Mathematics. — *Ueber die Differentialkovariante erster Ordnung der binären kubischen Differentialform.* Von P. G. MOLENAAR. (Communicated by Prof. R. WEITZENBÖCK.)

(Communicated at the meeting of December 28, 1940.)

In einer früheren Arbeit habe ich Differentialkovarianten erster Ordnung der binären kubischen und der binären biquadratischen Differentialform aufgestellt [1]. Die Methode gründete sich auf die Elimination der Γ-Symbole aus den Gleichungen für die kovariante erste Ableitung.

Wie EMMY NOETHER aber angegeben hat, kann man die Differentialkovarianten auch gewinnen aus gewissen Differentialausdrücken, ohne Hilfe der CHRISTOFFELschen Γ-Symbole [2].

Ich habe im Folgenden diese Methode angewendet auf die binäre kubische Differentialform. Die Elimination der zweiten Differentiale gelingt durch Einführung von Kontravarianten. Man findet dann eine lineare Differentialkovariante erster Ordnung, die, abgesehen von einem Zahlenfaktor, nichts anderes ist als die schon früher aufgestellte Kovariante, und der man folgende Gestalt geben kann:

$$l_s = Q^{ikl} \frac{\partial a_{iks}}{\partial x_l} + a_{is} \frac{\partial a^{il}}{\partial x_l}.$$

§ 1. Die binäre kubische Differentialform

$$f = a^3_{dx} = a_{ikl}\, dx^i\, dx^k\, dx^l \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

besitzt drei Komitanten

$$\left.\begin{array}{ll} \triangle = \alpha^2_{dx} = (ab)^2\, a_{dx}\, b_{dx} & R = (\alpha\beta)^2 = (ab)^2\,(cd)^2\,(ad)\,(bc) \\ Q = (f, \triangle)^{(1)} = (a\alpha)\, a^2_{dx}\, \alpha_{dx} = (ab)^2\,(ca)\, b_{dx}\, c^2_{dx} = Q^3_{dx} & \end{array}\right\}. \quad (2)$$

Setzt man

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = +\, a^2 \\ a_2 = -\, a^1 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

---

[1]) Vgl. P. G. MOLENAAR, Proc. Kon. Ned. Akad. v. Wetensch., Amsterdam, **41**, 278—288 (1939) und **42**, 158—166 (1939).

[2]) Vgl. E. NOETHER, Göttinger Nachrichten (15.1.1918) und R. WEITZENBÖCK, Invariantentheorie, S. 359.

so kann man aus (1) den kontravarianten Tensor

$$a^{ikl} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_l}$$

bilden. Ferner sind

$$a^l_{ik}\, dx^i\, dx^k \frac{\partial}{\partial x_l} \quad \text{und} \quad a^{kl}_i\, dx^i \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_l}$$

gemischte Tensoren.

Einen Faktor 2. Art kann man anschreiben mit kovarianten Symbolen; auch aber mit kontravarianten Symbolen. Sie sind einander gleich, denn

$$(ab) = a_1\, b_2 - a_2\, b_1 = a^i\, b_i$$

$$(a'\, b') = a^1\, b^2 - a^2\, b^1 = a^i\, b_i.$$

Definiert man nach (3) auch kontravariante Symbole α^i, so ergeben sich noch die Tensorkomponenten:

$$\alpha^{ik} = (ab)^2\, a^i\, b^k \qquad \alpha^k_i = (ab)^2\, a_i\, b^k$$

$$Q^{ikl} = (a\alpha)\, a^{ik}\, \alpha^l \qquad Q^{kl}_i = (a\alpha)\, a^k_i\, \alpha^l = (a\alpha)\, a^{kl}\, \alpha_i$$

$$Q^l_{ik} = (a\alpha)\, a_{ik}\, \alpha^l = (a\alpha)\, a^l_i\, \alpha_k = (a\alpha)\, a^l_k\, \alpha_i.$$

Aus

$$a^{ikl}\, Q_{ikm} = (aQ)^2\, a^l\, Q_m = (bc)^2\, (dc)\, (ad)^2\, a^l\, b_m =$$

$$= \tfrac{1}{2}\, (ad)^2\, (bc)^2\, (dc)\, (a^l\, b_m - b^l\, a_m) = \tfrac{1}{2}\, (ad)^2\, (bc)^2\, (dc)\, (ab)\, \delta^l_m$$

folgt

$$a^{ikl}\, Q_{ikm} = \delta^l_m \cdot \frac{R}{2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4a)$$

und daher auch

$$Q^{ikl}\, a_{ikm} = \delta^l_m \cdot \frac{-R}{2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4b)$$

Es gibt noch eine andere Relation zwischen den oben definierten

a^{ikl}, Q^{ikl} und den a_{ikl}, Q_{ikl}.

Mittels der absoluten quadratischen Kovariante

$$g^2_{dx} = \left(\frac{-R}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \alpha^2_{dx} \text{ also } g_{ik} = \left(\frac{-R}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \alpha_{ik} \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

kann man eine Zuordnung von kovarianten zu kontravarianten Symbolen festlegen.

Ist g^{pq} der algebraische Minor von g_{pq} aus $|g|$, so ist

$$g^{pq} = -\left(\frac{-R}{2}\right)^{-\frac{2}{3}} a^{pq}$$

mit der Eigenschaft

$$g^{pq}\, g_{pr} = \delta^q_r.$$

Es sei bemerkt, dass für diese g^p und g_q nicht die Relation (3) gilt. Mit Hilfe von diesen g^{pq} kann man die Indizes von a_{ikl} „hinaufziehen". Man findet dann

$$g^{i\lambda}\, g^{k\mu}\, g^{l\nu}\, a_{\lambda\mu\nu} = -\frac{4}{R^2}\, \alpha^{i\lambda}\, \beta^{k\mu}\, \gamma^{l\nu}\, a_{\lambda\mu\nu} = -\frac{4}{R^2}\, (\alpha a)\, (\beta a)\, (\gamma a)\, \alpha^{\lambda}\, \beta^{\mu}\, \gamma^{\nu}.$$

Nun ist

$$(\alpha a)\, (\beta a)\, (\gamma a)\, \alpha_{dx}\, \beta_{dx}\, \gamma_{dx} = \frac{R}{2}\, Q^3_{dx}$$

also

$$g^{i\lambda}\, g^{k\mu}\, g^{l\nu}\, a_{\lambda\mu\nu} = \frac{-2}{R}\, Q^{ikl} \quad \text{. . . . . (6a)}$$

Auf ähnlichem Wege erhält man:

$$g^{i\lambda}\, g^{k\mu}\, g^{l\nu}\, Q_{\lambda\mu\nu} = a^{ikl} \quad \text{. . . . . (6b)}$$

Für die Aufstellung der Differentialkovarianten erster Ordnung braucht man diese Relationen (6*a*) und (6*b*) nicht zu kennen.

§ 2. Sind dx^i und δx^i $(i = 1, 2)$ zwei Reihen von Differentialen, so ist neben

$$f = a_{ikl}\, dx^i\, dx^k\, dx^l$$

auch die Polare

$$f_\delta = \frac{\partial f}{\partial\, (dx^i)}\, \delta x^i = 3\, a_{ikl}\, \delta x^i\, dx^k\, dx^l$$

eine absolute Kovariante.

Das totale Differential einer absoluten Kovariante ist wieder eine Kovariante. Bildet man nun die Kovariante [2])

$$\Omega(f) = \delta f - df_\delta$$

so ergibt sich, dass die gemischten Differentiale δdx herausfallen, denn

$$\delta f = \frac{\partial a_{ikl}}{\partial x_m} \delta x^m \, dx^i \, dx^k \, dx^l + 3 \, a_{ikl} \, \delta dx^i \, dx^k \, dx^l$$

$$df_\delta = 3 \frac{\partial a_{ikl}}{\partial x_m} dx^m \, \delta x^i \, dx^k \, dx^l + 3 \, a_{ikl} \, d\delta x^i \, dx^k \, dx^l + 6 \, a_{ikl} \, \delta x^i \, d^2 x^k \, dx^l$$

also

$$\Omega(f) = \left(\frac{\partial a_{ikl}}{\partial x_m} - 3 \frac{\partial a_{mkl}}{\partial x_i} \right) \delta x^m \, dx^i \, dx^k \, dx^l - 6 \, a_{mkl} \, \delta x^m \, d^2 x^k \, dx^l$$

woraus folgt, dass

$$\Phi_m = \left(\frac{\partial a_{ikl}}{\partial x_m} - 3 \frac{\partial a_{mkl}}{\partial x_i} \right) dx^i \, dx^k \, dx^l - 6 \, a_{mkl} \, d^2 x^k \, dx^l \quad . \quad . \quad (7)$$

die *Komponenten eines kovarianten Vektors* sind.

In gleicher Weise kann man aus der absoluten Kovariante

$$Q^{*3}_{dx} = \left(\frac{-R}{2} \right)^{-\frac{1}{4}} Q^3_{dx} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

einen Vektor mit Komponenten

$$\Psi_s = \left(\frac{\partial Q^*_{ikl}}{\partial x_s} - 3 \frac{\partial Q^*_{skl}}{\partial x_i} \right) dx^i \, dx^k \, dx^l - 6 \, Q^*_{skl} \, d^2 x^k \, dx^l . \quad . \quad (9)$$

ableiten.

Die Elimination der zweiten Differentiale aus (7) und (9) gelingt nun so: überschiebt man (7) mit α^m_s so entsteht der Vektor

$$X_s = \alpha^m_s \, \Phi_m = \alpha^m_s \left(\frac{\partial a_{ikl}}{\partial x_m} - 3 \frac{\partial a_{mkl}}{\partial x_i} \right) dx^i \, dx^k \, dx^l - 6 \, \alpha^m_s \, a_{mkl} \, d^2 x^k \, dx^l.$$

Nun ist

$$\alpha^m_s \, a_{mkl} = (\alpha a) \, \alpha_s \, a_{kl} = - Q_{skl}.$$

Daher ist

$$X_s = \alpha^m_s \left(\frac{\partial a_{ikl}}{\partial x_m} - 3 \frac{\partial a_{mkl}}{\partial x_i} \right) dx^i \, dx^k \, dx^l + 6 \, Q_{skl} \, d^2 x^k \, dx^l . . \quad (10)$$

Somit folgt aus (8), (9) und (10)

$$P_s = X_s + \left(\frac{-R}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \Phi_s =$$

$$= \left\{ a_s^m \left(\frac{\partial a_{ikl}}{\partial x_m} - 3 \frac{\partial a_{mkl}}{\partial x_i} \right) + \left(\frac{-R}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\partial Q^*_{ikl}}{\partial x_s} - 3 \frac{\partial Q^*_{skl}}{\partial x_i} \right) \right\} dx^i \, dx^k dx^l.$$

Ueberschiebt man schliesslich diesen Tensor vierter Stufe

$$P_{ikl,s} = a_s^m \left(\frac{\partial a_{ikl}}{\partial x_m} - 3 \frac{\partial a_{mkl}}{\partial x_i} \right) + \left(\frac{-R}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\partial Q^*_{ikl}}{\partial x_s} - 3 \frac{\partial Q^*_{skl}}{\partial x_i} \right)$$

mit a^{ikl}, so bekommt man den *linearen Tensor*

$$T_s = a^{ikl} P_{ikl,s} =$$

$$= a^{ikl} a_s^m \left(\frac{\partial a_{ikl}}{\partial x_m} - 3 \frac{\partial a_{mkl}}{\partial x_i} \right) + \left(\frac{-R}{2}\right)^{\frac{1}{2}} a^{ikl} \left(\frac{\partial Q^*_{ikl}}{\partial x_s} - 3 \frac{\partial Q^*_{skl}}{\partial x_i} \right).$$

Nun ist wegen (8) und (4a)

$$\left(\frac{-R}{2}\right)^{\frac{1}{2}} a^{ikl} \left(\frac{\partial Q^*_{ikl}}{\partial x_s} - 3 \frac{\partial Q^*_{skl}}{\partial x_i} \right) =$$

$$= a^{ikl} \left\{ \left(\frac{\partial Q_{ikl}}{\partial x_s} - 3 \frac{\partial Q_{skl}}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2R} \left(Q_{ikl} \frac{\partial R}{\partial x_s} - Q_{skl} \frac{\partial R}{\partial x_i} \right) \right\} =$$

$$= - \left(Q_{ikl} \frac{\partial a^{ikl}}{\partial x_s} - 3 \, Q_{skl} \frac{\partial a^{ikl}}{\partial x_i} \right) - \frac{1}{4} \frac{\partial R}{\partial x_s}$$

und da [3])

$$\frac{1}{4} \frac{\partial R}{\partial x_s} = (\varphi \, Q)^3 \, \psi_s = \frac{\partial a^{ikl}}{\partial x_s} Q_{ikl}$$

bekommt man

$$T_s = a^{ikl} a_s^m \left(\frac{\partial a_{ikl}}{\partial x_m} - 3 \frac{\partial a_{mkl}}{\partial x_i} \right) - \left(2 \, Q_{ikl} \frac{\partial a^{ikl}}{\partial x_s} - 3 \, Q_{skl} \frac{\partial a^{ikl}}{\partial x_i} \right). \quad (11)$$

§ 3. Diese lineare Differentialkovariante T ist, abgesehen von einem Zahlenfaktor, nichts anderes als die früher aufgestellte Kovariante

$$l_{dx} = (\varphi\psi)(\varphi a)^2 (a\alpha) \, \alpha_{dx} - (\varphi\alpha)^2 (\varphi a)(\psi a) \, a_{dx} = I - II. \quad . \quad . \quad (12)$$

---

[3]) Vgl. P. G. MOLENAAR, Proc. Kon. Ned. Akad. v. Wetensch., Amsterdam, **42**, 257—261 (1939).

Man findet leicht:

$$
\begin{aligned}
T_s &= (a\varphi)^3 (\alpha\psi)\, \alpha_s - 3\,(a\varphi)^2 (a\psi)(\alpha\varphi)\, \alpha_s - 2\,(\varphi Q)^3\, \psi_s + 3\,(\varphi Q)^2 (\varphi\psi)\, Q_s = \\
&= -2\,(a\varphi)^2 (\alpha\psi)(a\varphi)\, \alpha_s - (a\varphi)^2 (\alpha a)(\varphi\psi)\, \alpha_s - 2\,(\varphi a)^2 (\varphi\alpha)(a\alpha)\, \psi_s + \\
&\qquad + 3\,(\varphi a)^2 (a\alpha)(\varphi\psi)\, \alpha_s = \\
&= 4\, I_s - 2\,\{(a\varphi)^2 (\alpha\psi)(a\varphi)\, \alpha_s + (\varphi a)^2 (\varphi\alpha)(a\alpha)\, \psi_s\} = \\
&= 4\, I_s - 2\,(a\varphi)^2 (\alpha\psi)(\alpha\varphi)\, a_s = \\
&= 4\, I_s - 2\,\{(a\varphi)(\alpha\varphi)(a\psi)(\alpha\varphi)\, a_s - (a\varphi)(\alpha a)(\varphi\psi)(\alpha\varphi)\, a_s\} = \\
&= 4\, I_s - 2\,\{(\varphi\alpha)^2 (\psi a)(\varphi a)\, a_s - (a\varphi)(\alpha a)(\varphi\psi)(a\varphi)\, \alpha_s\} = \\
&= 4\, I_s - 2\,(I_s + II_s) = 2\,(I_s - II_s) = 2\, l_s.
\end{aligned}
$$

Der Kovariante l_{dx} kann man noch eine andere Gestalt geben. Durch umformen entsteht:

$$
\begin{aligned}
l_s &= (\varphi\psi)(\varphi a)^2 (a\alpha)\, \alpha_s - (\varphi\alpha)^2 (\varphi a)(\psi a)\, a_s = \\
&= (\varphi\psi)(\varphi Q)^2\, Q_s + (\dot{\alpha}\beta)(\dot{\alpha}\sigma)\, \beta_s - \tfrac{1}{2}\,(\dot{\alpha}\beta)^2\, \sigma_s = \\
&= (Q\psi)(\varphi Q)^2\, \varphi_s - (Q\varphi)^3\, \psi_s + (\dot{\alpha}\beta)(\dot{\alpha}\sigma)\, \beta_s - \tfrac{1}{2}\,(\dot{\alpha}\beta)^2\, \sigma_s = \\
&= (Q\varphi)^2 (Q\psi)\, \varphi_s + (\dot{\alpha}\beta)(\dot{\alpha}\sigma)\, \beta_s
\end{aligned}
$$

also

$$
l_s = Q^{ikl} \frac{\partial a_{iks}}{\partial x_l} + \alpha_{is} \frac{\partial \alpha^{il}}{\partial x_l} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (13)
$$

Da

$$
\alpha_{is}\, \alpha^{il} = \delta_s^l \,.\, \frac{R}{2}
$$

ist wegen (4b)

$$
l_s = -\, a_{iks} \frac{\partial Q^{ikl}}{\partial x_l} - \alpha^{il} \frac{\partial \alpha_{is}}{\partial x_l} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (14)
$$