Mathematics. — *Ueber eine Erweiterung der* LAPLACE-*Transformation.* (Zweite Mitteilung). Von C. S. MEIJER. (Communicated by Prof. J. G. VAN DER CORPUT).

(Communicated at the meeting of May 25, 1940.)

Hilfssatz 4. *Ist* $0 < \delta < x$ *und* $\beta > 0$, *so gilt*

$$\lim_{\lambda \to \infty} \int_{\beta-\lambda i}^{\beta+\lambda i} I_\nu(xs)\, s\, ds \int_{x}^{x+\delta} K_\nu(st)\, t^{\nu+1}\, dt = \tfrac{1}{2}\pi i x^\nu \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

und

$$\lim_{\lambda \to \infty} \int_{\beta-\lambda i}^{\beta+\lambda i} I_\nu(xs)\, s\, ds \int_{x-\delta}^{x} K_\nu(st)\, t^{\nu+1}\, dt = \tfrac{1}{2}\pi i x^\nu. \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

B e w e i s. Bekanntlich ist [18])

$$\int K_\nu(z)\, z^{\nu+1}\, dz = -z^{\nu+1} K_{\nu+1}(z) + C. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

Folglich hat man

$$\lim_{\lambda \to \infty} \int_{\beta-\lambda i}^{\beta+\lambda i} I_\nu(xs)\, s\, ds \int_{a}^{b} K_\nu(st)\, t^{\nu+1}\, dt$$

$$= a^{\nu+1} \lim_{\lambda \to \infty} \int_{\beta-\lambda i}^{\beta+\lambda i} I_\nu(xs)\, K_{\nu+1}(as)\, ds - b^{\nu+1} \lim_{\lambda \to \infty} \int_{\beta-\lambda i}^{\beta+\lambda i} I_\nu(xs)\, K_{\nu+1}(bs)\, ds.$$

Die beiden rechtstehenden Integrale können mit Hilfe von (23) und (24) berechnet werden. Nimmt man $a = x$ und $b = x + \delta$, so bekommt man (26); für $a = x - \delta$ und $b = x$ findet man (27).

Hilfssatz 5. *Ist* $0 < \alpha < d$ *und* $\mu \geqq 0$, *so hat man*

$$\left| \int_{\alpha-\mu i}^{\alpha+\mu i} \frac{e^{-\zeta}\, d\zeta}{\zeta} \right| < M, \qquad \left| \int_{\alpha-\mu i}^{\alpha+\mu i} \frac{e^{\zeta}\, d\zeta}{\zeta} \right| < M,$$

wo M *nicht von* α *und* μ, *also nur von* d *abhängt.*

---

[18]) WATSON, [**22**], 79, Formel (3).

Beweis. Für $a > 0$ gilt bekanntlich

$$\int_{\alpha-\infty i}^{\alpha+\infty i} \frac{e^{-\zeta}\, d\zeta}{\zeta} = 0, \quad \int_{\alpha-\infty i}^{\alpha+\infty i} \frac{e^{\zeta}\, d\zeta}{\zeta} = 2\pi i. \quad \ldots \quad (29)$$

Ferner hat man [19])

$$\int_{\alpha+\mu i}^{\alpha+\infty i} \frac{e^{-\zeta}\, d\zeta}{\zeta} = G(a+\mu i), \quad \int_{\alpha-\mu i}^{\alpha-\infty i} \frac{e^{-\zeta}\, d\zeta}{\zeta} = G(a-\mu i), \quad . \quad (30)$$

$$\int_{\alpha+\mu i}^{\alpha+\infty i} \frac{e^{\zeta}\, d\zeta}{\zeta} = G(-a-\mu i), \quad \int_{\alpha-\mu i}^{\alpha-\infty i} \frac{e^{\zeta}\, d\zeta}{\zeta} = G(-a+\mu i); \quad . \ . \quad (31)$$

hierin ist

$$G(z) = -\gamma - \log z - \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-z)^r}{r\,\Gamma(r+1)} = e^{-\frac{1}{2}z} z^{-\frac{1}{2}} W_{-\frac{1}{2},0}(z), \quad . \quad (32)$$

wo γ die EULERsche Konstante und $W_{k,m}(z)$ die WHITTAKERsche Funktion bezeichnet.

Aus (29), (30) und (31) ergibt sich nun

$$\int_{\alpha-\mu i}^{\alpha+\mu i} \frac{e^{-\zeta}\, d\zeta}{\zeta} = G(a-\mu i) - G(a+\mu i), \quad \ldots \quad (33)$$

$$\int_{\alpha-\mu i}^{\alpha+\mu i} \frac{e^{\zeta}\, d\zeta}{\zeta} = 2\pi i + G(-a+\mu i) - G(-a-\mu i). \quad . \ . \quad (34)$$

Für die Funktion $G(z)$ gilt aber [20]) für festes $\varepsilon > 0$ und für $|z| \to \infty$

$$G(z) = e^{-z} z^{-1} \{1 + O(z^{-1})\} \qquad (-\tfrac{3}{2}\pi + \varepsilon < \arg z < \tfrac{3}{2}\pi - \varepsilon). \quad (35)$$

Die Behauptung des Hilfssatzes ergibt sich jetzt wegen (33) und (34) sofort aus (32) und (35), da $\left|\log\left(\frac{a+\mu i}{a-\mu i}\right)\right| < \pi$ und $\left|\log\left(\frac{-a-\mu i}{-a+\mu i}\right)\right| < 2\pi$ ist.

Hilfssatz 6. *Ist $0 < c < a < d$ und $\mu \geqq 0$, so hat man*

$$\left|\int_{\alpha-\mu i}^{\alpha} \frac{e^{-\zeta}\, d\zeta}{\zeta}\right| < N, \qquad \left|\int_{\alpha}^{\alpha+\mu i} \frac{e^{-\zeta}\, d\zeta}{\zeta}\right| < N,$$

wo N nicht von a und μ, also nur von c und d abhängt.

19) Man vergl. GOLDSTEIN, [**6**], 112.

20) Man vergl. WHITTAKER and WATSON, [**23**], § 16.3—16.4.

Beweis. Die Integrale sind stetige Funktionen von α und μ, die bei unbeschränkt wachsendem μ nach einem endlichen Grenzwert streben.

§ 3. Beweis von Satz 1.

Ich zerlege den Beweis in drei Teile [21])

Erster Teil. Für hinreichend kleine positive Werte von δ $(0 < \delta < x)$ gilt

$$\frac{1}{\pi i} \lim_{\lambda \to \infty} \int_{\beta - \lambda i}^{\beta + \lambda i} I_\nu(xs)(xs)^{\frac{1}{2}} ds \int_{x}^{x+\delta} K_\nu(st)(st)^{\frac{1}{2}} F(t)\, dt = \tfrac{1}{2} F(x+0) \qquad (36)$$

und

$$\frac{1}{\pi i} \lim_{\lambda \to \infty} \int_{\beta - \lambda i}^{\beta + \lambda i} I_\nu(xs)(xs)^{\frac{1}{2}} ds \int_{x-\delta}^{x} K_\nu(st)(st)^{\frac{1}{2}} F(t)\, dt = \tfrac{1}{2} F(x-0). \qquad (37)$$

Zweiter Teil. Ist $0 < \delta < x$, so gilt

$$\lim_{\lambda \to \infty} \int_{\beta - \lambda i}^{\beta + \lambda i} I_\nu(xs)(xs)^{\frac{1}{2}} ds \int_{0}^{x-\delta} K_\nu(st)(st)^{\frac{1}{2}} F(t)\, dt = 0. \quad . \quad . \quad . \qquad (38)$$

Dritter Teil. Ist $\delta > 0$, so gilt

$$\lim_{\lambda \to \infty} \int_{\beta - \lambda i}^{\beta + \lambda i} I_\nu(xs)(xs)^{\frac{1}{2}} ds \int_{x+\delta}^{\infty} K_\nu(st)(st)^{\frac{1}{2}} F(t)\, dt = 0. \quad . \quad . \quad . \qquad (39)$$

Formel (5) folgt nun sofort aus (36), (37), (38) und (39).

Beweis von (36) und (37). Die Funktion $F(t)$, also auch $t^{-\nu-\frac{1}{2}} F(t)$, ist von beschränkter Variation in der Umgebung des Punktes $t = x$. Für hinreichend kleine positive Werte von τ hat man also im Intervall $x < t \leqq x + \tau$

$$t^{-\nu-\frac{1}{2}} F(t) = x^{-\nu-\frac{1}{2}} F(x+0) + \varphi_1(t) - \varphi_2(t); \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (40)$$

hierin sind $\varphi_1(t)$ und $\varphi_2(t)$ monoton wachsende Funktionen mit $\lim_{t \to x} \varphi_1(t) = 0$, $\lim_{t \to x} \varphi_2(t) = 0$.

Bei hinreichend kleinem τ gilt analog im Intervall $x - \tau \leqq t < x$

$$t^{-\nu-\frac{1}{2}} F(t) = x^{-\nu-\frac{1}{2}} F(x-0) + \psi_1(t) - \psi_2(t), \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (41)$$

---

21) Der Beweis von Satz 1 ist mit dem TITCHMARSHschen Beweis der HANKELschen Formel (4) verwandt; man vergl. TITCHMARSH, [**21**], 240—242.

wo $\psi_1(t)$ und $\psi_2(t)$ monoton abnehmende Funktionen mit $\lim\limits_{t\to x}\psi_1(t)=0$, $\lim\limits_{t\to x}\psi_2(t)=0$ bedeuten.

Zu jedem $\varepsilon>0$ kann man nun ein δ $(0<\delta\leqq\tau)$ so wählen, dass

$$\varphi_1(x+\delta)<\varepsilon,\ \varphi_2(x+\delta)<\varepsilon,\ \psi_1(x-\delta)<\varepsilon,\ \psi_2(x-\delta)<\varepsilon \quad . \quad (42)$$

ist.

Nun hat man mit Rücksicht auf (40)

$$\left.\begin{aligned}
&\int\limits_{\beta-\lambda i}^{\beta+\lambda i} I_\nu(xs)(xs)^{\frac12}\,ds\int\limits_x^{x+\delta} K_\nu(st)(st)^{\frac12}F(t)\,dt\\
&\qquad = x^{-\nu}F(x+0)\int\limits_{\beta-\lambda i}^{\beta+\lambda i} I_\nu(xs)\,s\,ds\int\limits_x^{x+\delta}K_\nu(st)\,t^{\nu+1}\,dt\\
&\qquad + x^{\frac12}\int\limits_{\beta-\lambda i}^{\beta+\lambda i} I_\nu(xs)\,s\,ds\int\limits_x^{x+\delta}K_\nu(st)\,\{\varphi_1(t)-\varphi_2(t)\}\,t^{\nu+1}\,dt.
\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (43)$$

Das Integral mit $\varphi_1(t)$ lässt sich unter Anwendung des zweiten Mittelwertsatzes folgenderweise reduzieren [22]:

$$\left.\begin{aligned}
&x^{\frac12}\int\limits_{\beta-\lambda i}^{\beta+\lambda i} I_\nu(xs)\,s\,ds\int\limits_x^{x+\delta}K_\nu(st)\,\varphi_1(t)\,t^{\nu+1}\,dt\\
&= x^{\frac12}\int\limits_x^{x+\delta}\varphi_1(t)\,t^{\nu+1}\,dt\int\limits_{\beta-\lambda i}^{\beta+\lambda i} I_\nu(xs)\,K_\nu(st)\,s\,ds\\
&= x^{\frac12}\varphi_1(x+\delta)\int\limits_\eta^{x+\delta}t^{\nu+1}\,dt\int\limits_{\beta-\lambda i}^{\beta+\lambda i} I_\nu(xs)\,K_\nu(st)\,s\,ds \qquad (\text{wo } x<\eta<x+\delta)\\
&= x^{\frac12}\varphi_1(x+\delta)\int\limits_{\beta-\lambda i}^{\beta+\lambda i} I_\nu(xs)\,s\,ds\int\limits_\eta^{x+\delta}K_\nu(st)\,t^{\nu+1}\,dt\\
&= x^{\frac12}\varphi_1(x+\delta)\int\limits_{\beta-\lambda i}^{\beta+\lambda i} I_\nu(xs)\left[\eta^{\nu+1}K_{\nu+1}(\eta s)-(x+\delta)^{\nu+1}K_{\nu+1}\{(x+\delta)s\}\right]ds
\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (44)$$

wegen (28).

[22] Man beachte hierbei, dass das Integral

$$\int\limits_{\beta-\lambda i}^{\beta+\lambda i} I_\nu(xs)\,K_\nu(st)\,s\,ds$$

rein imaginär ist.

Das Integral mit $\varphi_2(t)$ kann auf dieselbe Weise behandelt werden.

Nun folgt aus (26), dass das erste Integral auf der rechten Seite von (43) gegen $\frac{1}{2}\pi i F(x+0)$ strebt für $\lambda \to \infty$. Der Beweis von (36) ist also geliefert, sobald gezeigt ist, dass die beiden auf der rechten Seite von (43) stehenden Integrale mit $\varphi_1(t)$ bezw. $\varphi_2(t)$ durch geeignete Wahl von δ beliebig klein gemacht werden können. Ich darf mich hierbei auf $\varphi_1(t)$ beschränken.

Nun ist $\varphi_1(x+\delta) < \varepsilon$ für δ hinreichend klein (siehe (42)). Mit Rücksicht auf (44) brauche ich also nur zu zeigen, dass das Integral

$$\int_{\beta-\lambda i}^{\beta+\lambda i} I_\nu(xs)\, K_{\nu+1}(\eta s)\, ds$$

beschränkt ist für alle positive Werte von λ und für $x < \eta \leqq x+\delta$, wobei η von λ abhängig sein darf. Nun sieht man leicht ein, wegen (13), (14) und (15), dass ich nur die Integrale

$$\int_{\beta-\lambda i}^{\beta} \frac{e^{-xs-\eta s}\, ds}{s}, \quad \int_{\beta}^{\beta+\lambda i} \frac{e^{-xs-\eta s}\, ds}{s}, \quad \int_{\beta-\lambda i}^{\beta+\lambda i} \frac{e^{xs-\eta s}\, ds}{s}$$

zu betrachten brauche, und diese Integrale sind bezw. gleich

$$\int_{(\beta-\lambda i)(x+\eta)}^{\beta(x+\eta)} \frac{e^{-\zeta}\, d\zeta}{\zeta}, \quad \int_{\beta(x+\eta)}^{(\beta+\lambda i)(x+\eta)} \frac{e^{-\zeta}\, d\zeta}{\zeta}, \quad \int_{(\beta-\lambda i)(\eta-x)}^{(\beta+\lambda i)(\eta-x)} \frac{e^{-\zeta}\, d\zeta}{\zeta},$$

so dass ich mich auf die Hilfssätze 6 und 5 berufen kann.

Hiermit ist (36) bewiesen.

Formel (37) folgt auf analoge Weise aus (41) und (27).

B e w e i s von (38). Wegen (16) hat man

$$\left.\begin{aligned} &\int_{\beta-\lambda i}^{\beta+\lambda i} I_\nu(xs)(xs)^{\frac{1}{2}}\, ds \int_0^{x-\delta} K_\nu(st)(st)^{\frac{1}{2}} F(t)\, dt \\ &= x^{\frac{1}{2}} \int_0^{x-\delta} F(t)\, t^{\frac{1}{2}}\, dt \int_{\beta-\lambda i}^{\beta+\lambda i} I_\nu(xs)\, K_\nu(st)\, s\, ds = U_1 + U_2 - U_3 - U_4, \end{aligned}\right\} \tag{45}$$

falls

$$U_1 = x^{\frac{3}{2}}(\beta+\lambda i)\, I_{\nu+1}\{(\beta+\lambda i)x\} \int_0^{x-\delta} \frac{K_\nu\{(\beta+\lambda i)t\}\, F(t)\, t^{\frac{1}{2}}\, dt}{x^2-t^2}$$

und

$$U_2 = x^{\frac{1}{2}} (\beta + \lambda i) \, I_\nu \{(\beta + \lambda i) \, x\} \int_0^{x-\delta} \frac{K_{\nu+1} \{(\beta + \lambda i) \, t\} \, F(t) \, t^{\frac{3}{2}} \, dt}{x^2 - t^2}$$

gesetzt wird und U_3 und U_4 die analogen Ausdrücke mit $\beta - \lambda i$ statt $\beta + \lambda i$ bezeichnen.

Ich betrachte nun für $\lambda \to \infty$ den Ausdruck

$$\left\{ \int_0^{\lambda^{-1}} + \int_{\lambda^{-1}}^{x-\delta} \right\} \frac{K_\nu \{(\beta + \lambda i) \, t\} \, F(t) \, t^{\frac{1}{2}} \, dt}{x^2 - t^2} \quad \ldots \ldots \quad (46)$$

Wegen

$$K_\nu (z) = \frac{\pi}{2 \sin \nu \pi} \{ I_{-\nu} (z) - I_\nu (z) \}$$

gilt für das Integral von 0 bis λ^{-1}

$$\int_0^{\lambda^{-1}} \frac{K_\nu \{(\beta + \lambda i) \, t\} \, F(t) \, t^{\frac{1}{2}} \, dt}{x^2 - t^2} = O \left\{ \lambda^{-\nu} \int_0^{\lambda^{-1}} | F(t) | \, t^{\frac{1}{2} - \nu} \, dt \right\}$$

$$+ O \left\{ \lambda^{\nu} \int_0^{\lambda^{-1}} | F(t) | \, t^{\frac{1}{2} + \nu} \, dt \right\} = O \left\{ \lambda^{-\frac{1}{2}} \int_0^{\lambda^{-1}} | F(t) | \, dt \right\} = o (\lambda^{-\frac{1}{2}}).$$

Für $t \geqq \lambda^{-1}$ benutze ich (man vergl. (13))

$$K_\nu \{(\beta + \lambda i) \, t\} = \frac{\sqrt{\pi} \, e^{-\beta t - i \lambda t}}{\{ 2 (\beta + \lambda i) \, t \}^{\frac{1}{2}}} + O \{ (\lambda t)^{-\frac{3}{2}} \} ;$$

mit Hilfe dieser Formel findet man [23])

$$\int_{\lambda^{-1}}^{x-\delta} \frac{K_\nu \{(\beta + \lambda i) \, t\} \, F(t) \, t^{\frac{1}{2}} \, dt}{x^2 - t^2} = \left(\frac{\pi}{2 \beta + 2 \lambda i} \right)^{\frac{1}{2}} \left\{ \int_0^{x-\delta} - \int_0^{\lambda^{-1}} \right\} \frac{e^{-\beta t} \, F(t) \, e^{-i \lambda t} \, dt}{x^2 - t^2}$$

$$+ O \left\{ \lambda^{-\frac{3}{2}} \int_{\lambda^{-1}}^{\lambda^{-\frac{1}{2}}} | F(t) | \, t^{-1} \, dt \right\} + O \left\{ \lambda^{-\frac{3}{2}} \int_{\lambda^{-\frac{1}{2}}}^{x-\delta} | F(t) | \, t^{-1} \, dt \right\}$$

$$= o (\lambda^{-\frac{1}{2}}) + O \left\{ \lambda^{-\frac{1}{2}} \int_{\lambda^{-1}}^{\lambda^{-\frac{1}{2}}} | F(t) | \, dt \right\} + O \left\{ \lambda^{-1} \int_{\lambda^{-\frac{1}{2}}}^{x-\delta} | F(t) | \, dt \right\} = o (\lambda^{-\frac{1}{2}}).$$

---

[23]) Das Integral $\int_0^{x-\delta} \frac{e^{-\beta t} \, F(t) \, e^{-i \lambda t} \, dt}{x^2 - t^2}$ strebt gegen Null für $\lambda \to \infty$ wegen des RIEMANN-LEBESGUEschen Lemmas; man vergl. DOETSCH, [4], 50; TITCHMARSH, [21], 11.

Die beiden Bestandteile des Ausdrucks (46) sind daher $o(\lambda^{-\frac{1}{2}})$. Da wegen (15)

$$(\beta+\lambda i)\, I_{\nu+1}\{(\beta+\lambda i)\, x\} = O(\lambda^{\frac{1}{2}}) \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (47)$$

ist, strebt also U_1 gegen Null für $\lambda \to \infty$.

Genau so zeigt man, dass U_2, U_3 und U_4 dem Grenzwert Null zustreben, womit wegen (45) der Beweis von (38) geliefert ist.

B e w e i s v o n (39). Im Integral

$$\int_{\beta-\lambda i}^{\beta+\lambda i} I_\nu(xs)\,(xs)^{\frac{1}{2}}\, ds \int_{x+\delta}^{\infty} K_\nu(st)\,(st)^{\frac{1}{2}}\, F(t)\, dt$$

darf man die Integrationsfolge vertauschen; für $t > 0$ und $s = \beta + iy$ mit $-\lambda \leqq y \leqq \lambda$ gilt nämlich [24])

$$|\, K_\nu(st)\,(st)^{\frac{1}{2}}\,| \leqq \sqrt{\frac{\pi}{2}}\; e^{-\beta t},$$

so dass das Integral nach t wegen der zweiten Voraussetzung gleichmässig in s konvergiert. Nach der Vertauschung der Integrationsfolge bekommt man (man vergl. (16) und (45))

$$\int_{\beta-\lambda i}^{\beta+\lambda i} I_\nu(xs)\,(xs)^{\frac{1}{2}}\, ds \int_{x+\delta}^{\infty} K_\nu(st)\,(st)^{\frac{1}{2}}\, F(t)\, dt = V_1 + V_2 - V_3 - V_4, \quad (48)$$

falls

$$V_1 = x^{\frac{3}{2}}(\beta+\lambda i)\, I_{\nu+1}\{(\beta+\lambda i)\, x\} \int_{x+\delta}^{\infty} \frac{K_\nu\{(\beta+\lambda i)\, t\}\, F(t)\, t^{\frac{1}{2}}\, dt}{x^2-t^2}$$

und

$$V_2 = x^{\frac{1}{2}}(\beta+\lambda i)\, I_\nu\{(\beta+\lambda i)\, x\} \int_{x+\delta}^{\infty} \frac{K_{\nu+1}\{(\beta+\lambda i)\, t\}\, F(t)\, t^{\frac{3}{2}}\, dt}{x^2-t^2}$$

gesetzt wird und V_3 und V_4 die analogen Ausdrücke mit $\beta - \lambda i$ statt $\beta + \lambda i$ bezeichnen.

Nun hat man für $\lambda \to \infty$ mit Rücksicht auf (13)

$$\int_{x+\delta}^{\infty} \frac{K_\nu\{(\beta+\lambda i)\, t\}\, F(t)\, t^{\frac{1}{2}}\, dt}{x^2-t^2} = \left(\frac{\pi}{2\beta+2\lambda i}\right)^{\frac{1}{2}} \int_{x+\delta}^{\infty} \frac{e^{-\beta t}\, F(t)\, e^{-i\lambda t}\, dt}{x^2-t^2}$$

$$+\, O\left\{\lambda^{-\frac{3}{2}} \int_{x+\delta}^{\infty} e^{-\beta t}\, |\, F(t)\,|\, t^{-1}\, dt\right\} = o(\lambda^{-\frac{1}{2}})$$

wegen des RIEMANN-LEBESGUEschen Lemmas.

---

[24]) Man vergl. Fussnote [3]).

V_1 ist also $o(1)$ (siehe auch (47)). Ebenso zeigt man, dass auch V_2, V_3 und V_4 gegen Null streben für $\lambda \to \infty$, womit wegen (48) der Beweis von (39) erbracht ist.

§ 4. Beweis von Satz 2.

Wegen der Voraussetzung 2 ist

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^b K_\nu(st)(st)^{\frac12}F(t)\,dt &= \frac{1}{\pi i}\int_0^b K_\nu(st)(st)^{\frac12}\,dt \lim_{\lambda\to\infty}\int_{\beta-\lambda i}^{\beta+\lambda i} I_\nu(tz)(tz)^{\frac12}f(z)\,dz \\ &= \frac{1}{\pi i}\lim_{\lambda\to\infty}\int_{\beta-\lambda i}^{\beta+\lambda i} f(z)\,dz\int_0^b K_\nu(st)(st)^{\frac12} I_\nu(tz)(tz)^{\frac12}\,dt \\ = \frac{1}{\pi i}\lim_{\lambda\to\infty}\int_{\beta-\lambda i}^{\beta+\lambda i} &\frac{\{zI_{\nu+1}(zb)(zb)^{\frac12}K_\nu(sb)(sb)^{\frac12}+sI_\nu(zb)(zb)^{\frac12}K_{\nu+1}(sb)(sb)^{\frac12}\}-s^{\frac12-\nu}z^{\frac12+\nu}}{z^2-s^2}f(z)\,dz \end{aligned}\right\} \quad (49)$$

wegen (16).

Nun hat man mit Rücksicht auf (13), (14) und (15) für $\Re(s) > \beta > 0$, $z = \beta + iy$ und $b \geqq 1$

$$|K_\nu(sb)(sb)^{\frac12}| < De^{-\beta b}, \quad |K_{\nu+1}(sb)(sb)^{\frac12}| < De^{-\beta b},$$

$$|I_\nu(zb)(zb)^{\frac12}| < De^{\beta b}, \quad |I_{\nu+1}(zb)(zb)^{\frac12}| < De^{\beta b},$$

wo D unabhängig von b ist; es gilt daher

$$|zI_{\nu+1}(zb)(zb)^{\frac12}K_\nu(sb)(sb)^{\frac12}+sI_\nu(zb)(zb)^{\frac12}K_{\nu+1}(sb)(sb)^{\frac12}| < D^2(|z|+|s|).$$

Der Integrand auf der rechten Seite von (49) ist also [25]) absolut genommen $< \dfrac{E\,|f(z)|}{|z|}$ für alle Werte von $z = \beta + iy$ mit $|y| \geqq L$; hierin sind E und L nicht von b abhängig.

Das auf der rechten Seite von (49) stehende Integral ist daher mit Rücksicht auf der dritten Voraussetzung für alle Werte von $b \geqq 1$ gleichmässig in b konvergent, so dass man b unter dem Integralzeichen gegen ∞ streben lassen darf. Das Resultat wird wegen (13), (14) und (15), da $\Re(s) > \beta$ ist,

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty K_\nu(st)(st)^{\frac12}F(t)\,dt = \frac{s^{\frac12-\nu}}{\pi i}\lim_{\lambda\to\infty}\int_{\beta-\lambda i}^{\beta+\lambda i}\frac{z^{\frac12+\nu}f(z)\,dz}{s^2-z^2} \quad . \; . \; . \quad (50)$$

Ich betrachte nun das Integral

$$\frac{s^{\frac12-\nu}}{\pi i}\int\frac{z^{\frac12+\nu}f(z)\,dz}{z^2-s^2},$$

25) Man beachte auch, dass $\Re(\nu) \leqq \frac12$ ist.

im positiven Sinne erstreckt über den Rand des Rechtecks mit den Ecken $\beta+\lambda i$, $\beta-\lambda i$, $\lambda-\lambda i$, $\lambda+\lambda i$. Nach dem Residuensatze besitzt dieses Integral für hinreichend grosses λ den Wert $f(s)$.

Nun kann man beweisen [26]) unter Benutzung der vierten und fünften Voraussetzung, dass die auf die Seiten $(\lambda-\lambda i, \lambda+\lambda i)$, $(\lambda+\lambda i, \beta+\lambda i)$ und $(\beta-\lambda i, \lambda-\lambda i)$ bezüglichen Integrale gegen Null streben für $\lambda \to \infty$.

Die rechte Seite von (50) hat daher den Wert $f(s)$, womit der Beweis von Satz 2 geliefert ist.

§ 5. Schlussbemerkung.

Verschiedene Spezialfälle der Relationen (8) und (9) kommen vor in meinen früheren Arbeiten. Ich werde fünf Beispiele anführen:

Erstes Beispiel [27]):

$$H_\nu^{(1)}(z)\,H_\nu^{(2)}(z)=\frac{8z}{\pi}\int_0^\infty K_{2m}(2zu)\,P_{\nu-\frac12}^{m}(\sqrt{1+u^2})\,P_{\nu-\frac12}^{-m}(\sqrt{1+u^2})\,u\,du$$
$$[|\arg z|<\tfrac12\pi;\ |\Re(m)|<1],$$

$$P_{\nu-\frac12}^{m}(\sqrt{1+u^2})\,P_{\nu-\frac12}^{-m}(\sqrt{1+u^2})=\frac{1}{2i}\int_{\beta-\infty i}^{\beta+\infty i} I_{2m}(2uz)\,H_\nu^{(1)}(z)\,H_\nu^{(2)}(z)\,dz \qquad [u>0].$$

Zweites Beispiel [28]):

$$\left.\begin{aligned}P_{\nu-\frac12}^{m}(\sqrt{1+z^2})\,P_{\nu-\frac12}^{-m}(\sqrt{1+z^2})&=\frac{4\cos\nu\pi}{\pi}\int_0^{\infty e^{-i\arg z}} K_{2\nu}(2v)\,J_m(zv)\,J_{-m}(zv)\,dv\\ &[|\arg z|<\tfrac12\pi;\ |\Re(\nu)|<\tfrac12],\end{aligned}\right\}\tag{51}$$

$$\left.\begin{aligned}J_m(\zeta)\,J_{-m}(\zeta)&=\frac{1}{i\cos\nu\pi}\int_{\beta-\infty i}^{\beta+\infty i} I_{2\nu}(2v)\,P_{\nu-\frac12}^{m}\left(\sqrt{1+\frac{\zeta^2}{v^2}}\right)P_{\nu-\frac12}^{-m}\left(\sqrt{1+\frac{\zeta^2}{v^2}}\right)dv\\ &[\zeta>0;\ \nu\neq\pm\tfrac12,\pm\tfrac32,\pm\tfrac52,\ldots].\end{aligned}\right\}\tag{52}$$

---

26) Man vergl. einen analogen Beweis in dem entsprechenden DOETSCH-CHURCHILLschen Satz; DOETSCH, [4], 127—128; CHURCHILL, [3], 570—571.

27) [14], Formel (76) und [11], Formel (24).

28) [13], Formel (12) und [10], Formel (19).

(51) und (52) gehen über in Formeln der Gestalt (8) und (9), wenn man $z=\dfrac{1}{s}$ und $v=\frac12 st$ substituiert in (51) und überdies ζ durch $\frac12 t$ und v durch $\frac12 ts$ ersetzt in (52).

Drittes Beispiel [29]):

$$K_{2m}(z\,e^{\frac{1}{4}\pi i})\,K_{2m}(z\,e^{-\frac{1}{4}\pi i})=\frac{1}{z^2}\int\limits_0^{\infty e^{2i\arg z}} K_{2k}(v)\,W_{k,m}\left(\frac{z^2}{2v}\right)W_{-k,m}\left(\frac{z^2}{2v}\right)v\,dv, \tag{53}$$

$$W_{k,m}(\tfrac{1}{2}\zeta)\,W_{-k,m}(\tfrac{1}{2}\zeta)=\frac{\zeta}{\pi i}\int\limits_{\beta-\infty i}^{\beta+\infty i} I_{2k}(v)\,K_{2m}(\zeta^{\frac{1}{2}}v^{\frac{1}{2}}e^{\frac{1}{4}\pi i})\,K_{2m}(\zeta^{\frac{1}{2}}v^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{4}\pi i})\,dv. \tag{54}$$

Viertes Beispiel [30]):

$$G_{0,4}^{4,0}(\tfrac{1}{16}s^2\mid a,q,\tfrac{1}{2}\nu,-\tfrac{1}{2}\nu)=2^{3-a-q}s^{a+q}\int\limits_0^{\infty}K_{a-q}(st)\,K_\nu\left(\frac{1}{t}\right)t^{a+q-1}\,dt, \tag{55}$$

$$K_\nu\left(\frac{1}{t}\right)=\frac{2^{a+q-3}t^{2-a-q}}{\pi i}\int\limits_{\beta-\infty i}^{\beta+\infty i}I_{a-q}(ts)\,G_{0,4}^{4,0}(\tfrac{1}{16}s^2\mid a,q,\tfrac{1}{2}\nu,-\tfrac{1}{2}\nu)\,s^{1-a-q}\,ds. \tag{56}$$

Das fünfte Beispiel [31]) ist ein Spezialfall des vierten ($a=\frac{1}{2}\nu+\frac{1}{2}$, $q=-\frac{1}{2}\nu+\frac{1}{2}$)

$$K_{2\nu}(2s^{\frac{1}{2}})=\frac{s}{\pi}\int\limits_0^{\infty}K_\nu(st)\,K_\nu\left(\frac{1}{t}\right)dt, \quad \ldots\ldots \tag{57}$$

$$K_\nu\left(\frac{1}{t}\right)=\frac{t}{i}\int\limits_{\beta-\infty i}^{\beta+\infty i}I_\nu(ts)\,K_{2\nu}(2s^{\frac{1}{2}})\,ds. \quad \ldots\ldots \tag{58}$$

---

29) **[12]**, 26 und **[9]**, 875, Formel (12). In (53) ist $|\arg z|<\frac{1}{4}\pi$; (54) gilt für $|\arg\zeta|<\frac{1}{2}\pi$.

30) **[12]**, 24, Satz 8 und **[15]**, Formel (5). Für die Definition der Funktion $G_{0,4}^{4,0}$ vergl. man **[12]**, Formel (6). In (55) und (57) ist $|\arg s|<\frac{1}{2}\pi$; in (56) und (58) wird $t>0$ vorausgesetzt.

31) Man vergl. HARDY, **[7]**, Formel (4. 1) und MEIJER, **[15]**, Formel (35).