tfrac{1}{3}\,3_{22,03} = -\tfrac{1}{6}\,0_{22,33} = \tfrac{2}{9}\,R$$

$$0_{22,34} = -\tfrac{4}{3}\,R$$

$$0_{22,24} = -\tfrac{2}{3}\,0_{22,33} - \tfrac{2}{5}\,0_{22,15} = \tfrac{8}{9}\,R + \tfrac{2}{5}\,1_{22,05} = \tfrac{8}{9}\,R - \tfrac{4}{5}\,2_{12,05} =$$
$$= \tfrac{8}{9}\,R + \tfrac{4}{15}\,2_{03,05} = \tfrac{8}{9}\,R - \tfrac{4}{15}\,R_0.$$

Also wird

$$(H_2)_{22} = -\tfrac{8}{15}\,R_0 = \tfrac{4}{9}\,R - \tfrac{8}{3}\,Q'. \quad \ldots\ldots \quad (85)$$

Der Schmiegraum H' im Punkte H an die Kurve C_H wird gegeben durch die Kovariante

$$(H'\,x) = (HH_1\,H_2\,H_3\,x) = 0. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (86)$$

Dies kann man am einfachsten nach (84) entwickeln indem man dort $\pi_{ik} = (H_3\,x)_{ik}$ einsetzt. Wir erhalten

$$(H'\,x) = \tfrac{4}{3}\,Q\,[x_{04}\,(H_3)_{02} - x_{02}\,(H_3)_{04} + x_{22}\,(H_3)_{02} - x_{02}\,(H_3)_{22}] +$$
$$+ \tfrac{1}{3}\,(H_2)_{22}\,[x_{03}\,(H_3)_{02} - x_{02}\,(H_3)_{03}]$$

$$\left.\begin{aligned}(H'\,x) = - x_{02}\,[\tfrac{4}{3}\,Q\,(H_3)_{04} + \tfrac{4}{3}\,Q\,(H_3)_{22} + \tfrac{1}{3}\,(H_2)_{22}\,(H_3)_{03}] + \\ + x_{03}\,.\,\tfrac{8}{9}\,Q\,(H_2)_{22} + \tfrac{32}{9}\,Q^2\,[x_{04} + x_{22}]\end{aligned}\right\} \quad . \quad (87)$$

Hieraus ist schliesslich für $x = H_4$ ein Ausdruck für die Invariante

$$\triangle_H = (HH_1\,H_2\,H_3\,H_4) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (88)$$

erhältlich, der $\triangle_H$ durch die Grössen $(H_i)_{rs}$ ausdrückt.

§ 10.

Wenn eine Regelfläche F abwickelbar ist, so verschwindet $(M'_{02}\,x)$ und daher auch (Hu') identisch. Ich behaupte, dass für diesen Fall die Differentialkomitante erster Ordnung

$$E_0 = 0_{1\pi}\,(0u') = (01^2\pi^2)\,(0u') = -(10^2\pi^2)\,(1u') \quad \ldots \quad (89)$$

den zugehörigen Kurvenpunkt (bei einem Kegel die Spitze) und die zugehörige Schmiegebene darstellt.

Beweis. Bei einer Torse haben wir $0_{ik} = (yy')_{ik}$, also

$$E_0 = (1\,yy'\,\pi^2)\,(1u') = -\tfrac{1}{2}\,(yy'\,y''\,\pi^2)\,.\,(yu');$$

bei einem Kegel mit Spitze s ist $0_{ik} = (sy)_{ik}$, also

$$E_0 = (1sy\,\pi^2)\,(1u') = -\tfrac{1}{2}\,(syy'\,\pi^2)\,.\,(su').$$

Wir berechnen E_0 für die Gerade φ_{ik} von (60). Nach (62) wird:

$$E_0(\varphi) = 3\,(\varphi\, H H_2 \pi^2)\,(\varphi\, u') + \lambda\,.\,(\varphi\, 1^2 \pi^2)\,(\varphi\, u') + \lambda'\,.\,(\varphi\, 0^2 \pi^2)\,(\varphi\, u').$$

Bringt man hier die beiden Reihen φ in den Klammerfaktor und setzt

$$\varphi_{ik} = \tfrac{3}{2}\,(HH_1)_{ik} + \lambda\,.\,0_{ik},$$

so kommt

$$\left.\begin{aligned} E_0(\varphi) = (Hu')\,.\,\{\tfrac{9}{2}\,(HH_1 H_2 \pi^2) - \tfrac{9}{4}\,\lambda\,\pi_{02,04} - \tfrac{3}{4}\,\lambda\,\pi_{02,22} - \lambda'\,\pi_{02,03}\} + \\ + \lambda\,(H_1 u')\,\pi_{02,03} + \lambda^2 E_0 \end{aligned}\right\} \quad . \qquad (90)$$

Hier kann man noch $(HH_1 H_2 \pi^2)$ nach (84) ausdrücken.

Setzen wir in (90) $\lambda = 0$, so geht φ_{ik} über in die Tangente $(HH_1)_{ik}$ an C_H im Heftpunkte H; E_0 zerfällt demgemäss in (Hu') und die dazugehörige Schmiegebene h_{ijk}, Gleichung (84).

Bei $\lambda = 8\,Q$ wird φ_{ik} mit m_{ik} identisch. Da auch die Geraden m_{ik} eine abwickelbare Regelfläche bilden, muss auch für diesen Fall $E_0\,(m)$ in zwei Faktoren zerfallen, von denen der eine den durch (42) dargestellten Punkt M, der andere die zugehörige Schmiegebene geben muss. Also muss nach (32) der zweite Faktor die Form $\pi_{02,03}$ sein.

Das dies in der Tat der Fall ist, kann man verifizieren, wenn man von einer Identität Gebrauch macht, die wir jetzt ableiten wollen. Setzt man in (90) $\lambda = 8\,Q$, so entsteht im letzten Term $64\,Q^2 E_0$ und es lässt sich $Q E_0$ durch andere Komitanten ausdrücken.

Es sei $\dot{0}_{ik}$ mit 0_{ik} äquivalent. Dann können wir in dem Produkt

$$Z = 0_{ik,\,\alpha\beta}\,\dot{0}_{\gamma\delta,\,\xi\eta} = (0\,i^2 k^2)\,\dot{0}_{\gamma\delta}\,0_{\alpha\beta}\,\dot{0}_{\xi\eta}$$

die Reihe $\dot{0}$ des zweiten Faktors in den Klammerfaktor bringen und erhalten

$$Z = 0_{ik,\,\xi\eta}\,0_{\gamma\delta,\alpha\beta} + 2\,(\dot{0}0\,ik^2)\,\dot{0}_{\xi\eta}\,i_{\gamma\delta}\,0_{\alpha\beta} + 2\,(\dot{0}0\,i^2 k)\,\dot{0}_{\xi\eta}\,k_{\gamma\delta}\,0_{\alpha\beta}.$$

Hier werden die beiden letzten Terme, wenn wir auch die zweite Reihe $\dot{0}$ in den Klammerfaktor schaffen, wegen $(\dot{0}^2\,0) = 0$ gleich

$$+\, i_{0k,\,\gamma\delta}\,0_{\xi\eta,\,\alpha\beta} + k_{0i,\,\gamma\delta}\,0_{\xi\eta,\,\alpha\beta},$$

und dies gibt wegen der zyklischen Symmetrie von $i_{0k,\,\gamma\delta}$ bezgl. $i, 0, k$:

$$-\,0_{ik,\,\gamma\delta}\,.\,0_{\xi\eta,\,\alpha\beta}.$$

Also wird

$$Z = 0_{ik,\,\xi\eta}\,0_{\gamma\delta,\,\alpha\beta} + 0_{ik,\,\gamma\delta}\,0_{\xi\eta,\,\alpha\beta}$$

und damit erhält man die Identität:

$$0_{ik,\,\alpha\beta}\,0_{\gamma\delta,\,\xi\eta} + 0_{ik,\,\gamma\delta}\,0_{\xi\eta,\,\alpha\beta} + 0_{ik,\,\xi\eta}\,0_{\alpha\beta,\,\gamma\delta} = 0, \quad . \quad . \quad . \quad (91)$$

d.h. wir haben im Produkte Z zyklische Symmetrie in den drei Paaren $\alpha\beta$, $\gamma\delta$ und $\varepsilon\eta$.

Bei der Ableitung von (91) können statt dieser Paare auch Reihen u', v', w' stehen. Steht z.B. u' statt $\varepsilon\eta$, so haben wir

$$0_{ik,\alpha\beta} \,.\, 0_{\gamma\delta}\,(0u') = -\,0_{ik,\gamma\delta} \,.\, (0u')\,0_{\alpha\beta} - 0_{ik}\,(0u') \,.\, 0_{\alpha\beta,\gamma\delta}$$

Dies kann man anwenden für den Fall

$$0_{ik,\alpha\beta} \,.\, 0_{\gamma\delta}\,(0u') = 0_{13,23} \,.\, 0_{1\pi}\,(0u') = Q \,.\, E_0$$

und erhält

$$Q E_0 = -\,0_{13,1\pi} \,.\, (0u')\,0_{23} - 0_{13}\,(0u') \,.\, 0_{23,1\pi}$$

oder schliesslich

$$Q E_0 = -\tfrac{1}{2}\,\pi_{02,03} \,.\, (0u')\,0_{23} + \tfrac{3}{16}\,(Hu') \,.\, \pi_{02,04} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (92)$$

§ 11.

Konstruiert man zu vier Erzeugenden von F die assoziierte Gerade G_5 und lässt dann die vier Erzeugenden auf 0_{ik} zusammenrücken, so geht für $Q \neq 0$ G_5 in die zur Erzeugenden 0_{ik} assoziierte Gerade, oder, wie wir kurz sagen wollen, in die „Bei-Gerade" g_{ik} über. Ich habe vor Kurzem bewiesen [1]), dass g_{ik} gegeben wird durch

$$g_{ik} = 0_{ik} \,.\, P - 1_{ik} \,.\, 12\,Q\,(3\,Q\,s + R^2) + 2_{ik} \,.\, 36\,Q^2\,R - 3_{ik} \,.\, 72\,Q^3. \quad (93)$$

Hierbei sind Q, R, S und T durch (41) gegeben und P ist der Ausdruck

$$P = 2\,R^3 + 12\,Q\,R\,S + 9\,Q^2\,T \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (94)$$

Er ist vom φ'-Gewichte $\varrho = 30$ und vom λ-Gewicht $\sigma = 15$.

Setzen wir in der Gleichung $\pi_{02,03} = 0$ der Heftebene $\pi_{ik} = g_{ik}$, so entsteht Null, *die Beigerade schneidet also die Heftebene.* Wir nennen den Schnittpunkt G. Seine Gleichung findet man, wenn man einen nicht in Tangentialraum M'_{02} liegenden Punkt mit der Heftebene zu einem R_3 verbindet und diesem dann mit g_{ik} schneidet. Man erhält bei $Q \neq 0$:

$$(Gu') = R \,.\, (Hu') + 4\,Q \,.\, (3u')\,3_{02} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (95)$$

Wir haben dann ausser dem Heftpunkt H in der Heftebene m_{ijk} zwei invariante Punkte: G und den durch (42) gegebenen Punkt M. Hiermit lässt sich auf der Erzeugenden 0_{ik} selbst ein zweiter invarianter Punkt F konstruieren, nämlich der Schnittpunkt von 0_{ik} mit der Verbindungslinie GM. Als Gleichung von F erhält man:

$$F = M + G = (Hu')\,(2\,R + \tfrac{3}{5}\,2_{05,03}) - 16\,Q \,.\, (0u')\,0_{23} \quad . \quad . \quad (96)$$

---

[1]) Diese Proceedings **43**, 325—333 (1940).

oder auch, nach (82):

$$(u'F) = (Hu') \,.\, (\tfrac{3}{2} R + 3\,Q') - 16\,Q \,.\, (0u')\,0_{23} = 0 \quad . \quad . \quad (96a)$$

F, G und M sind Differentialkontravarianten mit den Gewichten $\varrho = 14$ und $\sigma = 8$.

Die Gerade

$$\varphi_{ik} = \tfrac{3}{2}\,(HH_1)_{ik} + \lambda \,.\, 0_{ik}$$

im Büschel um H in der Heftebene lässt sich dann durch die beiden Basisgeraden $(HM)_{ik}$ und $(HG)_{ik}$ wie folgt darstellen

$$\varphi_{ik} = \frac{1}{64\,Q^2}\,\{(HM)_{ik} \,.\, (3\lambda - 8\,Q) + (HG)_{ik} \,.\, (3\lambda - 24\,Q)\} \quad . \quad (97)$$

Hieraus folgt z.B. dass die Gerade MG die Tangente $h_{ik} = (HH_1)_{ik}$ im Punkte $M + 3G$, die Heftgerade a_{ik} aber im Punkte $M - 3G$ schneidet.

Die Beigerade g_{ik} gibt mit der Erzeugenden 0_{ik} verbunden den kovarianten R_3

$$(B'x) = R \,.\, x_{02} - 2\,Q \,.\, x_{03} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (98)$$

und zwei aufeinander folgende dieser Räume schneiden sich in der Ebene

$$\left.\begin{aligned} &(\tfrac{2}{3} R^2 + 2\,QR' - 2\,Q'R) \,.\, \pi_{02,03} - 2\,QR \,.\, (\pi_{02,13} + \pi_{02,04}) + \\ &\qquad\qquad + 4\,Q^2 \,.\, (\pi_{03,13} + \pi_{03,04}) = 0. \end{aligned}\right\} . \quad (99)$$

Man rechnet leicht nach, dass diese Ebene auch die Beigerade schneidet.