Mathematics. — *Ueber affine Invarianten bei quadratischen Formen.* Von O. BOTTEMA. (Communicated by Prof. R. WEITZENBÖCK.)

(Communicated at the meeting of June 29, 1940.)

1. In zwei in diesen Proceedings erschienenen Arbeiten hat WEITZENBÖCK [1]) die Invarianten einer quadratischen Form und einer Linearform bei der speziellen affinen Gruppe bzw. in der Ebene und in R_3 untersucht und einige geometrische Anwendungen gegeben.

Wir machen im Folgenden einige Bemerkungen über die von WEITZENBÖCK gebildeten absoluten Invarianten und über die von ihm für $n=2$ und $n=3$ gelöste geometrische Frage, welche wir für allgemeines n erledigen.

Wir beschränken uns dabei vorläufig auf den Fall der Ebene. WEITZENBÖCK zeigt dass eine ternäre quadratische Form und eine lineare Form in homogenen Punktkoordinaten $x_1 : x_2 : x_3$,

$$f = \Sigma a_{ik} x_i x_k \ , \ (v' x) = \Sigma v'_i x_i \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

ein kleinstes volles System von ganz-rationalen affinen Invarianten besitzen das aus fünf Bildungen besteht, welche nicht-symbolisch geschrieben folgendermassen aussehen:

$$\left.\begin{array}{ll} D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & C = a_{11}\, a_{22} - a_{12}^2 \\ \Phi = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & v'_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & v'_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & v'_3 \\ v'_1 & v'_2 & v'_3 & 0 \end{vmatrix} & U = a_{11}\, v_1'^2 - 2\, a_{12}\, v'_1\, v'_2 + a_{22}\, v_2'^2 \\ \multicolumn{2}{l}{M = v'_1 (a_{12}\, a_{23} - a_{13}\, a_{22}) + v'_2 (a_{13}\, a_{12} - a_{11}\, a_{23}) + v'_3 (a_{11}\, a_{22} - a_{12}^2).} \end{array}\right\} \quad . \quad (2)$$

Zwischen diesen Komitanten besteht eine einzige Syzygie

$$C\,\Phi = D\,U + M^2 . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Auf Grund dieser Gleichung wird nun bei der Bestimmung der absoluten Invarianten D fortgelassen. WEITZENBÖCK bildet die absoluten Invarianten

$$\alpha = \frac{M^2}{C\,\Phi} \quad , \quad \beta = \frac{C\,U^2}{\Phi^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

---

[1]) WEITZENBÖCK, Ueber affine Invarianten bei Kegelschnitten, Proc. Kon. Ned. Akad. v. Wetensch., Amsterdam, **43**, 159—167; Zur Affingeometrie der F_2 in R_3, 168—178, (1940).

und gibt eine geometrische Deutung der Invarianten R und S, welchen den Bedingungen

$$R^2 = \frac{-1}{\alpha\beta} \quad , \quad S^2 = \frac{-\alpha}{\beta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

genügen.

2. Wir möchten nun den Invarianten α und β ein anderes Paar von absoluten Invarianten gegenüberstellen, durch die ebenfalls alle weiteren absoluten Invarianten ausdrückbar sind und welche invariantentheoretisch einen gewissen Vorzug haben.

Wenn wir statt D die Komitante U ausser Acht lassen, so gibt der Ansatz

$$J = D^{a_1} C^{a_2} \Phi^{a_3} M^{a_4}$$

da J vom Grade Null in den Koeffizienten a_{ik} und in den Linienkoordinaten v_i' sein muss, für die Exponenten die Gleichungen

$$3a_1 + 2a_2 + 2a_3 + 2a_4 = 0 \quad , \quad 2a_3 + a_4 = 0$$

woraus

$$a_4 = -2a_3 \quad , \quad a_2 = -\tfrac{3}{2}a_1 + a_3$$

also

$$J = (D C^{-\frac{3}{2}})^{a_1} (C \Phi M^{-2})^{a_3}$$

folgt.
Es sind also

$$k = D^2 C^{-3} \quad , \quad l = C \Phi M^{-2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

ebenfalls zwei unabhängige rationale absolute Invarianten. Den Zusammenhang mit α und β zeigen folgende Gleichungen:

$$k = \frac{(1-\alpha)^2}{\beta} \quad , \quad l = \frac{1}{\alpha} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

und

$$a = \frac{1}{l} \quad , \quad \beta = \frac{(l-1)^2}{k l^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Die Invarianten k bzw. l haben nun folgende Eigenschaften: die für das aus einer quadratischen Form und einer Linearform gebildete System

abgeleitete absolute Invariante k der speziellen affinen Gruppe, ist auch eine absolute Invariante für die quadratische Form allein; die für das aus einer quadratischen Form und einer Linearform gebildete System abgeleitete absolute Invariante l der speziellen affinen Gruppe, ist auch eine absolute Invariante der allgemeinen affinen Gruppe.

Die erste Eigenschaft folgt unmittelbar aus der Definition von k; in D^2C^{-3} treten nur die Koeffizienten der quadratischen Form auf.

Die zweite Eigenschaft geht hervor aus der Bemerkung, dass C, Φ und M Invarianten der allgemeinen affinen Gruppe sind und je das Gewicht 2 haben; $C\Phi M^{-2}$ ist also eine absolute Invariante dieser Gruppe. Man zeigt leicht, dass sie die einzige absolute Invariante ist.

Was die WEITZENBÖCKschen Invarianten betrifft, so ist offenbar α eine absolute Invariante gegenüber der allgemeinen affinen Gruppe, während β, R und S diese Eigenschaft nicht zukommt.

Von den Invarianten R und S hat WEITZENBÖCK eine geometrische Deutung gegeben. Wir geben eine solche von k und l (und also von α).

Was k betrifft, die eine absolute, speziell-affine Invariante des durch $f=0$ dargestellten Kegelschnittes ist, so zeigt man leicht:

$$k=\varrho^3 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

wo ϱ der affine Krümmungshalbmesser des Kegelschnittes ist, also der reziproke Wert der Affinkrümmung [2]). Für $k>0$, $k=0$, $k<0$ ist der Kegelschnitt bzw. eine Ellipse, eine Parabel, eine Hyperbel. Im ersten Fall hat man z.B. noch die einfache Deutung [3])

$$k=\left(\frac{F}{\pi}\right)^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

wo F den Flächeninhalt der Ellipse bedeutet; auch bei der Hyperbel könnte man eine analoge Bedeutung angeben.

Was die zweite Invariante l betrifft, wollen wir eine geometrische Bedeutung angeben nicht von l selbst, sondern von dem Ausdruck

$$l'=\frac{l}{l-1}=\frac{C\Phi}{C\Phi-M^2}=\frac{C\Phi}{DU} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

welche von WEITZENBÖCK in der 2. Arbeit genannt und mit δ bezeichnet worden ist (S. 170). Wir gehen dabei folgendermassen vor.

Die Schnittpunkte P und Q des Kegelschnittes $f=0$ und der Geraden

$$v_1' x_1 + v_2' x_2 + v_3' x_3 = 0$$

---

[2]) BLASCHKE, Differentialgeometrie, II, S. 18 (1923).

[3]) BLASCHKE, l.c. S. 18.

haben bzw. die Koordinaten (p_1, p_2, p_3) und (q_1, q_2, q_3). Wenn wir aus $f = 0$ und $(v'x) = 0$ die Koordinate x_2 mittels

$$x_2 = \frac{-v_1' x_1 - v_3' x_3}{v_2'}$$

eliminieren, so entsteht eine quadratische Gleichung für $x = \frac{x_1}{x_3}$, welche so aussieht:

$$\left.\begin{aligned} U x^2 + 2x(-a_{23} v_1' v_2' + a_{22} v_1' v_3' + a_{13} v_2'^2 - a_{12} v_2' v_3') + \\ + (a_{33} v_2' - 2 a_{23} v_2' v_3' + a_{22} v_3'^2) = 0. \end{aligned}\right\} \quad . \quad (12)$$

Die Wurzeln dieser Gleichung sind offenbar $\frac{p_1}{p_3}$ und $\frac{q_1}{q_3}$. Nun ist die Diskriminante $\triangle$ dieser Gleichung Null, wenn die Gerade $(v'x) = 0$ den Kegelschnitt berührt, das heisst wenn $\Phi = 0$; Φ ist also ein Faktor von $\triangle$ und man findet leicht

$$\triangle = - v_2'^2 \Phi. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

Für das Quadrat der Wurzeldifferenz hat man also:

$$\left(\frac{p_1}{p_3} - \frac{q_1}{q_3}\right)^2 = \frac{-4 v_2'^2 \Phi}{U^2}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

Wir betrachten jetzt die mit $(v'x) = 0$ parallele Gerade, welche durch den Mittelpunkt des Kegelschnittes geht. Sie hat die Gleichung

$$v_1' x_1 + v_2' x_2 + v_3' (1 + p) x_3 = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

Die Schnittpunkte dieser Geraden mit dem Kegelschnitt werden mit $A \equiv (a_1, a_2, a_3)$ und $B \equiv (b_1, b_2, b_3)$ bezeichnet. Man hat also

$$\left(\frac{a_1}{a_3} - \frac{b_1}{b_3}\right)^2 = \frac{-4 v_2'^2 \Phi_1}{U_1^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

wenn Φ_1 und U_1 die Funktionen sind, welche man erhält indem man in Φ und U die Variabele v_3' durch $(1 + p) v_3'$ ersetzt. Diese Substitution gibt uns aber:

$$U_1 = U \quad , \quad \Phi_1 = \Phi + 2 p v_3' M + p^2 v_3' C \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

während die Bedingung, dasz die parallele Gerade durch den Mittelpunkt gehe die Gleichung

$$M + p v_3' C = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

ergibt. Wir haben also

$$\Phi_1 = \Phi - \frac{M^2}{C} = \frac{D U}{C} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

Aus (14), (16) und (19) geht nun hervor:

$$\frac{\left(\frac{p_1}{p_3}-\frac{q_1}{q_3}\right)^2}{\left(\frac{a_1}{a_3}-\frac{b_1}{b_3}\right)^2}=\frac{\Phi}{\Phi_1}=\frac{C\Phi}{DU}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

Wir finden somit:

Sind P und Q die Schnittpunkte der Geraden $(v'x)=0$ und des Kegelschnittes $f=0$, A und B die Schnittpunkte des Kegelschnittes und der mit $(v'x)=0$ parallelen Geraden durch den Mittelpunkt des Kegelschnittes, so ist

$$l'=\left(\frac{PQ}{AB}\right)^2. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

Das Quadrat eines Streckenverhältnisses auf parallelen (oder zusammenfallenden) Geraden ist augenscheinlich eine absolute Invariante für die Gruppe der allgemeinen Affinitäten. Die abgeleiteten Eigenschaften sind offenbar gültig für jeden Mittelpunktskegelschnitt.

3. Ist $f=0$ eine reelle Ellipse, die von der Geraden $(v'x)=0$ in zwei reellen Punkten geschnitten wird, so zerteilt die Gerade die Ellipse in zwei Segmente. WEITZENBÖCK hat gezeigt, wie sich die Flächeninhalte F' und F'' in den absoluten affinen Invarianten ausdrücken lassen. Die Berechnung kann man vereinfachen, indem man die Figur auf ein geeignet gewähltes Koordinatensystem bezieht.

Wird der Ursprung im Mittelpunkt der Ellipse genommen, die x_1-Achse mit der Geraden $(v'x)=0$ parallel und ist die x_2-Achse im Bezug auf die Ellipse mit der x_1-Achse konjugiert, so erhalten die Ellipse und die Gerade, nachdem man noch eine geeignete speziell-affine Transformation ausführt, die Gleichungen:

$$x_1^2+x_2^2-R^2x_3^2=0 \quad , \quad x_2-p\,x_3=0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

Man hat dann:

$$D=-R^2\ ,\ C=1\ ,\ \Phi=-(R^2-p^2)\ ,\ M=-p\ ,\ U=1$$

und also:

$$k=R^4\ ,\ l=\frac{p^2-R^2}{p^2}\ ,\ l'=\frac{R^2-p^2}{R^2}$$

womit die angegebene Deutung der Invariante l' bestätigt wird. Führte man eine euklidische Massbestimmung ein, wobei die isotropen Punkte in den uneigentlichen Punkten der Ellipse gewählt werden, so hätte man

$$l'=\sin^2\alpha\ ,\ l=-\operatorname{tg}^2\alpha$$

wo 2α einer der Bogen PQ der nun zum Kreis gewordenen Ellipse ist. Die genannten Flächeninhalte kann man jetzt elementargeometrisch bestimmen. Für das (allgemein affin-invariante) Verhältnis dieser Zahlen findet man:

$$\left.\begin{aligned} F' : F'' &= \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,cotg}\sqrt{-l} - \frac{\sqrt{-l}}{l-1}\right) : \left(\frac{\pi}{2} + \operatorname{arc\,cotg}\sqrt{-l} + \frac{\sqrt{-l}}{l-1}\right) \\ &= \left(\frac{\pi}{2} - \arccos\sqrt{l'} - \sqrt{l'(1-l')}\right) : \left(\frac{\pi}{2} + \arccos\sqrt{l'} + \sqrt{l'(1-l')}\right) \end{aligned}\right\} \quad (23)$$

während

$$F' + F'' = \pi\sqrt{k} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

Mittels (5) und (8) werden die WEITZENBÖCKschen Resultate zurückgewonnen [4]). Auch die für die Parabel und die Hyperbel gegebenen Formeln können mit der Methode des kanonischen Koordinatensystems abgeleitet werden.

4. Die oben gewonnenen Eigenschaften kann man auf den Raum von n Dimensionen übertragen. In R_n haben eine quadratische Form $f = \sum_{i,k=1}^{n+1} a_{ik}\, x_i\, x_k$ und eine Linearform $(v'x) = \sum_{i=1}^{n+1} v'_i\, x_i$ folgende fünf Komitanten:

$$\left.\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,n+1} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n+1,1} & a_{n+1,2} & \dots & a_{n+1,n+1} \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ \Phi &= -\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,n+1} & v'_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & v'_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n+1,1} & \dots & a_{n+1,n+1} & v'_{n+1} \\ v'_1 & v'_2 & \dots & v'_{n+1} \quad 0 \end{vmatrix}, \quad M = -\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,n+1} & v'_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & v'_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n+1,1} & \dots & a_{n+1,n+1} & v'_{n+1} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} \\ U &= -\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & v'_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & v'_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & v'_n \\ v'_1 & \dots & v'_n & 0 \end{vmatrix} \end{aligned}\right\} \quad (25)$$

welche der Bedingung $C\Phi = M^2 + DU$ genügen.

---

[4]) S. 166 steht im letzten Glied von (32) $\sqrt{\frac{R}{S}}$ statt $\sqrt{\frac{S}{R}}$.

Als absolute Invarianten kann man wählen

$$k_n = D^n C^{-(n+1)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

und $l_n = \frac{C\Phi}{M^2}$ oder

$$l_n' = \frac{l_n}{l_n - 1} = \frac{C\Phi}{DU} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

k_n ist dabei wieder eine Invariante nur von f; l_n bzw. l_n' sind Invarianten für die allgemeine affine Gruppe. k_n hängt für ein Hyperellipsoid in einfacher Weise mit dem Volumen F_n zusammen. Wie man leicht nachgeht hat man [5])

$$\left.\begin{aligned} k_{2m} &= (m!)^2 \pi^{-2m} F_{2m}^2 \\ k_{2m+1} &= -1^2 . 3^2 . 5^2 \ldots . (2m+1)^2 . 4^{-m-1} \pi^{-2m} F_{2m+1}^2 \end{aligned}\right\} \quad . \quad (28)$$

Die Invariante l' hat eine geometrische Bedeutung, welche mit der für den Fall $n = 2$ gefundenen analog ist. Ist $f = 0$ ein Hyperellipsoid, aus welchem $(v'x) = 0$ die quadratische Varietät V ($(n-2)$-ter Dimension) und der mit $(v'x) = 0$ paralleler Raum durch den Mittelpunkt die quadratische Varietät V_1 ausschneidet, so sind V und V_1 homothetische Figuren; die Homothetie ist bekanntlich ein für die allgemeine affine Gruppe invarianter Begriff. Die Homothetie-Zentren liegen auf demjenigen Durchmesser des Ellipsoids, welcher mit $(v'x) = 0$ konjugiert ist. Sind g bzw. $-g$ die Faktoren derjenigen Homothetien, welche V_1 in V überführen, so ist

$$l' = g^2 . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$

Der Beweis dieser Behauptung kann man, wenn man auf die Benutzung eines bestimmten Koordinatensystems verzichten will, in einer Weise führen, welche mit der von uns für $n = 2$ gegeben wesentlich übereinstimmt. Wählt man ein geeignetes Koordinatensystem, so hat man für f und $(v'x)$ bzw. folgende Formen:

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots . x_n^2 - R^2 x_{n+1}^2 \quad \text{und} \quad x_n - p x_{n+1}$$

woraus hervorgeht

$$D = -R^2, C = 1, \Phi = p^2 - R^2, M = p, U = 1, k = (-1)^n R^{2n}, l' = \frac{R^2 - p^2}{R^2}$$

---

[5]) Für $n = 3$ BLASCHKE, l.c. S. 112.

Die Volumen F'_n und F''_n der beiden Teile, worin das Ellipsoid von dem Raum $(v'x) = 0$ zerteilt wird, können mittels bekannter Formeln für das Volumen eines Hyperkugelsegmentes [6]) niedergeschrieben werden.

Für $n = 3$ hat man im Besonderen:

$$\left.\begin{aligned} F'_3 : F''_3 &= \{2-(2+l')\sqrt{1-l'}\} : \{2+(2+l')\sqrt{1-l'}\} \\ F'_3 + F''_3 &= \tfrac{4}{3}\pi\sqrt{-k} \end{aligned}\right\} \quad . \quad (30)$$

welche Resultate mit den WEITZENBÖCKschen (S. 177, (25) und (26)) nach einer Substitution übereinstimmen.

[6]) SCHOUTE, Mehrdimensionale Geometrie II, S. 290 (1905).