Mathematics. — *Ueber algebraische Systeme von partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung.* II. *Gleichungen mit einer Unbekannten.*

Beweis des Existenz theorems.

Von J. A. SCHOUTEN und W. VAN DER KULK.

(Communicated at the meeting of October 26, 1940.)

6. *Regularität der Gleichungen einer irreduzibelen algebraischen Mannigfaltigkeit in einem einzigen Punkt.*

Bekanntlich nennt man d die Dimension einer irreduzibelen algebraischen Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$, wenn d der $n-1$ Verhältnisse der Koordinaten $w_1 \ldots, w_n$ eines allgemeinen Punktes algebraisch unabhängig sind i.b. auf den Körper der meromorphen Funktionen der $x^\varkappa$ und die übrigen $n-1-d$ sich algebraisch i.b. auf diesen Körper in diese d ausdrücken lassen [1]). Bilden die Tensoren $\underset{i}{P}^{\mu\lambda_1\ldots\lambda_{a_i}}$, $i=1,\ldots,\mathrm{N}$ eine Basis des zugehörigen Ideals von $\mathfrak{M}$, so sind

$$G_i(x^\varkappa, w_\lambda) \overset{\text{def}}{=} \underset{i}{P}^{\mu\lambda_1\ldots\lambda_{a_i}} w_\mu w_{\lambda_1} \ldots w_{\lambda_{a_i}} = 0; \; i=1,\ldots,\mathrm{N} \quad \varkappa,\lambda=1,\ldots,n \quad (1)$$

die Gleichungen von $\mathfrak{M}$. Ist nun $w_\lambda = \overset{0}{w}_\lambda$ in $x^\varkappa = \underset{0}{x}^\varkappa$ ein zu $\mathfrak{M}$ gehöriger Vektor und schreiben wir

$$G_i^\varkappa(w_\lambda) \overset{\text{def}}{=} \left(\frac{\partial G_i}{\partial w_\varkappa}\right)_{x^\mu = \underset{0}{x}^\mu} \quad ; \quad i=1,\ldots,\mathrm{N}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

so bestimmen die Gleichungen

$$G_i^\varkappa(\overset{0}{w}_\lambda)\, w_\varkappa = 0 \quad ; \quad i=1,\ldots,\mathrm{N} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

in der lokalen P_{n-1} von $\underset{0}{x}^\varkappa$ eine ebene Mannigfaltigkeit. Ist die Dimension derselben d, d.h. gibt es unter den N Hyperebenen (3) genau $n-1-d$ linear unabhängige, so nennen wir sie den *Tangentialraum* von $\mathfrak{M}$ in $\underset{0}{x}^\varkappa$, $\overset{0}{w}_\lambda$ [2]).

Wir beweisen jetzt den

---

1) Vgl. E.a.G., S 112.

2) Vgl. E.a.G., S. 171.

Satz: *Besitzt eine d-dimensionale irreduzibele algebraische Mannigfaltigkeit* $\mathfrak{M}$ *in* $\underset{0}{x^\varkappa}$, $\overset{0}{w_\lambda}$ *einen Tangentialraum, so lassen sich* $n-1-d$ *der* $n-1$ *Verhältnisse der* w_λ *in der Umgebung von* $\underset{0}{x^\varkappa}$, $\overset{0}{w_\lambda}$ *schreiben als analytische Funktionen der* $x^\varkappa$ *und der* d *übrigen.*

Beweis: Da ein Tangentialraum existiert, hat die Matrix von $G_i^\varkappa(\overset{0}{w_\lambda})$ den Rang $n-1-d$. Durch Umnumerieren kann man also stets erreichen, dass die Determinante von $G_j^\gamma(\overset{0}{w_\lambda})$; $\gamma = d+2, \ldots, n$; $j = 1, \ldots, n-1-d$ nicht verschwindet. Aus der Homogenität der Gleichungen (1) in w_λ folgt

$$\overset{0}{w_\lambda}\, G_j^\lambda(\overset{0}{w_\mu}) = (a_j + 1)\, G_j(\underset{0}{x^\varkappa}, \overset{0}{w_\lambda}) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Wären nun $\overset{0}{w_1}, \ldots, \overset{0}{w_{d+1}}$ alle gleich Null, so würde aus (4) folgen

$$\overset{0}{w_\gamma}\, G_j^\gamma(\overset{0}{w_\lambda}) = 0 \;;\; \gamma = d+2, \ldots, n \;;\; j = 1, \ldots, n-1-d \quad . \quad . \quad (5)$$

und dies ist nicht möglich, da $G_j^\gamma(\overset{0}{w_\lambda})$ den Rang $n-1-d$ hat und $\overset{0}{w_{d+2}}, \ldots, \overset{0}{w_n}$ nicht alle zugleich Null sein können da sonst w_λ Null wäre. Durch Umnumerieren kann man also stets erreichen, dass *gleichzeitig* $\overset{0}{w_1} \neq 0$ ist und Det $(G_j^\gamma(\overset{0}{w_\lambda})) \neq 0$ ist.

Wir schreiben jetzt $\omega_2, \ldots, \omega_n$ für die Verhältnisse $\frac{w_2}{w_1}, \ldots, \frac{w_n}{w_1}$ und

$$H_j(x^\varkappa, \omega_\beta) \overset{\text{def}}{=} G_j(x^\varkappa, 1, \omega_\beta) \;;\; \beta = 2, \ldots, n \;;\; j = 1, \ldots, n-1-d. \quad (6)$$

Dann ist

$$\frac{\partial H_j}{\partial \omega_\beta} = \frac{1}{w^{a_j}} \frac{\partial G_j}{\partial w_\beta} \quad ; \quad \beta = 2, \ldots, n \quad j = 1, \ldots, n-1-d. \quad . \quad (7)$$

Daraus folgt, dass in $\underset{0}{x^\varkappa}$, Det $\left(\frac{\partial H_j}{\partial \omega_\gamma}\right)$ für $\omega_\beta = \frac{\overset{0}{w_\beta}}{\overset{0}{w_1}}$ nicht verschwindet. Aus den Gleichungen

$$H_j(x^\varkappa, \omega_\beta) = 0 \;;\; \beta = 2, \ldots, n \;;\; j = 1, \ldots, n-1-d \quad . \quad . \quad (8)$$

lassen sich also nach der Theorie der Funktionaldeterminanten $\omega_{d+2}, \ldots, \omega_n$ in einer Umgebung von $\underset{0}{x^\varkappa}$, $\overset{0}{\omega_\beta}$ als analytische Funktionen von $x^\varkappa, \omega_2, \ldots, \omega_{d+1}$ lösen

$$\left.\begin{array}{l} \omega_{d+2} = f_{d+2}(x^\varkappa, \omega_\varepsilon) \\ \vdots \qquad \vdots \\ \omega_n \quad = f_n \quad (x^\varkappa, \omega_\varepsilon) \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} \varepsilon = 2, \ldots, d+1 \\ \varkappa = 1, \ldots, n \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Diese Gleichungen stellen nun einen allgemeinen Punkt einer irreduzibelen d-dimensionalen algebraischen Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}'$ dar [3]). Die Punkte von $\mathfrak{M}$ erfüllen aber (8), also auch (9), d.h. es ist $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{M}'$. Da aber $\mathfrak{M}$ ebenfalls irreduzibel und d-dimensional ist, ist $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}'$ [3a]). $\mathfrak{M}$ lässt sich also in der Umgebung von $\underset{0}{x}^{\varkappa}, \overset{0}{w}_{\beta}$ durch ein System von Gleichungen der Form (9) mit in dieser Umgebung analytischen Funktionen der $x^{\varkappa}$ und ω_{ε}, $\varepsilon = 2, \ldots, d+1$, darstellen, w.z.b.w.

In jedem Punkte $\underset{0}{x}^{\varkappa}, \overset{0}{w}_{\lambda}$, wo ein Tangentialraum existiert, lässt sich aus $G_j^{\varkappa}(\overset{0}{w}_{\lambda})$ (bis auf einen skalaren Faktor) ein einfacher kontravarianter $(n-1-d)$-Vektor konstruieren

$$u^{\varkappa_{d+2} \cdots \varkappa_n} = \{ G_1^{[\varkappa_{d+2}} \ldots G_{n-1-d}^{\varkappa_n]} \}_{w_\lambda = \overset{0}{w}_\lambda}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

den wir den Tangential $(n-1-d)$-Vektor in $\underset{0}{x}^{\varkappa}, \overset{0}{w}_{\lambda}$ nennen. Wir können das erhaltene Resultat also auch folgendermassen aussprechen:

Besitzt $\mathfrak{M}$ in $\underset{0}{x}^{\varkappa}, \overset{0}{w}_{\lambda}$ einen Tangentialraum, und ist daselbst die Bestimmungszahl $u^{d+2 \ldots n}$ ungleich Null, so sind $\overset{0}{w}_1, \ldots, \overset{0}{w}_{d+1}$ nicht alle zugleich Null. Ist z.B. $w_1 \neq 0$, so lässt sich $\mathfrak{M}$ in der Umgebung von $\underset{0}{x}^{\varkappa}, \overset{0}{w}_{\lambda}$ durch (9) darstellen.

Es ist noch zu bemerken, dass $\mathfrak{M}$ in der Umgebung von $\underset{0}{x}^{\varkappa}, \overset{0}{w}_{\lambda}$ der vollständige Durchschnitt ist der $n-d-1$ algebraischen Hyperflächen (8), deren Tangentialräume in $\underset{0}{x}^{\varkappa}, \overset{0}{w}_{\lambda}$ linear unabhängig sind, da $\dfrac{\partial H_j}{\partial w_\beta}$ den höchsten Rang $n-d-1$ hat.

7. *Das Existenztheorem.*

Wir beweisen jetzt das

Existenztheorem: Ist $\mathfrak{M}$ eine d-dimensionale vollständige irreduzibele algebraische Mannigfaltigkeit, $\underset{0}{x}^{\varkappa}$ ein Punkt wo auch die lokale zu $\mathfrak{M}$ gehörige algebraische Mannigfaltigkeit irreduzibel ist und $\overset{0}{w}_{\lambda}$ ein zu $\mathfrak{M}$ gehöriger Vektor in $\underset{0}{x}^{\varkappa}$, während $\mathfrak{M}$ in $\underset{0}{x}^{\varkappa}, \overset{0}{w}_{\lambda}$ einen Tangentialraum besitzt, so existiert mindestens ein in der Umgebung von $\underset{0}{x}^{\varkappa}$ analytisches zu $\mathfrak{M}$ gehöriges Gradientfeld $\partial_{\lambda} s$, dessen Feldwert in $\underset{0}{x}^{\varkappa}$ mit $\overset{0}{w}_{\lambda}$ zusammenfällt.

---

[3]) Vgl. E. a. G. § 29.

[3a]) Vgl. E. a. G. S. 112.

Beweis.

Das Koordinatensystem sei so gewäht, dass der Massvektor $\overset{n}{e}_\lambda$ nicht zu $\mathfrak{M}$ gehört, in $\underset{0}{x}^\nu$ weder mit $\overset{0}{w}_\lambda$ zusammenfällt noch in dem zu $\underset{0}{x}^\nu, \overset{0}{w}_\lambda$ gehörigen Tangentialraum liegt, während für $d < n-2$ ausserdem die in $\underset{0}{x}^\nu$ durch $\overset{0}{w}_\lambda$ und $\overset{n}{e}_\lambda$ gelegte Verbindingsgerade ausser $\overset{0}{w}_\lambda$ keinen einzigen Punkt mit $\mathfrak{M}$ gemeinschaftlich hat. Für den Tangential-$(n-1-d)$-Vektor $u^{\nu_{d+2}\cdots\nu_n}$ in $\underset{0}{x}^\nu, \overset{0}{w}_\lambda$ gilt also

$$u^{\nu_{d+2}\cdots\nu_n}\,\overset{n}{e}_{\nu_n} \neq 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

d.h. es ist wenigstens eine Bestimmungszahl mit einem Index n ungleich Null. Durch Umnumerieren kann man also erreichen dass $u^{d+2\cdots n}$ ungleich Null ist. Nach dem im vorigen Paragrafen erhaltenen Resultat kann man durch weiteres Umnumerieren erreichen dass ausserdem $\overset{0}{w}_1$ ungleich Null ist. Nach dem daselbst bewiesenen Satz lässt sich $\mathfrak{M}$ in der Umgebung von x^ν, w_λ darstellen durch Gleichungen von der Form (9) oder auch

$$\left.\begin{array}{l} w_{d+2} = w_1 f_{d+2}\left(x^\nu, \dfrac{w_\varepsilon}{w_1}\right) \overset{\text{def}}{=} \varphi_{d+2}(x^\nu, w_1, \ldots, w_{d+1}) \\ \vdots \\ w_n = w_1 f_n\left(x^\nu, \dfrac{w_\varepsilon}{w_1}\right) \overset{\text{def}}{=} \varphi_n(x^\nu, w_1, \ldots, w_{d+1}) \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} \varepsilon = 2, \ldots, d+1 \\ \varkappa = 1, \ldots, n \end{array}\right\} \quad (12)$$

Da $\overset{0}{w}_1$ nicht verschwindet, sind auch die Funktionen $\varphi_{d+2}, \ldots, \varphi_n$ analytisch in der Umgebung von $\underset{0}{x}^\nu, \overset{0}{w}_\lambda$.

Das Problem ist also jetzt eine in der Umgebung von $\underset{0}{x}^\nu$ analytische Funktion $s(x^\nu)$ zu finden, so dass

$$\left.\begin{array}{l} \partial_{d+2}\, s = \varphi_{d+2}(x^\nu, \partial_1 s, \ldots, \partial_{d+1} s) \\ \vdots \\ \partial_n\, s = \varphi_n(x^\nu, \partial_1 s, \ldots, \partial_{d+1} s) \end{array}\right\} \varkappa = 1, \ldots, n \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

ist, während ausserdem gelten soll

$$(\partial_\lambda s)_{x^\nu = \underset{0}{x}^\nu} = \overset{0}{w}_\lambda \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

Für $d = n - 2$ enthält das System (13) nur eine einzige Gleichung. Nach dem Existenztheorem von CAUCHY—KOWALEWSKI gibt es in diesem Falle eine einzige Lösung s, die für $x^n = \overset{0}{x}{}^n$ in eine beliebige in der Umgebung von $\underset{0}{x}{}^\varkappa$ analytische Funktion $\overset{0}{s}(x^1, \ldots, x^{n-1})$ übergeht. Es gibt also unendlich viele Lösungen, die für $x^\varkappa = \underset{0}{x}{}^\varkappa$ nur den Bedingungen $\partial_1 s = \overset{0}{w}_1, \ldots, \partial_{n-1} s = \overset{0}{w}_{n-1}$ genügen. Da aber $\overset{0}{w}_\lambda$ die Gleichung (12) erfüllt folgt aus (13), dass für jede dieser Lösungen auch $\partial_n s = \overset{0}{w}_n$ ist in $\underset{0}{x}{}^\varkappa$. Für $d = n - 2$ ist das Existenztheorem damit bewiesen.

Wir nehmen jetzt an der Beweis sei schon geliefert für eine d-dimensionale vollständige irreduzibele algebraische Mannigfaltigkeit in einer P_{n-2}, deren Grundkörper aus den meromorphen Funktionen in einem Gebiet einer X_{n-1} besteht (vgl. A.S. I [4]) S. 957). Den Induktionsbeweis teilen wir in drei Teile.

a. *Konstruktion der Hilfsfunktion* $\overset{0}{s}(x^1, \ldots, x^{n-1})$.

Es sei $\mathfrak{M}_1$ die projizierende Mannigfaltigkeit von $\mathfrak{M}$ i.b. auf $\overset{n}{e}_\lambda$ (vgl. A.S. I S. 961). Diese wird dargestellt durch die Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l} w_{d+2} = \varphi_{d+2}(x^\varkappa, w_1, \ldots, w_{d+1}) \\ \vdots \\ w_{n-1} = \varphi_{n-1}(x^\varkappa, w_1, \ldots, w_{d+1}) \end{array}\right\} \varkappa = 1, \ldots, n \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

Nach A.S. I § 5 ist $\mathfrak{M}_1$ sowohl vollständig als irreduzibel, während aus (15) folgt, dass $\mathfrak{M}_1$ ausserdem $(d+1)$-dimensional ist. Man beweist leicht, dass $\mathfrak{M}_1$ für den uns allein noch interessierenden Fall dass $d < n - 2$ ist in $\underset{0}{x}{}^\varkappa$, $\overset{0}{w}_\lambda$ einen Tangentialraum besitzt [5]) und dass sich $n - 1 - (d+1)$ kegelartige algebraische Hyperflächen bilden lassen, die $\overset{n}{e}_\lambda$ als Spitze haben, $\mathfrak{M}_1$ enthalten und in $\underset{0}{x}{}^\varkappa$, $\overset{0}{w}_\lambda$ Tangentialraüme besitzen, die linear unabhängig sind. $\mathfrak{M}_1$ ist in einer Umgebung von $\underset{0}{x}{}^\varkappa$, $\overset{0}{w}_\lambda$ der vollständige Durchschnitt dieser Hyperflächen

$$F_k(x^\varkappa, w_\beta) = F_k^{\beta_1 \ldots \beta_{r_k}} w_{\beta_1} \ldots w_{\beta_{r_k}} = 0; \; k = d+2, \ldots, n-1 \;\; \beta = 1, \ldots, n-1 \quad (15a)$$

---

[4]) Mit A. S. I bezeichnen wir die erste Mitteilung, Proc. Ned. Akad. v. Wet. **43**, S. 955—963 (1940).

[5]) Wesentlich hierfür ist, dass die durch $\overset{0}{w}_\lambda$ und $\overset{n}{e}_\lambda$ gelegte Verbindungsgerade nur den Punkt $\overset{0}{w}_\lambda$ mit $\mathfrak{M}$ gemeinschaftlich hat.

sodass das System (15a) mit dem System (15) gleichbedeutend ist. Setzt man nun $x^n = \underset{0}{x}^n$ in (15) bzw. (16) so entsteht

$$\left.\begin{array}{l} w_{d+2} = \varphi_{d+2}(x^\alpha, \underset{0}{x}^n, w_1, \ldots, w_{d+1}) \\ \vdots \\ w_{n-1} = \varphi_{n-1}(x^\alpha, \underset{0}{x}^n, w_1, \ldots, w_{d+1}) \end{array}\right\} \alpha = 1, \ldots, n-1 \quad . \quad (16)$$

bzw.

$$F_k(x^\alpha, \underset{0}{x}^n, w_\beta) = 0 \;;\; \alpha, \beta = 1, \ldots, n-1 \;;\; k = \mathrm{d}+2, \ldots, \mathrm{n}-1 \quad . \quad (16a)$$

und jedes dieser Systeme bestimmt in der P_{n-2}, die zu der X_{n-1} mit der Gleichung $x^n = \underset{0}{x}^n$ gehört, die selbe algebraische Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}_0$, von der man leicht beweist, dass sie vollständig ist (vgl. A. S. I, S. 962) sowie irreduzibel und d-dimensional. Ferner dass in $\underset{0}{x}^\alpha, \overset{0}{w}_\beta$ ein Tangentialraum existiert, und dass auch die lokale zu $\mathfrak{M}_0$ gehörige algebraische Mannigfaltigkeit in $\underset{0}{x}^\alpha$ irreduzibel ist. Nach der Voraussetzung existiert also eine Funktion $\overset{0}{s}(x^\alpha)$; $\alpha = 1, \ldots, n-1$, die den Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l} \partial_{d+2}\overset{0}{s} = \varphi_{d+2}(x^\alpha, \underset{0}{x}^n, \partial_1\overset{0}{s}, \ldots, \partial_{d+1}\overset{0}{s}) \\ \vdots \\ \partial_{n-1}\overset{0}{s} = \varphi_{n-1}(x^\alpha, \underset{0}{x}^n, \partial_1\overset{0}{s}, \ldots, \partial_{d+1}\overset{0}{s}) \end{array}\right\} \alpha = 1, \ldots, n-1 \quad . \quad . \quad (17)$$

oder auch dem mit diesem System gleichwertigen System

$$F_k(x^\alpha, \underset{0}{x}^n, \partial_\beta\overset{0}{s}) = 0 \;;\; k = \mathrm{d}+2, \ldots, \mathrm{n}-1 \quad \alpha, \beta = 1, \ldots, n-1 \quad . \quad (17a)$$

genügt und für welche in $\underset{0}{x}^\alpha$ ausserdem noch gilt

$$\partial_\beta\overset{0}{s} = \overset{0}{w}_\beta \quad ; \quad \beta = 1, \ldots, n-1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

b. Konstruktion der Funktion $s(x^\varkappa)$.

Nach dem Existenztheorem von CAUCHY—KOWALEWSKI existiert eine einzige Funktion $s(x^\varkappa)$, die der letzten der Gleichungen (13):

$$\partial_n s = \varphi_n(x^\varkappa, \partial_1 s, \ldots, \partial_{d+1} s) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

genügt, während ausserdem gilt

$$s(x^\alpha, \underset{0}{x}^n) = \overset{0}{s}(x^\alpha) \quad ; \quad \alpha = 1, \ldots, n-1. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

Aus (18) folgt für $x^\varkappa = \underset{0}{x}^\varkappa$

$$\partial_\beta s = \overset{0}{w}_\beta \quad ; \quad \beta = 1, \ldots, n-1, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

und aus (19) folgt also, dass für $x^\varkappa = \underset{0}{x}^\varkappa$

$$\partial_n s = \varphi_n (\underset{0}{x}^\varkappa, \overset{0}{w}_1, \ldots, \overset{0}{w}_{d+1}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

ist. Da aber $\underset{0}{x}^\varkappa, \overset{0}{w}_\lambda$ zu $\mathfrak{M}$ gehört und also der Gleichung (12) genügt, folgt in $x^\varkappa = \underset{0}{x}^\varkappa$

$$\partial_n s = \overset{0}{w}_n, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

sodass die Funktion s der Gleichung (14) genügt.

c. *Beweis dass s auch den ersten n—d—2 Gleichungen* (13) *genügt.*

Der Voraussetzung nach liegt $\overset{n}{e}_\lambda$ nicht in dem Tangentialraum zu $\underset{0}{x}^\varkappa, \overset{0}{w}_\lambda$. Es gibt also mindestens eine Hyperfläche mit einer Gleichung

$$F(x^\varkappa, w_\lambda) = F^{\lambda_1 \ldots \lambda_r} w_{\lambda_1} \ldots w_{\lambda_r} = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

mit $F^{\lambda_1 \ldots \lambda_r}$ analytisch in einer Umgebung von $\underset{0}{x}^\varkappa$, die $\mathfrak{M}$ enthält und deren Tangentialraum zu $\underset{0}{x}^\varkappa, \overset{0}{w}_\lambda$ nicht durch $\overset{n}{e}_\lambda$ geht. Infolgedessen ist

$$\frac{\partial F}{\partial w_n} \neq 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

in $\underset{0}{x}^\varkappa, \overset{0}{w}_\lambda$. Setzt man nun in F für w_n ein $\varphi_n (x^\varkappa, w_\eta)$; $\eta = 1, \ldots, d+1$, so entsteht eine Funktion

$$\left. \begin{array}{l} E(x^\varkappa, w_\beta) \overset{\text{def}}{=} F(x^\varkappa, w_\beta, \varphi_n (x^\varkappa, w_\eta)) \;, \; \varkappa = 1, \ldots, n \quad \beta = 1, \ldots, n-1 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \eta = 1, \ldots, d+1 \end{array} \right\} \quad (26)$$

die in der Umgebung von $\underset{0}{x}^\varkappa, \overset{0}{w}_\lambda$ analytisch ist und auf $\mathfrak{M}_1$ verschwindet. Denn ist $w_\beta (x^\varkappa)$ ein beliebiger Punkt von $\mathfrak{M}_1$, so genügt w_β den Gleichungen (15) und daraus folgt, dass $(w_\beta, \varphi_n (x^\varkappa, w_\eta))$ den Gleichungen (12) genügt und also ein Punkt von $\mathfrak{M}$ ist und infolgedessen $F(x^\varkappa, w_\lambda)$ zum Verschwinden bringt.

Das Verschwinden von E auf $\mathfrak{M}_1$ bringt mit sich, dass es eine Gleichung gibt von der Form

$$\left. \begin{array}{l} E(x^\alpha, w_\beta) = J^k (x^\varkappa, w_\beta) F_k (x^\varkappa, w_\beta) \;; \; k = \mathrm{d} + 2, \ldots, \mathrm{n}-1, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \beta = 1, \ldots, n-1 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \varkappa = 1, \ldots, n \end{array} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

wo die rechts auftretenden Funktionen J^k (die nicht notwendig rational in den w_β zu sein brauchen) in der Umgebung von $\overset{0}{x}{}^\varkappa, \overset{0}{w}_\beta$ analytisch in $x^\varkappa, w_\beta$ sind [6]). Setzt man nun $w_\beta = \partial_\beta s$ in (27), so entsteht infolge (19)

$$\left.\begin{aligned} F(x^\varkappa, \partial_\lambda s) = E(x^\varkappa, \partial_\beta s) = J^k(x^\varkappa, \partial_\beta s)\, F_k(x^\varkappa, \partial_\beta s); \\ k = \mathrm{d}+2, \ldots, \mathrm{n}-1 \\ \beta = 1, \ldots, n-1 \\ \varkappa, \lambda = 1, \ldots, n \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (28)$$

wo die $J^k(x^\varkappa, \partial_\beta s)$ jetzt in der Umgebung von $\overset{0}{x}{}^\varkappa$ analytisch sind in $x^\varkappa$. Es verschwinden nun sowohl $F(x^\varkappa, w_\lambda)$ als $F_k(x^\varkappa, w_\lambda)$, ($w_n$ tritt in den F_k nicht auf), auf $\mathfrak{M}$. Da $\mathfrak{M}$ vollständig ist, verschwinden daselbst also auch die Polynome

$$\left.\begin{aligned} K_k(x^\varkappa, w_\lambda) \overset{\text{def}}{=} D(F_k; F)^{\mu\lambda_1\ldots\lambda_{r_k}\varkappa_1\ldots\varkappa_r}\, w_\mu\, w_{\lambda_1} \ldots w_{\varkappa_r} \\ k = \mathrm{d}+2, \ldots, \mathrm{n}-1 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$

Für diese Polynome gelten also genau wie für F Gleichungen von der Form

$$K_k(x^\varkappa, \partial_\lambda s) = L_k^l(x^\varkappa, \partial_\beta s)\, F_l(x^\varkappa, \partial_\beta s), \quad k, l = \mathrm{d}+2, \ldots, \mathrm{n}-1 \quad (30)$$

wo die $L_k^l(x^\varkappa, \partial_\beta s)$ analytisch in $x^\varkappa$ sind in der Umgebung von $\overset{0}{x}{}^\varkappa$. Schreiben wir $F_k(x^\varkappa, \partial_\beta s) \overset{\text{def}}{=} \theta_k(x^\varkappa)$, so ist (30) gleichbedeutend mit den Kongruenzen

$$\left.\begin{aligned} K_k(x^\varkappa, \partial_\lambda s) = D(F_k; F)^{\mu\lambda_1\ldots\lambda_{r_k}\varkappa_1\ldots\varkappa_r}\, (\partial_\mu s)(\partial_{\lambda_1} s)\ldots(\partial_{\varkappa_r} s) \equiv 0 \bmod (\theta_l) \\ k, l = \mathrm{d}+2, \ldots, \mathrm{n}-1 \end{aligned}\right\} . \quad (31)$$

Auf diese Kongruenzen wenden wir jetzt die allgemeine Formel

$$\left.\begin{aligned} D(X_a; X_b)^{\mu\lambda_1\ldots\lambda_{a+b}}\, w_\mu\, w_{\lambda_1} \ldots w_{\lambda_{a+b}} = 2(a+1)(b+1)\, X_a^{\mu\lambda_1\ldots\lambda_a} \\ X^{\mu\nu_1\ldots\nu_b}\, (\partial_{[\mu} w_{\lambda]})\, w_{\lambda_1} \ldots w_{\nu_b} + \\ + (a+1)\, X_a^{\mu\lambda_1\ldots\lambda_a}\, w_{\lambda_1} \ldots w_{\lambda_a}\, \partial_\mu (X_b^{\lambda\nu_1\ldots\nu_b}\, w_\lambda\, w_{\nu_1} \ldots w_{\nu_b}) - \\ - (b+1)\, X_b^{\mu\lambda_1\ldots\lambda_b}\, w_{\lambda_1} \ldots w_{\lambda_b}\, \partial_\mu (X_a^{\lambda\nu_1\ldots\nu_a}\, w_\lambda\, w_{\nu_1} \ldots w_{\nu_a}) \end{aligned}\right\} . \quad (32)$$

an, die eine Verallgemeinerung ist der Formel (10) A. S. I, S. 958 und in diese Formel übergetzt für den dort berücksichtigten Fall, dass die

---

[6]) Vergl. für den Beweis dieser Tatsache E. KÄHLER, Einführung in die Theorie der Systeme von Differentialgleichungen, S. 12.

eingeklammerten Ausdrücke in den beiden letzten Termen verschwinden. Da $\frac{\partial F_k}{\partial w_n}$ verschwindet, ergibt sich dann

$$\left.\begin{aligned} \left\{\frac{\partial F_k}{\partial w_\beta}(x^\varkappa, \partial_\lambda s)\right\} \partial_\beta F(x^\varkappa, \partial_\lambda s) - \left\{\frac{\partial F}{\partial w^\mu}(x^\varkappa, \partial_\lambda s)\right\} \partial_\mu \theta_k \equiv 0 \; mod\,(\theta_l) \\ k, l = \mathrm{d}+2, \ldots, \mathrm{n}-1 \\ \beta = 1, \ldots, n-1 \\ \varkappa, \lambda, \mu = 1, \ldots, n \end{aligned}\right\} . \quad (33)$$

Da aber infolge (28)

$$\left.\begin{aligned} \partial_\beta F(x^\varkappa, \partial_\lambda s) \equiv 0 \; mod\,(\theta_k, \partial_\beta \theta_k) \\ \beta = 1, \ldots, n-1 \\ \varkappa, \lambda = 1, \ldots, n \\ k = \mathrm{d}+2, \ldots, \mathrm{n}-1 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (34)$$

folgt

$$\left.\begin{aligned} \left\{\frac{\partial F}{\partial w_n}(x^\varkappa, \partial_\lambda s)\right\} \partial_n \theta_k(x^\varkappa) \equiv 0 \; mod\,(\theta_l, \partial_\beta \theta_l) \\ \beta = 1, \ldots, n-1 \\ \varkappa, \lambda = 1, \ldots, n \\ k, l = \mathrm{d}+2, \ldots, \mathrm{n}-1 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad (35)$$

wobei zu bemerken ist, dass beim Ausschreiben des rechten Gliedes in $\theta_{\mathrm{d}+2}, \ldots, \partial_\beta \theta_{\mathrm{n}-1}$ alle Koeffizienten analytisch sind in der Umgebung von $\underset{0}{x}^\varkappa$. Da in diesem Punkte $\frac{\partial F}{\partial w_n}(x^\varkappa, \partial_\lambda s)$ übergeht in $\frac{\partial F}{\partial w_n}(\underset{0}{x}^\varkappa, \overset{0}{w}_\lambda)$ und dieser Ausdruck infolge (25) nicht verschwindet, kann man durch $\frac{\partial F}{\partial w_n}$ dividieren und es entsteht eine Gleichung von der Form

$$\left.\begin{aligned} \partial_n \theta_k(x^\varkappa) = \varphi_k^l(x^\varkappa)\, \theta_l(x^\varkappa) + \varphi_k^{l,\beta}(x^\varkappa)\, \partial_\beta \theta_l(x^\varkappa) \\ k, l = \mathrm{d}+2, \ldots, \mathrm{n}-1 \\ \beta = 1, \ldots, n-1 \\ \varkappa = 1, \ldots, n \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad (36)$$

mit in der Umgebung von $\underset{0}{x}^\varkappa$ analytischen Koeffizienten im rechten Gliede. Nun ist ausserdem

$$\left.\begin{aligned} \theta_k(x^\alpha, \underset{0}{x}^n) = F_k(x^\alpha, \underset{0}{x}^n, \partial_\beta s) = 0 \\ \alpha, \beta = 1, \ldots, n-1 \\ k = \mathrm{d}+2, \ldots, \mathrm{n}-1 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (37)$$

infolge (17a) und (20). Nach dem Existenztheorem von CAUCHY—KOWALEWSKI hat das System (36) mit den Anfangsbedingungen (37) eine einzige Lösung. Da aber $\theta_k(x^\varkappa) = 0$ offenbar eine Lösung ist, ist dies auch die einzige Lösung und damit ist gezeigt, dass $\partial_\lambda s$ auch die Gleichung (15a) und somit auch die mit dieser gleichwertige Gleichung (15) befriedigt, woraus hervorgeht dass s nicht nur der letzten der Gleichungen (13) sondern sämtlichen Gleichungen (13) genügt w.z.b.w.

8. *Schluss.*

Wir kehren jetzt zurück zu der in A. S. I § 2 gestellten Aufgabe die Lösungen zu bestimmen der Systeme

$$\underset{i}{P}^{\mu\lambda_1\ldots\lambda_{a_i}}(\partial_\mu s)(\partial_{\lambda_1} s)\ldots(\partial_{\lambda_{a_i}} s) = 0 \;;\; i = 1, \ldots, N. \quad . \quad . \quad (38)$$

Zunächst bestimme man nach der in A. S. I § 3 angegebenen Methode die grösste vollständige Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}_\nu$. die in der Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$, definiert durch die Gleichungen

$$\underset{i}{P}^{\mu\lambda_1\ldots\lambda_{a_i}} w_\mu w_{\lambda_1}\ldots w_{\lambda_{a_i}} = 0 \;;\; i = 1, \ldots, N \quad . \quad . \quad . \quad (39)$$

enthalten ist. Sodann zerlege man $\mathfrak{M}_\nu$ in irreduzibele Mannigfaltigkeiten $\mathfrak{M}_{\nu 1}, \ldots, \mathfrak{M}_{\nu r}$, die alle vollständig sind. Sind dann z.B.

$$\underset{s}{Q}^{\mu\lambda_1\ldots\lambda_{a_s}} w_\mu w_{\lambda_1}\ldots w_{\lambda_{a_s}} = 0 \;;\; s = 1, \ldots, M \quad . \quad . \quad . \quad (40)$$

die Gleichungen von $\mathfrak{M}_{\nu 1}$, so bestimme man in einem Punkt $\underset{0}{x}^\varkappa$ eine Lösung $\overset{0}{w}_\lambda$ dieser Gleichungen, so dass auch die lokale zu $\mathfrak{M}_{\nu 1}$ gehörige Mannigfaltigkeit irreduzibel ist und $\mathfrak{M}_{\nu 1}$ in $\underset{0}{x}^\varkappa, \overset{0}{w}_\lambda$ einen Tangentialraum hat. Es lässt sich dann eine Funktion s bilden, so dass $\partial_\lambda s$ (40) also auch (38) befriedigt und für welche ausserdem in $\underset{0}{x}^\varkappa$ gilt $\partial_\lambda s = \overset{0}{w}_\lambda$. In dieser Weise können alle Lösungen von (38) erhalten werden.

Weniger genau lässt sich das Existenztheorem auch folgendermassen formulieren:

Ist $\overset{0}{w}_\lambda$ in $\underset{0}{x}^\varkappa$ ein zu einer vollständigen (nicht notwendig irreduzibelen) algebraischen Mannigfaltigkeit gehöriger Vektor nicht besonderer Lage, so lässt sich $\overset{0}{w}_\lambda$ zu einem zu $\mathfrak{M}$ gehörigen Gradientfeld fortsetzen

oder auch

Die zu einer vollständigen algebraischen Mannigfaltigkeit gehörigen

Vektoren nicht besonderer Lage lassen sich zu Gradientfeldern aneinanderreihen.

Es sei noch bemerkt, dass das Existenztheorem folgende leicht beweisbare Umkehrung zulässt.

Lässt sich in jedem beliebigen Punkt $\underset{0}{x}^{\varkappa}$ *eines bestimmten Gebietes der* X_n *jeder zu einer algebraischen Mannigfaltigkeit* $\mathfrak{M}$ *gehörige Vektor* $\underset{0}{w}_{\lambda}$ *eines bestimmten Gebietes des* w_{λ}*-Raumes in diesem Punkt in einer Umgebung von* $\underset{0}{x}^{\varkappa}$ *zu einem zu* $\mathfrak{M}$ *gehörigen Gradientfeld fortsetzen, so ist* $\mathfrak{M}$ *vollständig.*