Geology. — *Over de regulaire en hexagonale dichtste bolstapelingen en de deformatie hunner bollen tot dodekaëders tengevolge van compactie.* Door B. G. ESCHER. (Communicated by Prof. L. RUTTEN.)

(Communicated at the meeting of November 30, 1940.)

Sommige gedeelten der bekende pisolieten (erwtensteenen) van Karlsbad bezitten ingedeukte bollen (ESCHER, 1940), die door min of meer platte vlakken begrensd zijn. Zij maken den indruk colloïdaal als bolletjes gevormd te zijn, en, terwijl zij nog plastisch waren, door druk gedeformeerd te zijn (LACROIX (1922).

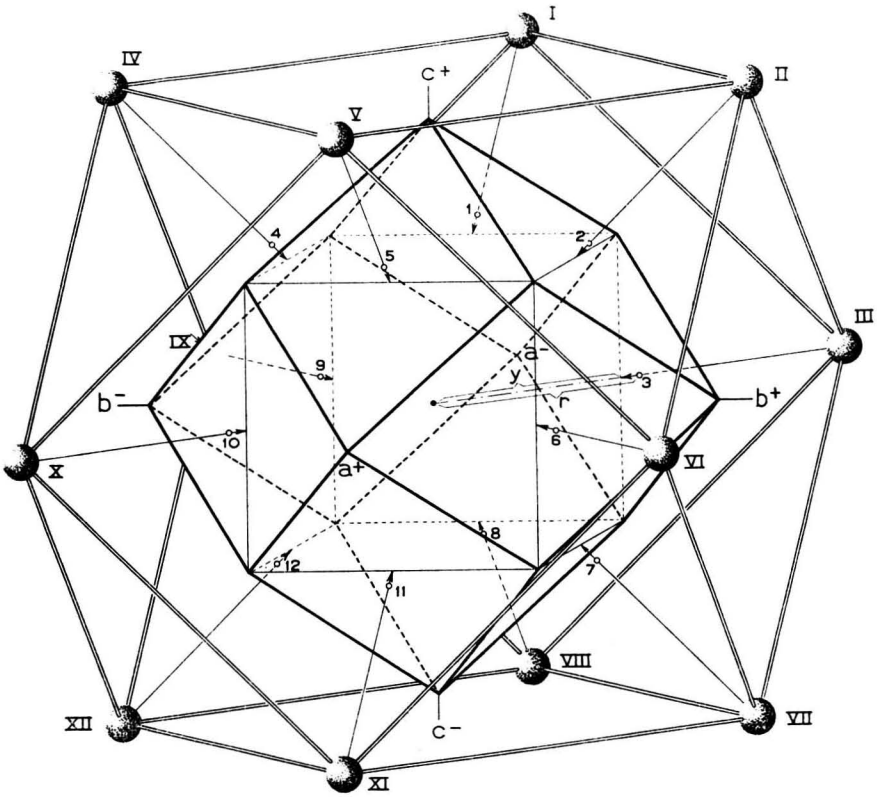

Fig. 4. Draadmodel der regulaire dichtste bolstapeling (loodrecht op een viertallige as) waarvan de hoekpunten I t/m XII de middelpunten van even groote bollen (met straal $= r$) zijn, die een centralen bol in de punten 1 t/m 12 raken. De compactie vindt plaats in de richting der pijlen, waardoor de centrale bol in een rhombendodekaëder verandert, waarvan de zwaartepunten der vlakken met de pijlpunten samenvallen. De lengte van de normalen, uit het middelpunt op de vlakken neergelaten, bedraagt $y = 0.90472\, r$.

B. G. ESCHER: OVER DE REGULAIRE EN HEXAGONALE DICHTSTE BOLSTAPELINGEN EN DE DEFORMATIE HUNNER BOLLEN TOT DODEKAËDERS TENGEVOLGE VAN COMPACTIE.

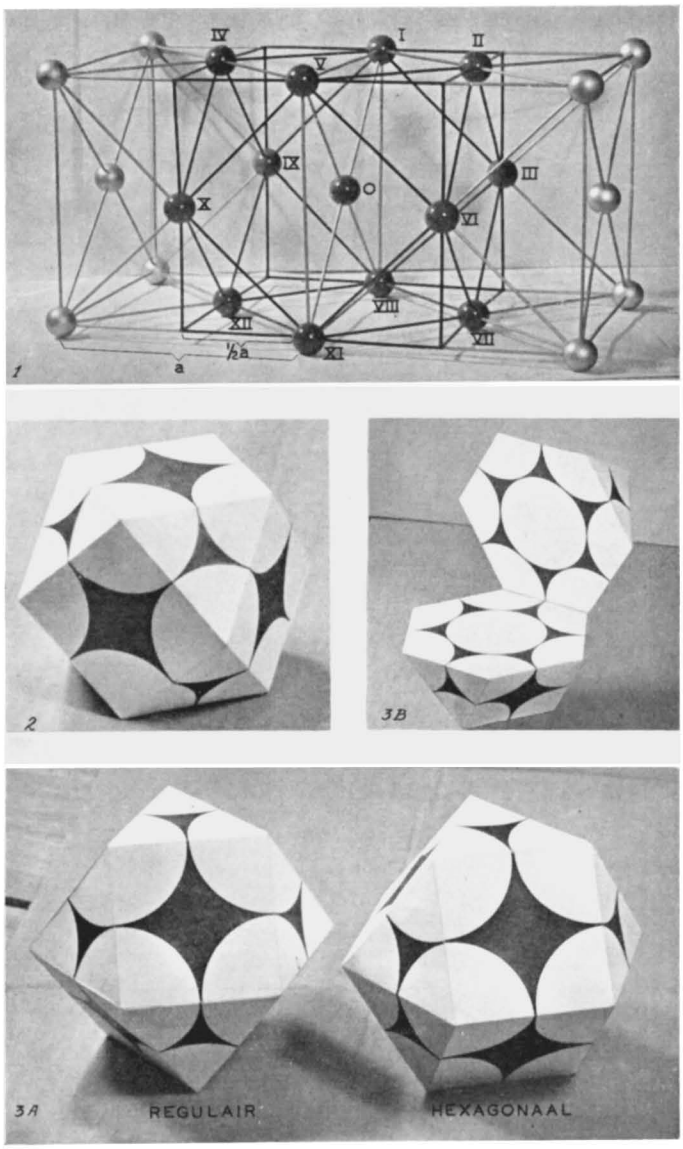

Fig. 1. Rangschikking van deeltjes volgens den cubus met gecenterde vlakken (hoog a, diep a, lang 2a). De punten I t/m XII vormen met 0 een rangschikking der middelpunten van even groote bollen, volgens de regulaire dichtste bolstapeling.

Fig. 2. Regulaire dichtste bolstapeling afgesneden door de middelpunten der bollen 1 t/m XII van fig. 1, met een viertallige as loodrecht geplaatst.

Fig. 3*A*. Regulaire en hexagonale dichtste bolstapeling met drietallige as loodrecht geplaatst.

Fig. 3*B*. Opengelegd model der regulaire dichtste bolstapeling.

Polyëdrische pisolieten zijn door R. R. SHROCK (1930) beschreven uit een zwerfsteen in N. Indiana. Hij merkt hierbij op, dat het aantal vlakken der polyëders 9 of minder tot 15 bedraagt, terwijl veelal 12 vlakken optreden. Deze vlakken zijn plat, convex of concaaf.

Hierbij kan worden opgemerkt, dat 12 vlakken moeten optreden, wanneer plastische bollen van dezelfde grootte in dichtste bolstapeling liggen en zij door alzijdigen druk gedeformeerd worden.

Een der bekendste vormen van presse-papiers bezit een bijzondere aantrekkelijkheid voor den kristallograaf, want in de eerste plaats vertoont hij de combinatie van hexaëder en octaëder „in evenwicht", in de tweede plaats vormen de hoekpunten met het middelpunt een der afbeeldingen van het regulaire tralie van BRAVAIS met gecentreerde vlakken (fig. 1) en tenslotte vormen diezelfde punten de middelpunten van bollen in dichtste regulaire bolstapeling om een centralen bol (fig. 2).

Het verband tusschen de dichtste regulaire en hexagonale bolstapeling wordt op eenvoudige wijze gedemonstreerd, door den beschreven polyëder op een octaëdervlak te plaatsen (fig. 3 A en B). Wordt dan de bovenste helft 60° in een horizontaal vlak gedraaid, zoo ontstaat de hexagonale dichtste bolstapeling, waarbij $a : c = 1 : 1{,}633$ $(= 1 : \frac{2}{3}\, a \sqrt{6})$.

Tot welke polyëders worden de bollen nu gedeformeerd, indien zij,

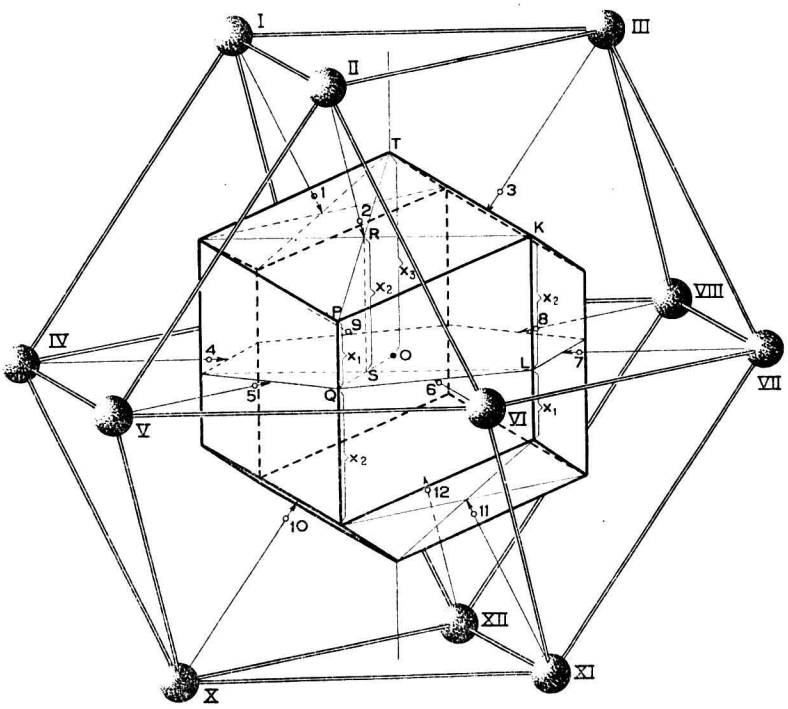

Fig. 5. Draadmodel der regulaire dichtste bolstapeling loodrecht op een drietallige as, met het door compactie gevormde rhombendodekaëder.

geheel plastisch verondersteld, aan compactie worden onderworpen, zoodanig, dat het poriënvolume geheel verdwijnt. Het is duidelijk, dat de centrale bol, die door 12 even groote bollen omringd is, in de regulaire dichtste bolstapeling in een dodekaëder verandert. De drukrichtingen staan in de richtingen der stralen, die de middelpunten der 12 omringende bollen met het middelpunt van den centralen bol verbinden. In de regulaire dichtste bolstapeling (fig. 4 en 5) worden deze richtingen aangegeven door:

$$[101],\quad [011],\quad [\bar{1}01],\quad [0\bar{1}1]$$
$$[110],\quad [\bar{1}10],\quad [\bar{1}\bar{1}0],\quad [1\bar{1}0]$$
$$[10\bar{1}],\quad [01\bar{1}],\quad [\bar{1}0\bar{1}],\quad [0\bar{1}\bar{1}]$$

Loodrecht op deze richtingen staan de twaalf vlakken van den polyëder, waarvan dus het symbool $\{101\}$ is, waarmede tevens bewezen is, dat de polyëder het *rhombendodekaëder* uit het regulaire stelsel is (afgekort R).

Het andere twaalfvlak is minder regelmatig (fig. 6). De hexagonale dichtste bolstapeling komt overeen met twee in elkaar geplaatste hexagonale tralies van BRAVAIS met een translatie $\frac{2}{3}$ a, $\frac{1}{3}$ a, $\frac{1}{2}$ c waarbij a : c = 1 : 1,633.

Het trigonale dodekaëder, dat door compactie van deze bolstapeling ontstaat, is een combinatie van een hexagonaal prisma met een trigonale bipyramide.

Van de 12 drukrichtingen liggen er 6 in een horizontaal vlak, met de indices:

$$[11\bar{2}0],\quad [\bar{1}2\bar{1}0],\quad [\bar{2}110],\quad [\bar{1}\bar{1}20],\quad [1\bar{2}10],\quad [2\bar{1}\bar{1}0].$$

De vlakken, die normaal op deze drukrichtingen staan bezitten het symbool $\{11\bar{2}0\}$ en vormen samen een hexagonaal prisma van de 2e soort.

De drie drukrichtingen van de bovenste helft naar het centrum hebben de indices:

$$[ho\bar{h}l],\ [\bar{h}hol] \text{ en } [o\bar{h}hl],$$

de drie van de onderste helft:

$$[ho\bar{h}\bar{l}],\ [\bar{h}ho\bar{l}] \text{ en } [o\bar{h}h\bar{l}].$$

De zesvlakken, die normaal op deze drukrichtingen staan, bezitten het symbool $\{ho\bar{h}l\}$ en vormen een trigonale bipyramide van de 1e soort.

Deze combinatie (afgekort T) van hexagonaal prisma van de 2e soort met trigonale bipyramide van de 1e soort treedt op in de ditrigonaal-dipyramidale klasse.

De eenheid op de a, b en d-assen bedraagt y (fig. 6), die op de c-as $\frac{1}{2}$ y $\sqrt{6}$.

Uit fig. 7 volgt dat OB = 2 y of 2 eenheden op de horizontale as.

De notatie van een der 6 vlakken is dus volgens WEISS $2 : \infty : \bar{2} : 1$ en het indexsymbool van BRAVAIS–MILLER is $\{10\bar{1}2\}$.

Het poriënvolume der dichtste bolstapelingen bedraagt 25,951 % van het totale volume van bollen plus poriën. Het wordt gevonden uit het verschil van de inhouden van een parallelopipedum en een bol:

$$\frac{\frac{1}{2}\, d\, \sqrt[3]{2} - \frac{1}{6}\, \pi\, d^3}{\frac{1}{2}\, d\, \sqrt[3]{2}} = 25{,}951\,\%$$

Bij volledige compactie der plastische bollen verdwijnt het poriënvolume en er blijft $\frac{74{,}049}{100}$ van het oorspronkelijke volume over.

Lineair bedraagt de compactie dus $x = \sqrt[3]{\frac{74{,}049}{100}} = 0{,}90472$.

Dit wil zeggen, dat wanneer de afstand der middelpunten der bollen oorspronkelijk 1 bedroeg, de afstand der middelpunten der polyëders, na

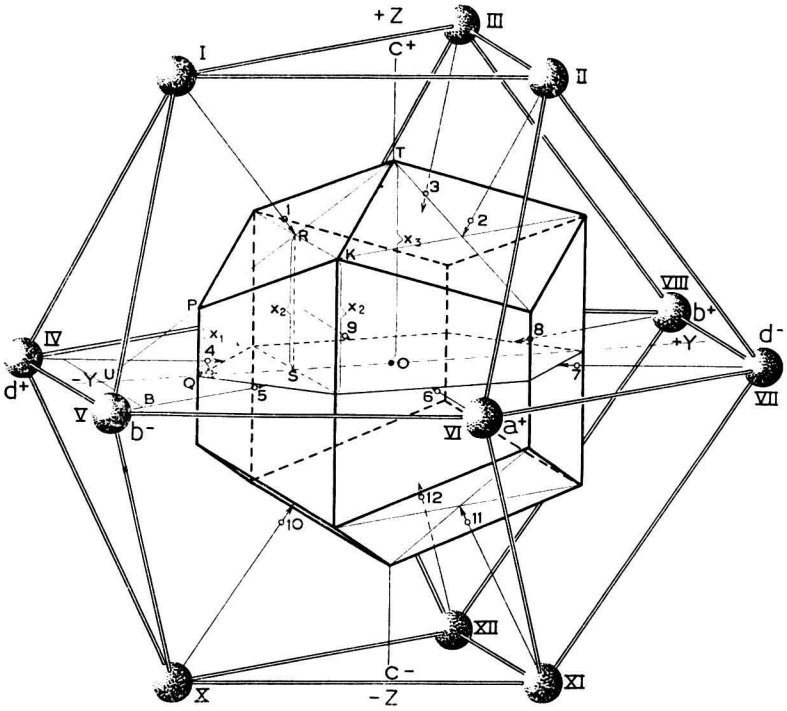

Fig. 6. Draadmodel der hexagonale dichtste bolstapeling loodrecht op de drietallige as, met het door compactie gevormde trigonale dodekaëder, een combinatie van $\{1120\}$ en $\{10\bar{1}2\}$.

volledige compactie, 0,90472 geworden is. In fig. 7 is dus **y = 0,90472 r.**

In y uitgedrukt kan het volume van het rhombendodekaëder als volgt worden bepaald (fig. 4):

Inh. rhombendodekaëder = Inh. cubus + 6 × Inh. Vierzijdige pyramide

= 2 × Inh. cubus.

y = halve diagonaal van een cubusvlak, dus is de zijde van den cubus $= y\sqrt{2}$ waaruit volgt: *Inh. rhomdendodekaëder* $= 2 \times (y\sqrt{2})^3 = 4y^3\sqrt{2}$.

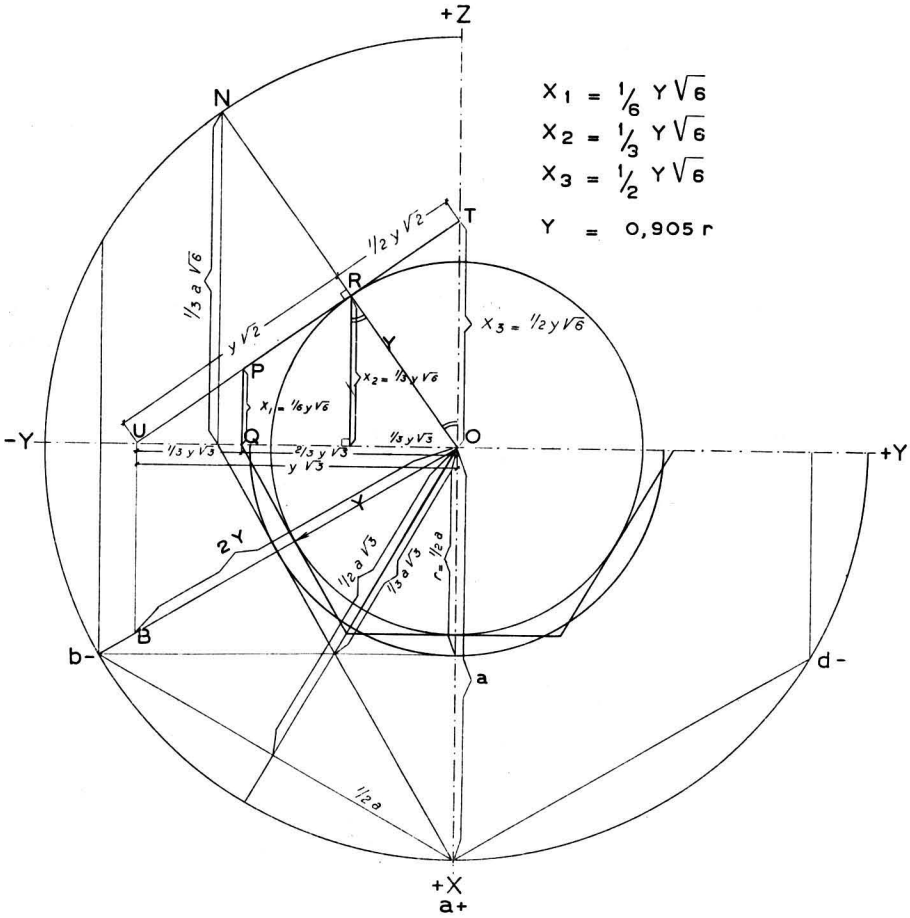

Fig. 7. Horizontale en verticale projectie voor de bepaling der grootheden van het trigonale dodekaëder.

Het volume van de combinatie T van $\{11\bar{2}0\}$ en $\{10\bar{1}2\}$ bestaat uit 12 maal den inhoud van het afgesneden driezijdig prisma OLQTKP (fig. 6). De voor deze berekening noodige grootheden zijn in fig. 7 geschreven.

De hoogtelijn van het middelpunt van den zeshoek, op de zijde neer-

gelaten, bedraagt y. De zijde van den zeshoek bedraagt dus $\frac{2}{3}$ y $\sqrt{3}$. Het oppervlak van den driehoek bedraagt dus $\frac{1}{3}$ y $^2\sqrt{3}$.

Voorts wordt gevonden:

$$x_1 = \frac{1}{6} y \sqrt{6},\ x_2 = \frac{1}{3} y \sqrt{6},\ x_3 = \frac{1}{2} \sqrt{6}.$$

Inh. dodekaëder

T = 12 x Inh. afgesneden driezijdig prisma =

$$= 12 \times \frac{1}{3} (x_1 + x_2 + x_3) \frac{1}{3} y\, {}^2\sqrt{3} =$$

$$= 12 \times \frac{1}{3} \left(\frac{1}{6} y \sqrt{6} + \frac{1}{3} y \sqrt{6} + \frac{1}{2} y \sqrt{6} \right) \frac{1}{3} y\, {}^2\sqrt{3} =$$

$$= 4\, y\, {}^3\sqrt{2}.$$

Aangezien de beide dodekaëders denzelfden inhoud als de bol bezitten, moet

$$4\, y\, {}^3\sqrt{2} = 4{,}18879\, r^3$$

waaruit wederom volgt:

$$\mathbf{y = 0{,}90472\ r.}$$

Met beide dodekaëders kan de ruimte volledig gevuld worden, dit volgt uit de wijze waarop zij hier zijn afgeleid.

Nu zijn er nog andere dichtste bolstapelingen mogelijk en de vraag dringt zich op, of hieruit door compactie andere dodekaëders zouden kunnen ontstaan. Dit komt mij voor niet het geval te zijn.

Het verschil tusschen de regulaire en hexagonale dichtste bolstapeling kan ook als volgt beschreven worden.

Alle horizontale lagen zijn in hun opbouw identiek; zij bestaan uit een dichtste rangschikking van even groote bollen met straal r in een plat vlak en worden gekarakteriseerd doordat elke bol door 6 bollen geraakt wordt, die elkaar onderling eveneens raken. De volgende laag kan echter op twee wijzen op of onder de eerste gestapeld worden, na een translatie over $t = \frac{2}{3} r \sqrt{3}$. De hoek tusschen beide translatie-richtingen bedraagt 60° (fig. 8). Indien de onderste en bovenste laag een translatie in de evengenoemde verschillende richtingen hebben ondergaan, is de stapeling regulair; vond de translatie van deze lagen in dezelfde richting plaats, dan is de stapeling hexagonaal.

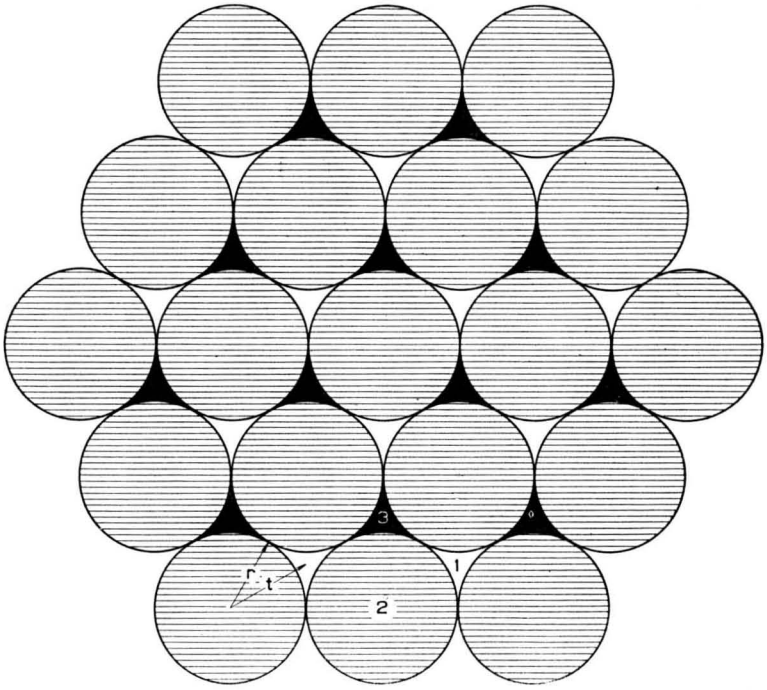

Fig. 8. Schematische voorstelling der dichtste bolstapelingen. Bij de regulaire liggen de middelpunten der onderste laag van bollen in de vakken 1, die der bovenste laag in de vakken 3. Bij de hexagonale liggen de middelpunten der onderste en bovenste lagen of beide in 1 of beide in 3. De middelpunten van de middelste laag liggen in 2; $t = \frac{2}{3} r \sqrt{3}$.

In het regulaire geval noemen wij de lagen $\begin{matrix} & & 3 \\ & & 2 \\ & & 1 \end{matrix}$, in het hexagonale geval

$$\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{matrix} \text{ of } \begin{matrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{matrix} \text{ of } \begin{matrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{matrix}$$

Naast regulair $\begin{matrix} & 3 \\ & 2 \\ & 1 \end{matrix}$ is regulair $\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$ mogelijk:

naast hexagonaal $\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{matrix}$ ook $\begin{matrix} 2 \\ 1, \\ 2 \end{matrix}$ naast $\begin{matrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{matrix}$ ook $\begin{matrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{matrix}$ en naast $\begin{matrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{matrix}$ ook $\begin{matrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$

In verticalen zin kan een groot aantal lagen op vele wijzen gestapeld worden, manieren, die uit een combinatie der evengenoemde stapelingen van drie lagen worden afgeleid.

G. MENZER (1938, p. 391) noemt ze dichtste bolstapelingen van hoogere orde. Als hoogste orde definieert hij een volkomen onregelmatige opeenvolging der drie lagen, terwijl talrijke combinaties mogelijk zijn, waarbij een of meer lagen als symmetrievlak optreden.

Eenige voorbeelden van gemengde stapelingen zijn:

Met symmetrie			Onregelmatig
		1	3
		2 R	2 T
		3 T	3 R
		2 T	1 T
		3 T	3 R
		2 R	2 R
1	1	1 T	1 T
2 R	2 R	2 R	2 R
3 T	3 R	3 T	3 R
2 R	1 T	2 T	1 R
1 T	3 R	3 T	2 T
2 R	2 R	2 R	1 R
3 T	1 T	1 T	3 R
2 R	2 R	2 R	2 T
1 T	3 R	3 T	3 R
2 R	1 T	2 T	1 T
3 T	3 R	3 T	3 R
2 R	2 R	2 R	2 R
1	1	1	1

Het is duidelijk, dat R optreedt, wanneer een laag tusschen twee lagen met verschillend nummer ligt, en T, wanneer onder en boven een laag, lagen met hetzelfde nummer optreden. Er ontstaan dus hetzij regulaire rhombendodekaëders R hetzij trigonale combinaties T van $\{11\bar{2}0\}$ en $\{10\bar{1}2\}$. Andere vormen zijn niet mogelijk.

E. 1 Nov. 1940.

Summary.

R. R. SHROCK has described a polyhedral pisolite and remarks, that the grains are often bound by 12 faces. The pisolite of Karlsbad (Bohemia) shows here and there idented spheres, which suggest, that they were formed in a colloidal state, and afterwards deformed by compaction. When the compaction goes so far as to annihilate the pore space between the spheres, the latter change into dodecahedrons; the cubic close packing giving the regular dodecahedron, the hexagonal close packing a trigonal

combination of the second order prism $\{11\bar{2}0\}$ with the trigonal pyramid $\{10\bar{1}2\}$. The pore space of close packed spheres being 25.950 %, the remaining volume after complete compaction amounts to 74.049 % of the original content, and the compaction consequently shortens the linear dimensions to 0.90472 of the original ones. Both dodecahedrons fill the space completely and no other polyhedrons are possible by compaction of other imaginable close packings (of equal spheres) with or without planes of symmetry.

LITERATUUR.

B. G. ESCHER, Over een polyëdrische pisoliet van Palimanan bij Cheribon. Proc. Ned. Akad. v. Wetensch., Amsterdam, **43**, 1300 (1940).

A. LAQROIX, Sur la ktypéite, nouvelle forme de carbonate de calcium différente de la calcite et de l'aragonite. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences. Tome 126, pp. 602—605 (1898).

————, Minéralogie de Madagascar, 1922. Tome I, pp. 288—290. Tome II, pp. 200—211.

G. MENZER, Zwillingsgesetze und regelmässige Verwachsungen der dichtesten Kugelpackungen. Zeitschr. f. Kristallographie, **99**, 378—409 (1938).

R. R. SHROCK, Polyhedral pisolites. American Journal of Science. Vth Series, **19**, 368—372 (1930).